$r = r_{ij} = \left| P_i - Q_j \right| \to 0$, т.к. при $r \to 0$ получаем $v \approx r^2 \ln r \to 0$. Следовательно, в данном случае необходимо аналитическое вычисление с использованием понятий «главное значение» и «конечная часть» несобственных интегралов».

Правые части α_i и β_i системы (9) вычисляются путем многоугольника, ограниченного замкнутой ломаной $G_i - ... - G_N$ на треугольники с дальнейшим использованием любой достаточно точной кубатурной формулы для треугольной области.

Численный пример. Рассмотрим круглую защемленную пластинку, в центре которой действует сосредоточенная нагрузка $P_l = P\sin(\omega t)$. Эта задача имеет точное аналитическое решение [5]. Возьмем радиус пластины $R=10$. Прогибы пластины для точек, лежащих на концентрической окружности радиуса $r=4$ вычислялись аналитически и по методу граничных элементов при частотном параметре $\lambda = 0{,}4$. Получились следующие результаты: $w = -0{,}815$ - точное решение, $w = -0{,}845$ - решение по МГЭ. Относительная ошибка составляет 4,5 %.

ВЫВОДЫ

Представлена численная реализация метода граничных элементов для задачи о вынужденных гармонических колебаниях тонкой пластины. Сравнение численного решения с аналитическим для защемленной круглой центрально нагруженной пластины показывает, что совпадение достаточно хорошее.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир. - 1984. – С. 494.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубелл Л. Методы граничных элементов в механике твердого тела. - М.: Мир. - 1987. – С. 328.
3. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань. - 1986. – С. 379.
4. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности решаемые в бесселевых функциях.- М.: Физматгиз. - 1960. – С. 450.
5. Абрамовиц П., Стиган Р. Справочник по специальным функциям.- М.:- Наука. - 1979. – С. 820.

УДК 539.3

Босяков С.М., Скляр О.Н.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В УПРУГОМ ТЕЛЕ С ТРЕМЯ МАТЕРИАЛЬНЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

Исследования волновых процессов в упругих средах представляют собой одну из основных задач механики деформируемого твердого тела. Интерес к этой области динамики сплошной среды связан как с теоретическими исследованиями, так и с большими возможностями их технических применений [1]. К этим вопросам примыкают работы Ф.И. Федорова [2] и Г.И. Петрашеня [3], где особое место занимает построение и исследование различного рода волновых поверхностей, а также их сечений. Это позволяет определить ряд важных с практической точки зрения характеристик волны, например, ее групповую скорость [3]. Анализ выше упомянутых работ показывает, что для изучения особенностей распространения квазипоперечных и квазипродольных упругих волн является целесообразным применение методов общей теории характеристик [3, 4], математический аппарат которой позволяет провести полное исследование динамических процессов в анизотропной среде.

Рассмотрим упругие тела, характеризующиеся тремя материальными постоянными. К таким материалам относятся, например, алмазы, стеклопластики, а также большинство металлов, используемых в промышленности. Уравнения движения кубически анизотропной среды запишем в следующем виде [1, 5]:

$$\left(A_4\Delta - \left(A_1 - A_2 - 2A_4\right)\partial_i^2\right)u_i + \left(A_2 + A_4\right)\partial_i \sum_{k=1}^{3} \partial_k u_k + X_i = \rho \ddot{u}_i, \qquad (1)$$

где A_1, A_2, A_4 - упругие постоянные, Δ - оператор Лапласа, $\vec{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right)$ - вектор перемещения, X_i - массовые силы, ρ - плотность, $\ddot{u}_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, i = \overline{1,3}$.

Характеристическое уравнение для системы уравнений (1) с начальными данными на поверхности $Z\left(t, x_1, x_2, x_3\right) = const$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\left(A_4 - \rho V^2\right)^3 + (A_1 + A_4)\left(A_4 - \rho V^2\right)^2 +\\ &+(A_1 + A_2)(A_1 - A_2 - 2A_4)\left(A_4 - \rho V^2\right)\times\\ &\times(\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_3) +\\ &+(A_1 - A_2 - 2A_4)^2(A_1 + A_4 + 2A_2)\times\\ &\times\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3 = 0\end{aligned}.$$

Здесь V – фазовая скорость распространения поверхности разрыва, $\cos\alpha_i$ - направляющие косинусы волновой нормали, $i = \overline{1,3}$. В виду того, что это уравнение не разрешимо в аналитическом виде [6], анализ распространения поверхностей разрыва целесообразно проводить в отдельных плоскостях кубически анизотропного тела [1]. В качестве таких плоскостей выделяют плоскость грани куба ($x_i = 0, i = \overline{1,3}$)

Босяков Сергей Михайлович. *Ассистент каф. сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.
Скляр О.Н. *К. ф.-м. н., доцент каф. теоретической механики Белорусской государственной политехнической академии.*
Беларусь, БГПА, 220027, г. Минск, пр. Ф. Скорины 65.

и плоскость $x_1' = 0$ ($x_2' = 0$), повернутую относительно $x_1 = 0$ ($x_2 = 0$) на угол равный 45^{o} (рисунок 1) [1].

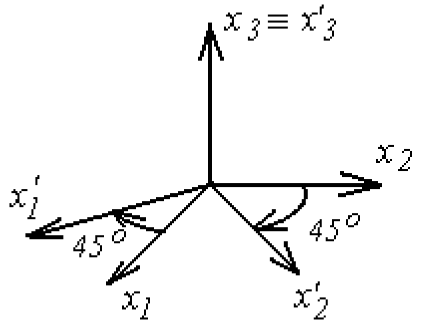


Рисунок 1 – Системы координат (x_1, x_2, x_3) и (x_1', x_2', x_3').

Первый из выше перечисленных случаев был рассмотрен [1]. Обратимся ко второму случаю, так как он является наименее изученным. Уравнения (1) в системе координат (x_1', x_2', x_3') принимают следующий вид [1]:

$$\begin{aligned}
&\left(A_{11}\partial_1^2 + A_{66}\partial_2^2 + A_{44}\partial_3^2\right)u_1 + \left(A_{12} + A_{66}\right)\partial_1\partial_2 u_2 + \\
&+\left(A_{13} + A_{44}\right)\partial_1\partial_3 u_3 = \rho\ddot{u}_1, \\
&\left(A_{12} + A_{66}\right)\partial_1\partial_2 u_1 + \left(A_{66}\partial_1^2 + A_{11}\partial_2^2 + A_{44}\partial_3^2\right)u_2 + \\
&+\left(A_{13} + A_{44}\right)\partial_2\partial_3 u_3 = \rho\ddot{u}_2, \\
&\left(A_{13} + A_{44}\right)\partial_1\partial_3 u_1 + \left(A_{13} + A_{44}\right)\partial_2\partial_3 u_2 + \\
&+\left(A_{44}\left(\partial_1^2 + \partial_2^2\right) + A_{33}\partial_3^2\right)u_3 = \rho\ddot{u}_3.
\end{aligned} \qquad (2)$$

Начальные данные к системе (2) зададим на поверхности $Z(t, X) = const$ и перейдем к новым переменным по формулам

$$Z_k = Z_k(t, x_1, x_2),\ k = \overline{0,3},\ Z_0 \equiv Z\ .$$

Выразим производные по старым переменным через производные по новым переменным:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_l} = \sum_{m,n=0}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial Z_n \partial Z_m}\frac{\partial Z_n}{\partial x_k}\frac{\partial Z_m}{\partial x_l} + \sum_{m=0}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial Z_m}\frac{\partial^2 Z_m}{\partial x_k \partial x_l}, \qquad (3)$$

$$k, l = \overline{0,3},\ x_0 = t.$$

Подставим (3) в (2) и приравняем нулю определитель, составленный из коэффициентов при производных $\dfrac{\partial^2 u_i}{\partial Z^2}, i = \overline{1,3}$ [5,6]:

$$det\left\|\omega_{ij}\right\| = 0\ , \qquad (4)$$

где $\omega_{ii} = A_{11}p_i^2 + A_{66}p_j^2 + A_{44}p_3^2, \omega_{ij} = \left(A_{12} + A_{66}\right)p_i p_j$

$$\omega_{33} = A_{44}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + A_{33}p_3^2,$$

$$\omega_{i3} = \omega_{3i} = \left(A_{13} + A_{44}\right)p_i p_3, i \neq j = 1,2$$

$$p_k = \frac{\partial Z}{\partial x_k}, p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t}, k = \overline{1,3}\ .$$

Раскроем определитель (4) и разделим полученное выражение на $g^6, g^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. Будем иметь кубическое уравнение относительно $V^2 = \dfrac{p_0^2}{g^2}$, в которое войдут также упругие постоянные и направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности $cos\,\alpha_i = \dfrac{p_i}{g}, i = \overline{1,3}$ [5, 6]. Для конкретности примем $cos\,\alpha_1 = cos\,\alpha, cos\,\alpha_2 = 0$, $cos\,\alpha_3 = sin\,\alpha$, что соответствует плоскости $x_2' = 0$, и запишем решение получаемого при этом уравнения в следующем виде:

$$V_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2\rho}\left(A_{44} + A_{11}cos^2\alpha + A_{33}sin^2\alpha \pm \sqrt{\left(\left(A_{11} - A_{44}\right)cos^2\alpha + \left(A_{44} - A_{33}\right)sin^2\alpha\right)^2 + \left(A_{13} + A_{44}\right)^2 sin^2 2\alpha}\right)},$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{A_{66}cos^2\alpha + A_{44}sin^2\alpha}{\rho}}. \qquad (5)$$

Выразим фигурирующие здесь константы $A_{11}, A_{33}, A_{44}, A_{66}, A_{12}, A_{13}$ через модули упругости кубически анизотропной среды A_1, A_2, A_4 [1]:

$$A_{11} = A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2}, A_{13} = A_{12} = A_2, A_{33} = A_1,$$

$$A_{44} = A_4, A_{66} = \frac{A_1 - A_2}{2}.$$

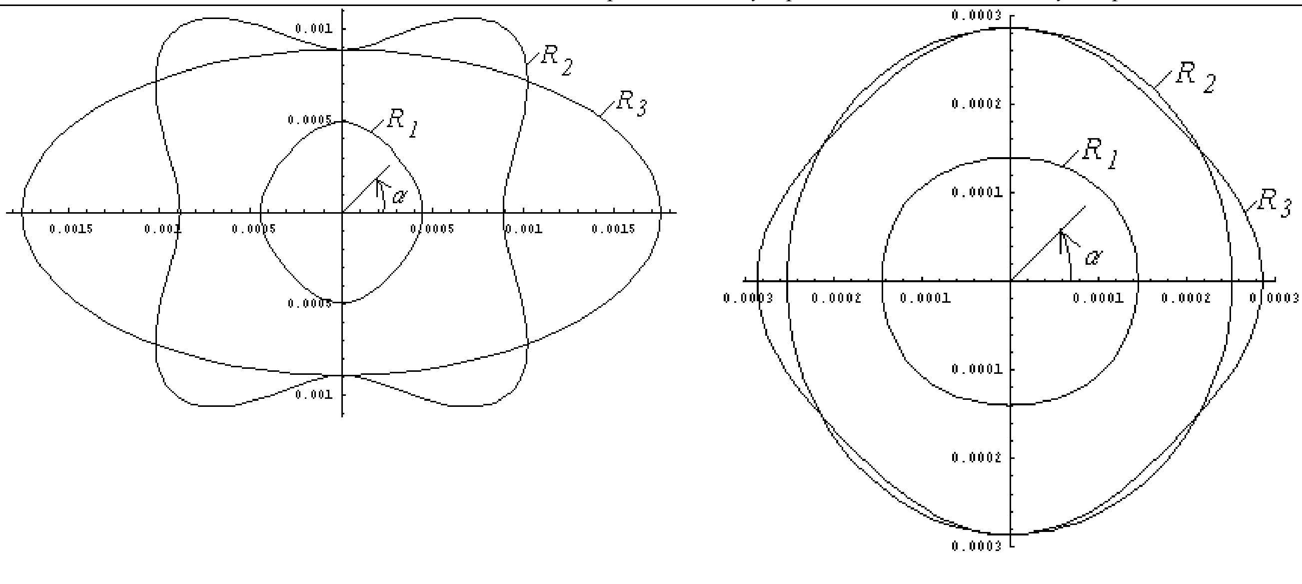
Окончательно для скоростей распространения поверхностей разрыва (5) будем иметь

$$V_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{2\rho}\left(A_4 + \left(A_4 + \frac{A_1 + A_2}{2}\right)cos^2\alpha + A_1 sin^2\alpha \pm \sqrt{\left(\frac{A_1 + A_2}{2}cos^2\alpha + \left(A_4 - A_1\right)sin^2\alpha\right)^2 + \left(A_2 + A_4\right)^2 sin^2 2\alpha}\right)},$$

$$V_3 = \sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{A_1 - A_2}{2}cos^2\alpha + A_4 sin^2\alpha\right)}. \qquad (8)$$

Формулы (8) позволяют построить кривые концов векторов рефракции (кривые обратных скоростей [1]) $R_i = 1/V_i, i = \overline{1,3}$ [2, 3] в плоскости $x_2' = 0$ (рисунок 2) для некоторых кубически анизотропных материалов [6, 7].

Кривые R_i позволяют определить значение фазовой скорости в зависимости от значения угла α, а также найти направление скорости переноса упругой энергии, которая направлена по нормали к кривой $R_i, i = \overline{1,3}$. Отметим, что кривая R_1 принадлежит квазипродольной волне, так как $V_1 > V_2$ и $V_1 > V_3$ (рисунок 2, [3]), скорости V_2, V_3 принадлежат квазипоперечным волнам, причем в зависимости от угла α и материальных постоянных либо $V_3 \geq V_2$, либо $V_2 \geq V_3$. Равенство скоростей V_2 и V_3 для всех кубически анизотропных материалов в плоскости $x_2' = 0$ выполняется



а. Свинец.

б. Молибден.

Рисунок 2 – Кривые рефракции в плоскости $x_2' = 0$ (с/м).

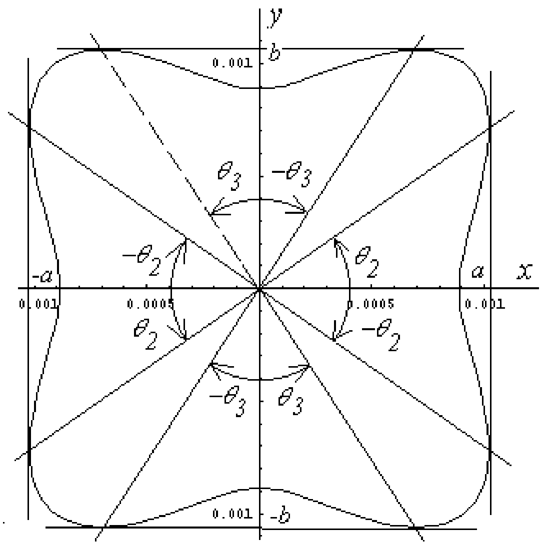


Рисунок 3а – Кривая R_2 для свинца в плоскости $x_2' = 0$ (с/м).

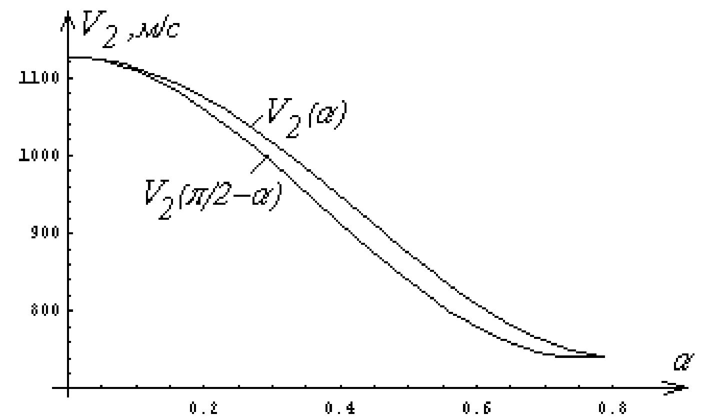


Рисунок 3б – Свинец. Зависимость фазовой скорости V_2 от угла α.

тогда, когда угол α равен 35^{o}16’, что легко можно доказать аналитически решением уравнения $V_2 = V_3$.

Важной особенностью кривой R_2 для некоторых кубически анизотропных материалов является наличие касательных, имеющих с R_2 две точки касания, а также то, что в уравнениях этих касательных $x = a$ и $y = b$ правые части не равны между собой, то есть $|a| \neq |b|$ (рисунок 3а.). Таким образом, кривые R_2 несимметричны относительно биссектрис координатных четвертей и $V_2(\alpha) \geq V_2(\pi/2 - \alpha), \alpha \in [0, \pi/4]$ (рисунок 3б). Наличие таких особенностей приводит к появлению в интервале углов $(-\theta; \theta)$ и $(-\theta^*; \theta^*)$ лакун.

Дальнейший анализ продолжим для квазипоперечной волны, обладающей выше указанными особенностями. В плоскости $x_2' = 0$ кубически анизотропных сред условия возникновения лакун при распространении волны со скоростью V_2, можно записать как условия существования решений уравнений относительно углов θ и θ^* в интервале от нуля до $\pi/2$:

Таблица 1 – Значения углов θ и θ^* для некоторых кубически анизотропных тел.

Материал	Упругие постоянные, $\times 10^{10}$, Н/м^2			Плотность, ρ, кг/м^3	Угол θ	Угол θ^*
	A_1	A_2	A_4			
германий	12.89	4.83	6.71	5460	17^{O}28’	20^{O}40’
золото	18.6	15.7	4.20	19300	32^{O}07’	31^{O}30’
никель	24.65	14.73	12.47	8750	29^{O}36’	28^{O}38’
серебро	12.40	9.34	4.61	10505	32^{O}27’	31^{O}11’
медь	16.84	12.14	7.54	8930	33^{O}07’	31^{O}19’
свинец	4.66	3.92	1.44	11342	35^{O}03’	33^{O}26’

$$\begin{gathered}\Big(A_1^2+4A_2^2+9A_2A_4+6A_4^2-A_1(A_2+3A_4)-\\-(A_1-A_2-2A_4)(3A_1+4A_2+A_4)\cos 2\theta\Big)^2-16(A_1+A_4)^2\times\\\times\left(\left(\frac{1}{2}(A_1+A_2)\cos^2\theta+(A_4-A_1)\sin^2\theta\right)^2+\right.\\\left.+(A_2+A_4)^2\sin^2 2\theta\right)=0\end{gathered}\qquad(9)$$

$$\begin{gathered}\Big((A_1-3A_2-4A_4)(A_1+3A_2+2A_4)-\\-(A_1-A_2-2A_4)(3A_1+7A_2+4A_4)\cos 2\theta^*\Big)^2-\\-16(A_1+A_2+2A_4)^2\cdot\left(\left(\frac{1}{2}(A_1+A_2)\cos^2\theta^*+\right.\right.\\\left.\left.+(A_4-A_1)\sin^2\theta^*\right)^2+(A_2+A_4)^2\sin^2 2\theta^*\right)=0\end{gathered}\qquad(10)$$

Расчет, проведенный на основании формул (9), (10) для ряда кубически анизотропных сред показывает, что в плоскости $x_2'=0$ лакуны отсутствуют у молибдена, алмаза, вольфрама и алюминия [7]. Для некоторых других кубически анизотропных материалов значения углов θ и θ^* приведены в таблице 1.

Как следует из таблицы 1, в большинстве случаев $\theta > \theta^*$, обратное неравенство выполняется, например, для германия. Представляет интерес анализ случаев, когда при $\theta \neq 0$ угол θ^* равен нулю, либо при $\theta^* \neq 0$ угол θ равен нулю, поскольку для известных кубически анизотропных сред этот эффект остался не раскрытым.

С помощью формул (8) легко получить бихарактеристики, которые позволяют построить характеристические поверхности и являются составляющими групповой скорости распространения упругой волны. Для этого выразим из (8) p_0:

$$p_0^{\pm}=\sqrt{\frac{1}{2\rho}\left(A_4g^2+\left(A_4+\frac{A_1+A_2}{2}\right)p_1^2+A_1p_2^2\pm\pm\sqrt{\left(\frac{A_1+A_2}{2}p_1^2+(A_4-A_1)p_2^2\right)^2+4(A_2+A_4)^2p_1^2p_2^2}\right)},\qquad(11)$$

$$p_0=\sqrt{\frac{1}{\rho}\left(\frac{A_1-A_2}{2}p_1^2+A_4p_2^2\right)}.\qquad(12)$$

Из (12) вытекают следующие уравнения бихарактеристик

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial p_0}{\partial p_1}=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\frac{1}{2}(A_1-A_2)p_1}{\sqrt{\frac{A_1-A_2}{2}p_1^2+A_4p_2^2}},$$

$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial p_0}{\partial p_2}=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{A_4p_2}{\sqrt{\frac{A_1-A_2}{2}p_1^2+A_4p_2^2}}.$$

Отсюда, при $t=1$ получим

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{\frac{1}{2}(A_1-A_2)\cos\alpha}{\sqrt{\frac{A_1-A_2}{2}\cos^2\alpha+A_4\sin^2\alpha}},$$

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{\rho}}\frac{A_4\sin\alpha}{\sqrt{\frac{A_1-A_2}{2}\cos^2\alpha+A_4\sin^2\alpha}}.\qquad(13)$$

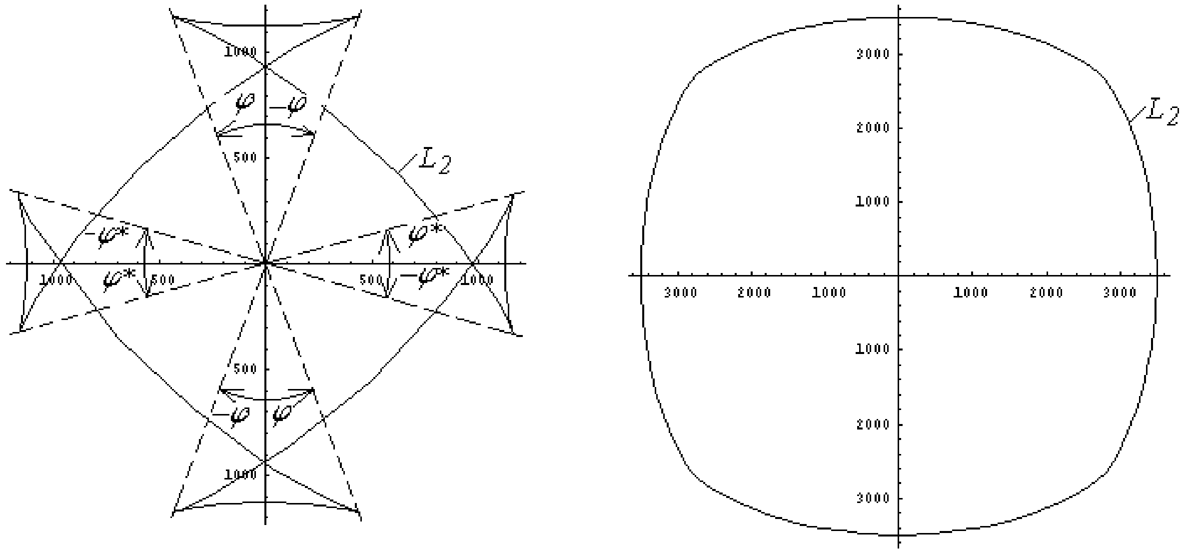
Здесь учтено, что $p_1=g\cos\alpha$ и $p_2=g\sin\alpha$. Из (13) будем иметь

$$\frac{x_1^2}{{A_1-A_2}\big/{2\rho}}+\frac{x_2^2}{{A_4}\big/{\rho}}=1.\qquad(14)$$

Таким образом, уравнение волновой поверхности одной из квазипоперечных волн представляет собой уравнение эллипса (14).

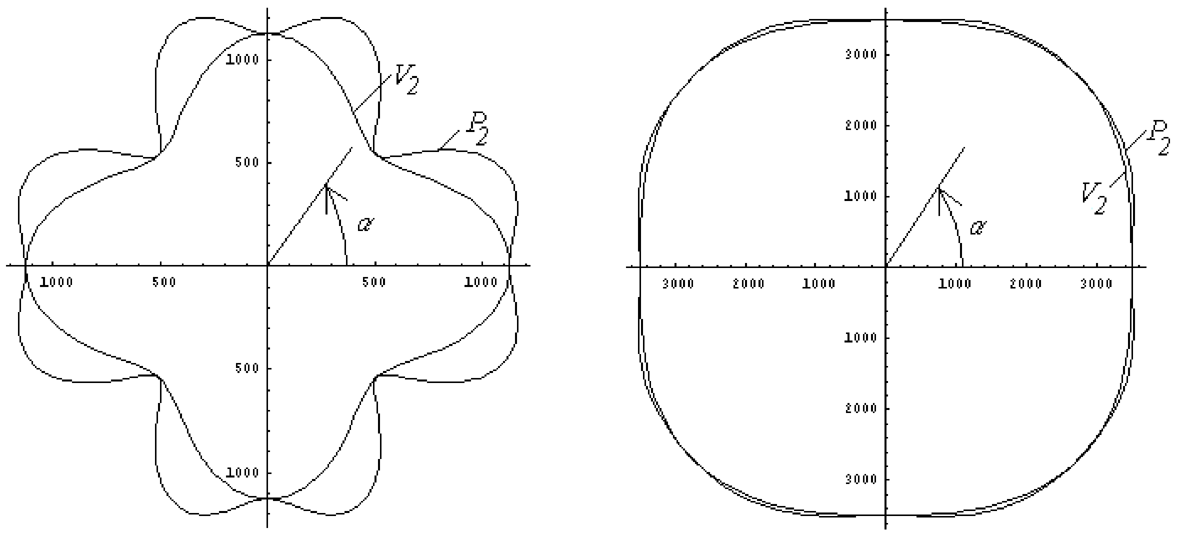
Из (11), после очевидных преобразований, вытекают следующие уравнения бихарактеристик (принимаем $t=1$):

$$x_1^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2\rho}}\frac{4A_4+A_1+A_2\pm\dfrac{(A_1+A_2)\Omega+4(A_2+A_4)^2\sin^2\alpha}{\sqrt{\Omega^2+(A_2+A_4)^2\sin^2 2\alpha}}}{2\sqrt{A_4+\left(A_4+\dfrac{A_1+A_2}{2}\right)\cos^2\alpha+A_1\sin^2\alpha\pm\Psi}}\cos\alpha\qquad(15)$$



а. Свинец. б. Молибден.

Рисунок 4 – Волновые фронты квазипоперечных волн в плоскости $x_2' = 0$ (м).



а. Свинец. б. Молибден.

Рисунок 5 – Кривые групповых и фазовых скоростей P_2, V_2 (скорости указаны в м/с).

$$x_2^{\pm} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \frac{\sqrt{A_4 + A_1 \pm \dfrac{(A_4 - A_1)\Omega + 2(A_2 + A_4)^2 \cos^2\alpha}{\sqrt{\Omega^2 + (A_2 + A_4)^2 \sin^2 2\alpha}}}}{\sqrt{A_4 + \left(A_4 + \dfrac{A_1 + A_2}{2}\right)\cos^2\alpha + A_1 \sin^2\alpha \pm \Psi}} \sin\alpha \tag{16}$$

Здесь $\Omega = \dfrac{A_1 + A_2}{2}\cos^2\alpha + (A_4 - A_1)\sin^2\alpha,$

$\psi = \sqrt{\Omega^2 + (A_2 + A_4)^2 \sin^2 2\alpha}$.

Уравнение (14), а также выражения (15), (16) позволяют построить волновые фронты поверхностей разрыва $L_i, i = \overline{1,3}$ (рисунок 4).

Кривая L_2 в свинце, в отличие от кривых L_1 и L_3, имеет между двумя ближайшими точками касания прямой с кривой R_2 (рисунок 4а), такую точку, в которой пересекаются ветви кривой L_2, вследствие чего образуется лакуна. Это означает, что в данной кубически анизотропной среде существуют направления, ограниченные углами $(-\varphi, \varphi)$ и $(-\varphi^*, \varphi^*)$, вдоль которых может распространяться одна квазипродольная и четыре квазипоперечные волны. Как следует из рисунка 4б, в молибдене, а также в других кубически анизотропных материалах с низкой степенью анизотропии (вольфрам, алюминий и др.), лакун не возникает и существу-

Таблица 2 – Значения максимальных групповых скоростей квазипоперечной волны и углы лакун.

Материал	Угол $\alpha^{max\,1}$	Скорость $P^{max\,1}$	Угол φ	Угол $\alpha^{max\,2}$	Скорость $P^{max\,2}$	Угол φ^{*}
германий	10°25	3546.30	5°43	9°35	3515.23	1°59
золото	16°26	1565.45	14°26	17°24	1540.83	11°32
никель	12°50	4018.83	16°08	15°10	3890.46	9°32
серебро	15°	2259.93	17°22	16°58	2194.74	12°14
медь	14°11	3182.92	19°42	16°58	3060.60	13°10
свинец	16°28	1247.77	20°15	18°32	1209.29	15°09

ют две квазипоперечные волны и квазипродольная волна L_2. Ранее этот эффект был качественно описан Г.И. Петрашенем [3]. Отметим, что кривые $L_i, i=\overline{1,3}$ имеют непосредственный физический смысл, так как представляют собой геометрической место точек, до которых доходит возмущение, возникшее в некоторой точке в начальный момент времени.

Для определения групповой скорости волны (скорости распространения упругой энергии) воспользуемся следующей формулой:

$$P=\sqrt{\left(\frac{\partial p_0}{\partial p_1}\right)^2+\left(\frac{\partial p_0}{\partial p_2}\right)^2}\,. \qquad (17)$$

С помощью (13), (15), (16) и (17) легко рассчитать групповые скорости упругих волн, а также построить кривые групповых скоростей $P_i, i=\overline{1,3}$ (рисунок 5).

Отметим, что кривые P_3 групповых скоростей для кубически анизотропных тел в плоскости $x_2'=0$ совпадают с кривыми V_3 фазовых скоростей; сравнение кривых P_1, P_2 и V_1, V_2 показывает, что групповая скорость всегда превышает фазовую, причем групповая скорость P_2 отличается от фазовой V_2 тем больше, чем выше степень анизотропии материала, равенство P_2 и V_2 выполняется при $\alpha=\pi n/4, n\in Z$ (рисунок 5).

Как следует из рисунка 5а., групповая скорость P_2 в отличие от групповых скоростей P_1 и P_3 имеет два неравных между собой максимума $P^{max\,2}$ и $P^{max\,1}$ при $\alpha\in\left(0,\pi/4\right)$ в направлениях углов $\alpha^{max\,1}$ и $\alpha^{max\,2}$ соответственно (рисунок 6).

Используя формулу (17) и выражения для бихарактеристик (14), (15), легко рассчитать углы $\alpha^{max\,1}$, $\alpha^{max\,2}$ и максимальные групповые скорости распространения квазипоперечной волны $P^{max\,2}$ и $P^{max\,1}$, а также вычислить углы лакун φ и φ^{*}. Значения этих величин приведены в таблице 2.

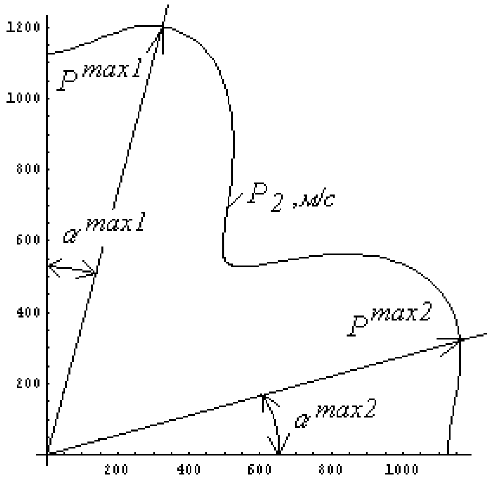


Рисунок 6 – Свинец. Максимумы групповой скорости P_2 (м/с).

Как следует из таблицы 2, углы лакун φ и φ^{*} для указанных кубически анизотропных материалов заметно отличаются друг от друга, причем $\varphi > \varphi^{*}$.

В заключении отметим, что результаты, полученные в данной работе, для кубически анизотропных тел в плоскости $x_2'=0$ могут быть перенесены на исследование особенностей распространения квазипродольной и квазипоперечных упругих волн в трехмерном случае.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. М., 1982.
2. Федоров Ф. И. Упругие волны в кристаллах. М., 1965.
3. Петрашень Г. И. Распространение волн в упругих анизотропных средах. Л., 1980.
4. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. IV, ч. 2. М., 1981.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., 1984.
6. Скляр О. Н., Босяков С. М.// Материалы, технологии, инструменты, 2000, т. 5, № 4, С. 26 – 28.
7. Современная кристаллография. Физические свойства кристаллов. Т. IV. М., 1981.