УДК 539.3

Брикса В.П., Веремейчик А.И., Теуш Б.Л.

МЕТОД ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧЕ О ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАСТИН

Метод граничных элементов (МГЭ) в настоящее время является одним из наиболее эффективных численных методов решения задач механики. По сравнению с известными методами (конечных разностей, конечных элементов) он имеет ряд преимуществ, среди которых следует отметить снижение размерности задачи на единицу при численном решении. В последние годы в иностранной и отечественной литературе появилось значительное число публикаций, посвященных применению МГЭ в задачах прикладной механики. Вместе с тем, работ по применению МГЭ к динамическим задачам теории пластин крайне мало. В связи с этим, в данной работе предлагается решение задачи о вынужденных гармонических колебаниях тонкой пластины методом граничных элементов.

Как известно, задача о вынужденных поперечных гармонических колебаниях тонкой пластины (т.е. при нагрузке на пластину, имеющей вид $q=q(x,y)\sin(\omega t)$) сводится к решению дифференциального уравнения относительно амплитуды прогиба $w(x,y)$ вида

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}-\lambda^4 w=L(w)=q. \qquad (1)$$

Здесь $\lambda^4=\frac{\omega^2\rho h}{D}$; ρ - плотность материала пластины; h- ее толщина; D - цилиндрическая жесткость; ω - частота вынужденных колебаний.

Для уравнения (1) справедлива обобщенная формула Грина

$$\iint_S\left[vL(w)-wL(v)\right]ds=$$
$$=\int_G\left[vK_n(w)-wK_n(w)+M_n(v)\frac{\partial w}{\partial n}-M_n(w)\frac{\partial v}{\partial n}\right]dG, \qquad (2)$$

где S - площадь пластины; G - ее граница; $\frac{\partial}{\partial n}$, M_n, K_n - дифференциальные операторы нормальной производной, изгибающего момента и обобщенной поперечной силы на границе соответственно, которые имеют вид

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial n}=\frac{\partial(\bullet)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial(\bullet)}{\partial y}\sin\alpha,$$
$$M_n(\bullet)=M_x\cos^2\alpha+M_y\sin^2\alpha-2M_{xy}\sin\alpha\cos\alpha, \qquad (3)$$
$$K_n(\bullet)=Q_x\cos\alpha+Q_y\sin\alpha-\frac{\partial M_{nt}}{\partial t},$$

где α - угол наклона нормали n границы пластины к оси Ox; $\frac{\partial}{\partial t}$ - оператор дифференцирования по касательной к границе пластины;

$$M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\upsilon\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$
$$M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\upsilon+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$
$$M_{xy}=-D(1-\upsilon)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y};$$
$$Q_x=-D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$
$$Q_y=-D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right);$$
$$M_{nt}=M_{xy}\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)+\left(M_x-M_y\right)\sin\alpha\cos\alpha.$$

Пусть в выражении (2) v есть фундаментальное решение для дифференциального оператора L, т.е.

$$L(v)=\delta(x,y), \qquad (4)$$

где $\delta\ (x,y)$ – дельта - функция. По своему физическому смыслу v представляет собой функцию влияния (или функцию Грина) для бесконечной пластины. Тогда из (2) получаем интегральное представление для решения

$$w=w(\bar{P})=w(x,y):$$

$$w(\bar{P})=\iint_S v(\bar{P},Q)qdS-$$
$$-\int_G\left[K_n\left(v(\bar{P},Q)\right)w(Q)-M_n\left(v(\bar{P},Q)\right)\frac{\partial w}{\partial n}+\right. \qquad (5)$$
$$\left.+\frac{\partial v(\bar{P},Q)}{\partial n}M_n\left(w(Q)\right)-v(\bar{P},Q)K_n\left(w(Q)\right)\right]dG.$$

В уравнении (5) точки $\bar{P},\bar{Q}$ находятся внутри пластины, точка Q - граничная точка, находится на границе Q.

Для случая кусочно-гладкой границы предельный переход $\bar{P}\to P\in G$ дает соотношение

Брикса Владимир Петрович. *К.т.н., доцент каф. сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Веремейчик Андрей Иванович. *Аспирант каф. сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.
Теуш Б.Л. *Доцент Московского технологического института.*

$$\frac{1}{2}w(P)=\iint_S v(P,\bar{Q})qdS-$$
$$-\int_G\left[K_n\big(v(P,Q)\big)w(Q)-M_n\big(v(P,Q)\big)\frac{\partial w}{\partial n}+\right. \tag{6}$$
$$\left.+\frac{\partial v(P,Q)}{\partial n}M_n\big(w(Q)\big)-v(P,Q)K_n\big(w(Q)\big)\right]dG.$$

Дифференцируя (6) по нормали в точке P, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w(P)}{\partial n_P}=\iint_S\frac{\partial v(P,\bar{Q})}{\partial n_P}qdS-$$
$$-\int_G\left[\frac{\partial K_n\big(v(P,Q)\big)}{\partial n_P}w(Q)-\frac{\partial M_n\big(v(P,Q)\big)}{\partial n_P}\frac{\partial w(Q)}{\partial n}+\right.$$
$$\left.+\int_G\frac{\partial^2 v(P,Q)}{\partial n\partial n_P}M_n\big(w(Q)\big)-\frac{\partial v(P,Q)}{\partial n_P}K_n\big(w(Q)\big)\right]dG. \tag{7}$$

Соотношения (6) и (7) связывают между собой четыре неизвестные функции на границе пластины G, а именно $w(Q)$, $\frac{\partial w(Q)}{\partial n}$, $M_n(w(Q))$, $K_n(w(Q))$. Однако граничные условия для (1) определяют две из них. Например, для защемленной границы $w(Q)=\frac{\partial w(Q)}{\partial n}=0$. Таким образом, соотношения (6) и (7) представляют собой систему граничных интегральных уравнений (ГИУ). Решив эту систему и используя граничные условия, можно найти решение из интегрального представления (5).

<u>Схема численного решения системы ГИУ.</u> Границу G пластины заменяем на N прямолинейных отрезков G_j, т.е. апроксимируем границу замкнутой ломаной: $G\approx\sum_{j=1}^{N}G_j$. Значения неизвестных на границе функций считаем постоянными вдоль каждого граничного элемента G_j и равными их значениям в точках $P=P_i(\xi_i,\eta_i)$ - серединах элементов. Тогда соотношения (6)-(7) принимают вид

$$\frac{1}{2}w(P_i)=\iint_S v(P_i,\bar{Q})q(\bar{Q})dS-$$
$$-\sum_{j=1}^{N}\left[w(P_i)\int_{G_j}K_n(P_i,Q_j)dG_j-\right.$$
$$-\frac{\partial w(P_i)}{\partial n}\int_{G_j}M_n(P_i,Q_j)dG_j+ \tag{8}$$
$$+M_n(P_i)\int_{G_j}\frac{\partial v(P_i,Q_j)}{\partial n}dG_j-$$
$$\left.-K_n(P_i)\int_{G_j}v(P_i,Q_j)dG_j\right],\quad i=1...N;$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial w(P_i)}{\partial n_P}=\iint_S\frac{\partial v(P_i,\bar{Q})}{\partial n_P}q(\bar{Q})dS-$$
$$-\sum_{j=1}^{N}\left[w(P_i)\int_{G_j}\frac{\partial K_n(P_i,Q_j)}{\partial n_P}dG_j-\right.$$
$$-\frac{\partial w(P_i)}{\partial n}\int_{G_j}\frac{\partial M_n(P_i,Q_j)}{\partial n_P}dG_j+$$
$$+M_n(P_i)\int_{G_j}\frac{\partial^2 v(P_i,Q_j)}{\partial n\partial n_P}dG_j-$$
$$\left.-K_n(P_i)\int_{G_j}\frac{\partial v(P_i,Q_j)}{\partial n_P}dG_j\right],\quad i=1...N.$$

Здесь $M_n(P_i,Q_j)=M_n(v(P_i,Q_j))$, $M_n(P_i)=M_n(w(P_i))$, $K_n(P_i,Q_j)=K_n(v(P_i,Q_j))$, $K_n(P_i)=K_n(w(P_i))$. Переменная точка $Q_j=Q_j(x_j,y_j)$ располагается на граничном элементе G_j.

Равенства (8) представляют собой систему $2N$ линейных уравнений относительно $2N$ неизвестных граничных величин в точках $P_i, i=1...N$. Схематически ее можно представить в виде:

$$\begin{cases}a_{ij}x_i+b_{ij}y_i=\alpha_i,\\ c_{ij}x_i+d_{ij}y_i=\beta_i.\end{cases} \tag{9}$$

Здесь $i,j=1\ldots N$. Коэффициенты системы (9) зависят от вида граничных условий. Например, для защемленной границы

$$x_i=M_n(P_i),\ \ y_i=K_n(P_i),$$
$$a_{ij}=\int_{G_j}\frac{\partial v(P_i,Q_j)}{\partial n}dG_j,\ \ b_{ij}=-\int_{G_j}v(P_i,Q_j)dG_j,$$
$$c_{ij}=\int_{G_j}\frac{\partial^2 v(P_i,Q_j)}{\partial n\partial n_P}dG_j,\ \ d_{ij}=\int_{G_j}\frac{\partial v(P_i,Q_j)}{\partial n_P}dG_j,$$
$$\alpha_i=\iint_S v(P_i,\bar{Q})q(\bar{Q})dS,\ \ \beta_i=\iint_S\frac{\partial v(P_i,\bar{Q})}{\partial n_P}q(\bar{Q})dS.$$

Таким образом, коэффициенты системы (9) выражаются через фундаментальное решение v уравнения (1) и ее производные. Функция V известна [5] и имеет вид

$$v=-\frac{1}{8D\lambda^2}\left[Y_0(\lambda r)+\frac{2}{\pi}K_0(\lambda r)\right], \tag{10}$$

где $Y_0(x)$ и $K_0(x)$ - функции Вебера и Макдональда; $r=|P-Q|$ - расстояние между точками P и Q.

При $i\neq j$ коэффициенты $a_{ij},...,d_{ij}$ системы (9) вычисляются по квадратурной формуле Симпсона. При этом можно использовать степенные аппроксимации функций $Y_0(x)$ и $K_0(x)$, приведенные в [5]. При $i=j$ интегралы имеют особенности при стремлении точки Q_j к точке P_i, т.е. при

$r = r_{ij} = \left| P_i - Q_j \right| \to 0$, т.к. при $r \to 0$ получаем $v \approx r^2 \ln r \to 0$. Следовательно, в данном случае необходимо аналитическое вычисление с использованием понятий «главное значение» и «конечная часть» несобственных интегралов».

Правые части α_i и β_i системы (9) вычисляются путем многоугольника, ограниченного замкнутой ломаной $G_i - ... - G_N$ на треугольники с дальнейшим использованием любой достаточно точной кубатурной формулы для треугольной области.

<u>Численный пример.</u> Рассмотрим круглую защемленную пластинку, в центре которой действует сосредоточенная нагрузка $P_l = P\sin(\omega t)$. Эта задача имеет точное аналитическое решение [5]. Возьмем радиус пластины $R=10$. Прогибы пластины для точек, лежащих на концентрической окружности радиуса $r=4$ вычислялись аналитически и по методу граничных элементов при частотном параметре $\lambda = 0,4$. Получились следующие результаты: $w = -0,815$ - точное решение, $w = -0,845$ - решение по МГЭ. Относительная ошибка составляет 4,5 %.

ВЫВОДЫ

Представлена численная реализация метода граничных элементов для задачи о вынужденных гармонических колебаниях тонкой пластины. Сравнение численного решения с аналитическим для защемленной круглой центрально нагруженной пластины показывает, что совпадение достаточно хорошее.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир. - 1984. – С. 494.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубелл Л. Методы граничных элементов в механике твердого тела. - М.: Мир. - 1987. – С. 328.
3. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. – Казань. - 1986. – С. 379.
4. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности решаемые в бесселевых функциях.- М.: Физматгиз. - 1960. – С. 450.
5. Абрамовиц П., Стиган Р. Справочник по специальным функциям.- М.:- Наука. - 1979. – С. 820.

УДК 539.3

Босяков С.М., Скляр О.Н.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В УПРУГОМ ТЕЛЕ С ТРЕМЯ МАТЕРИАЛЬНЫМИ ПОСТОЯННЫМИ

Исследования волновых процессов в упругих средах представляют собой одну из основных задач механики деформируемого твердого тела. Интерес к этой области динамики сплошной среды связан как с теоретическими исследованиями, так и с большими возможностями их технических применений [1]. К этим вопросам примыкают работы Ф.И. Федорова [2] и Г.И. Петрашеня [3], где особое место занимает построение и исследование различного рода волновых поверхностей, а также их сечений. Это позволяет определить ряд важных с практической точки зрения характеристик волны, например, ее групповую скорость [3]. Анализ выше упомянутых работ показывает, что для изучения особенностей распространения квазипоперечных и квазипродольных упругих волн является целесообразным применение методов общей теории характеристик [3, 4], математический аппарат которой позволяет провести полное исследование динамических процессов в анизотропной среде.

Рассмотрим упругие тела, характеризующиеся тремя материальными постоянными. К таким материалам относятся, например, алмазы, стеклопластики, а также большинство металлов, используемых в промышленности. Уравнения движения кубически анизотропной среды запишем в следующем виде [1, 5]:

$$\begin{aligned}&\left(A_4\Delta - \left(A_1 - A_2 - 2A_4\right)\partial_i^2\right)u_i + \\ &+\left(A_2 + A_4\right)\partial_i\sum_{k=1}^{3}\partial_k u_k + X_i = \rho\ddot{u}_i\end{aligned}, \qquad (1)$$

где A_1, A_2, A_4 - упругие постоянные, Δ - оператор Лапласа, $\vec{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right)$ - вектор перемещения, X_i - массовые силы, ρ - плотность, $\ddot{u}_i = \dfrac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}, i = \overline{1,3}$.

Характеристическое уравнение для системы уравнений (1) с начальными данными на поверхности $Z\left(t, x_1, x_2, x_3\right) = const$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\left(A_4 - \rho V^2\right)^3 + (A_1 + A_4)\left(A_4 - \rho V^2\right)^2 + \\ &+(A_1 + A_2)(A_1 - A_2 - 2A_4)\left(A_4 - \rho V^2\right)\times \\ &\times(\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3 + \cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_3) + \\ &+(A_1 - A_2 - 2A_4)^2(A_1 + A_4 + 2A_2)\times \\ &\times\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2\cos^2\alpha_3 = 0\end{aligned}.$$

Здесь V – фазовая скорость распространения поверхности разрыва, $\cos\alpha_i$ - направляющие косинусы волновой нормали, $i = \overline{1,3}$. В виду того, что это уравнение не разрешимо в аналитическом виде [6], анализ распространения поверхностей разрыва целесообразно проводить в отдельных плоскостях кубически анизотропного тела [1]. В качестве таких плоскостей выделяют плоскость грани куба ($x_i = 0, i = \overline{1,3}$)

Босяков Сергей Михайлович. *Ассистент каф. сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.
Скляр О.Н. *К. ф.-м. н., доцент каф. теоретической механики Белорусской государственной политехнической академии.*
Беларусь, БГПА, 220027, г. Минск, пр. Ф. Скорины 65.