$$p = -\sigma_{rr}(R) = \frac{E\alpha_2}{1-\nu}\frac{1}{R^2}\int_c^R T_2(x)\,x\,dx +$$

$$+\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{D_2R - D_1c}{(1-2\nu)(R^2-c^2)} - \frac{c(D_1R - D_2c)}{R(R^2-c^2)}\right]. \quad (22)$$

Из выражений (20)-(22) следует, что полученное решение зависит от распределений температуры в цилиндре и в трубе, для определения которых необходимо рассмотреть задачу теплопроводности для термоупругой системы цилиндр-труба.

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При формулировании задачи теплопроводности будем предполагать, что на площадке контакта образуется тепло, возникшее в результате преобразования работы сил трения в тепловую энергию. Генерируемое тепло разделяется на два тепловых потока q_2 и q_3, нагревающих соответственно цилиндр и трубу. Предполагаем, что интенсивность теплообразования равняется мощности сил трения

$$q_2 + q_3 = V_b\tau = fV_bp. \quad (23)$$

Принимаем, что тепловой контакт между слоями цилиндра является идеальным, а тепловой контакт между цилиндром и трубой - неидеальным, считая при этом, что разница тепловых потоков q_2 и q_3 пропорциональна разности температур контактирующих поверхностей

$$q_2 - q_3 = \hat{\alpha}_1\left(\hat{T}_3 - T_2\right), \quad (24)$$

где $\hat{\alpha}_1$ - термическая проницаемость промежуточного слоя малой толщины, возникшего в области контакта. Принимаем также, что распределение температуры на внешней поверхности цилиндра является равномерным, что отражено в зависимости (24) ($\hat{T}_2 = T_2$). Между внешней боковой поверхностью трубы и внешней средой происходит теплообмен согласно закону Ньютона.

При принятых предположениях задача теплопроводности сводится к следующей задаче математической физики [8]:

- нестационарные уравнения теплопроводности для внутреннего и внешнего слоя цилиндра

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_i}{\partial r}\right) = \frac{1}{a_i}\frac{\partial T_i}{\partial t}\;, \quad i = 1,2\,; \quad (25)$$

- квазистационарное уравнение теплопроводности для трубы

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T_3}{\partial r}\right) = \frac{V(t)}{a_3}\frac{\partial T_3}{\partial z}\;; \quad (26)$$

- условия идеального термического контакта между слоями цилиндра

$$T_1 = T_2\;,\; \lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial r}\;,\quad r = c\,; \quad (27)$$

- условия неидеального термического контакта между цилиндром и трубой

$$\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial r} - \lambda_3\frac{\partial \hat{T}_3}{\partial r} = fV_bp\;, \quad (28)$$

$$\lambda_2\frac{\partial T_2}{\partial r} + \lambda_3\frac{\partial \hat{T}_3}{\partial r} + \hat{\alpha}_1\left(T_2 - \hat{T}_3\right) = 0\;,\; r = R;$$

- условия теплообмена между трубой и внешней средой

$$\lambda_3\frac{\partial T_3}{\partial r} = \hat{\alpha}_2\left(T_s - T_3\right),\quad r = R + h\,; \quad (29)$$

- начальные условия

$$T_1 = T_2 = T_0^{(1)},\; T_3 = T_0^{(3)},\quad t = 0\,, \quad (30)$$

где $\lambda_i,\ a_i,\ i = 1,2,3$ - соответственно коэффициенты теплопроводности и температуропроводности для материалов слоёв цилиндра и трубы соответственно; $\hat{\alpha}_2$ - коэффициент теплообмена между трубой и внешней средой, h – толщина трубы, T_S - температура среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения (6), (7), (22), (25)-(26), граничные и начальные условия (27)-(30) составляют замкнутую систему зависимостей для определения неизвестных характеристик термоупругой системы цилиндр-труба. Решение полученных уравнений позволит определить состояние рассматриваемой термоупругой системы в момент вылета цилиндра из трубы. Анализ характеристик этого состояния позволит определить механизм расслоения слоёв цилиндра.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hamilton G.M., Goodman L.E. (1966), The stress field created by circular sliding contact, Trans ASME, J. of Appl. Mech., Ser. E., 33, P. 371-376.
2. Kuznetsov Ye.A., Gorokhovsky G.A. (1981),Effect of tangential load on the stressed state of rubbing rough bodies, Wear, 73, P. 49-59.
3. Johnson K.L. (1987), Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.
4. Barber J.R. (1976), Some thermoelastic contact problems involving frictional heating, Q.J.Mech. Appl., 29, P. 1-13.
5. Barber J.R. (1975), Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space, Wear, 35, No 2, P. 283-289.
6. Yevtushenko A.A., Kulchytsky -Zhyhailo R.D. (1996), Two axi-symmetrical contact problems with the steady-state frictional heating, J.Theoret. Appl. Mech., 34, P. 767-779.
7. Timoshenko S., Goodier J.N. (1951), Theory of elasticity, McGraw-Hill, New York.
8. Nowacki W. (1986): Thermoelasticity, PWN – Pergamon Press, Warszawa.

УДК 539.3

Босяков С.М.

АНАЛИЗ ЭФФЕКТОВ СВЯЗАННОСТИ ТЕПЛОВОГО И МЕХАНИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Введение. Результаты исследования закономерностей распространения термоупругих волн в кубически анизотропных средах с учетом релаксации теплового потока на базе классического метода отражены [1-3]. В частности, в [3] выведены уравнения движения кубически анизотропной среды в напряжениях в условиях плоской деформации, изучены зави-

Босяков Сергей Михайлович, *к.т.н., доцент каф. теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета.*
Беларусь, БГУ, г. Минск.

симости лучевых скоростей от угла наклона нормали к характеристической поверхности, а также проведен сравнительный анализ фронтов упругих и термоупругих волн. В данной работе представлены результаты исследования эффектов связанности теплового и механического полей в двумерных и трехмерных динамических задачах теории термоупругости кубически анизотропной среды.

Коэффициенты связанности. Трехмерную систему уравнений движения кубически анизотропного тела в отсутствие массовых сил запишем в следующем виде [2]:

$$\left(A_1+2A_2\right)\left(A_4\Delta_3\sigma_{ii}+\varepsilon\partial_i^2\sigma_{ii}-\rho\ddot{\sigma}_{ii}\right)-A_2\left(A_4\Delta_3\sigma_{kk}-\rho\ddot{\sigma}_{kk}\right)+$$
$$+\left(A_1+A_2\right)A_4\partial_i^2\sigma_{kk}+\left(A_1-A_2\right)A_4\beta\left(\Delta_3T+\partial_i^2T-\bar{\rho}\ddot{T}\right)=0,$$
$$\left(A_1-A_2\right)\left(A_1+2A_2\right)\left(A_4\Delta_3\sigma_{ij}-\rho\ddot{\sigma}_{ij}\right)+$$
$$+\varepsilon A_4\left(A_1+2A_2\right)\partial_i\partial_j\left(\sigma_{ii}+\sigma_{jj}\right)+$$
$$+2\left(A_1+A_2\right)A_4^2\partial_i\partial_j\sigma_{kk}+2\left(A_1-A_2\right)A_2^2\beta\partial_i\partial_jT=0,$$
$$K\Delta_3T-\left(\dot{T}+\tau\ddot{T}\right)\left(c_v+3\alpha_T^2T_0\left(A_1+2A_2\right)\right)=T_0\alpha_T\left(\dot{\sigma}_{kk}+\tau\ddot{\sigma}_{kk}\right),$$

где A_1, A_2, A_4 - постоянные упругости, $\varepsilon=A_1-A_2-2A_4$, β - константа, связывающая тепловые и механические напряжения, $\beta=\alpha_T\left(A_1+2A_2\right)$, α_T - коэффициент линейного теплового расширения, T - абсолютная температура, $\Delta_3=\partial_k^2$, K - коэффициент теплопроводности, c_v - удельная теплоемкость при постоянной деформации, τ - время релаксации теплового потока, T_0 - начальная температура, точка - дифференцирование по времени, по индексу $k=\overline{1,3}$ ведется суммирование, $\partial_k=\partial/\partial x_k$, $i\neq j=\overline{1,3}$.

Уравнение характеристической поверхности $Z\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=0$ для системы (1) [3] запишем, используя обозначения [4-6]:

$$det\left\|\omega_{kl}\right\|_{k,l=\overline{1,7}}=0. \qquad (2)$$

Компоненты определителя (2) имеют следующий вид:

$$\omega_{ii}=\left(1+b^2\right)\left(a^2-v^2\right)+\left(1-2a^2b^2-3b^4\right)n_i^2,$$
$$\omega_{ij}=a^2\left(1+b^2\right)n_i^2-b^2\left(a^2-v^2\right),$$
$$\omega_{i7}=\beta\left(1-b^2\right)\left(a^2\left(1+n_i^2\right)-v^2\right),$$
$$\omega_{41}=\omega_{42}=a^2\left(1+b^2-2b^2\left(b^2+a^2\right)\right)n_1n_2,$$
$$\omega_{43}=2a^4\left(1+b^2\right)n_1n_2,$$
$$\omega_{51}=\omega_{53}=a^2\left(1+b^2-2b^2\left(b^2+a^2\right)\right)n_1n_3,$$
$$\omega_{52}=2a^4\left(1+b^2\right)n_1n_3,$$
$$\omega_{62}=\omega_{63}=a^2\left(1+b^2-2b^2\left(b^2+a^2\right)\right)n_2n_3,$$
$$\omega_{61}=2a^4\left(1+b^2\right)n_2n_3,\quad \omega_{47}=2a^4\left(1-b^2\right)n_1n_2,$$
$$\omega_{57}=2a^4\left(1-b^2\right)n_1n_3,\quad \omega_{67}=2a^4\left(1-b^2\right)n_2n_3,$$
$$\omega_{7i}=-\varepsilon_3n_*v^2,\quad \omega_{77}=1-n_*\left(1+\varepsilon_3\right)v^2,\quad i\neq j=\overline{1,3},$$

остальные компоненты определителя (2) равны нулю. Здесь $a=A_4/A_1$, $b=A_2/A_1$, $n_*=\tau\omega_*$ - характерное число колебаний, $\omega_*=c_vA_1/K\rho$ - характерная величина, имеющая размерность частоты, $\varepsilon_3=3\alpha_T^2T_0\left(A_1+2A_2\right)/c_v$ - безразмерный коэффициент связанности в трехмерной динамической задаче термоупругости кубически анизотропной среды, $v=V/c_1$ - безразмерная скорость распространения волны ($V=-p_0/g$ - скорость распространения поверхности характеристик по направлению нормали к поверхности, $c_1=\sqrt{A_1/\rho}$ - максимальная скорость распространения квазипродольной волны), $n_i=\cos\alpha_i=p_i/g$ - направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности, $p_i=\dfrac{\partial Z}{\partial x_i}$, $p_0=\dfrac{\partial Z}{\partial t}$, $g^2=p_k^2$, $i=\overline{1,3}$.

Таблица 1. Значения термомеханических параметров

Материал	Постоянные упругости, ГПа			α_T, град$^{-1}$	K, Вт/м·град	c_v, кДж/м^3·град
	A_1	A_2	A_3			
серебро	12.4	9.34	4.61	19.0×10^{-6}	418	2454
свинец	4.66	3.92	1.44	28.4×10^{-6}	35	1458
молибден	46	17.6	11.0	5.0×10^{-6}	162	2188
алюминий	10.82	6.13	2.85	22.6×10^{-6}	208	2370
золото	18.6	15.7	4.20	14.0×10^{-6}	310	2451
медь	16.84	12.14	7.54	16.61×10^{-6}	410	3377
никель	24.65	14.73	12.47	12.55×10^{-6}	83	3919

Таблица 2. Значения характеристических частот и коэффициентов связанности

Материал	ω_*, 1/с	ε_3	ε_2	ε_1
серебро	6.93×10^{10}	0.0402	0.0383	0.0336
свинец	1.71×10^{11}	0.0609	0.0590	0.0544
молибден	6.90×10^{11}	0.0082	0.0069	0.0048
алюминий	4.57×10^{11}	0.0437	0.0397	0.0311
золото	7.62×10^{10}	0.0352	0.0342	0.0315
медь	1.55×10^{11}	0.0295	0.0279	0.0240
никель	1.33×10^{12}	0.0191	0.0175	0.0140

Значения коэффициента связанности ε_3 при температуре T_0 =293 *К* представлены в табл. 2 (материальные константы, необходимые для расчета, взяты из табл. 1 [7-9]).

Система уравнений движения кубически анизотропной среды в условиях плоской деформации (при $e_{33}=0$) имеет следующий вид [2, 3]:

$$\begin{aligned}
&A_1\left(A_4\Delta\sigma_{11}-\rho\ddot{\sigma}_{11}\right)+\left(A_1+A_2\right)\varepsilon\partial_1^2\sigma_{11}-\\
&-A_2\left(A_4\Delta\sigma_{22}-\rho\ddot{\sigma}_{22}\right)+A_4\left(A_1+A_2\right)\partial_1^2\sigma_{22}+\\
&+\beta\left(A_1-A_2\right)\left(A_4\Delta T-\rho\ddot{T}\right)=0,\\
&A_4\Delta\sigma_{12}-\rho\ddot{\sigma}_{12}+A_4\partial_1\partial_2\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}\right)=0,\\
&A_1\left(A_4\Delta\sigma_{22}-\rho\ddot{\sigma}_{22}\right)+\left(A_1+A_2\right)\varepsilon\partial_2^2\sigma_{22}-\\
&-A_2\left(A_4\Delta\sigma_{11}-\rho\ddot{\sigma}_{11}\right)+A_4\left(A_1+A_2\right)\partial_2^2\sigma_{11}+\\
&+\beta\left(A_1-A_2\right)\left(A_4\Delta T-\rho\ddot{T}\right)=0,\\
&K\Delta T-\left(\dot{T}+\tau\ddot{T}\right)\left(c_v+\frac{2\beta^2T_0}{A_1+A_2}\right)=\\
&=\frac{\beta T_0}{A_1+A_2}\left(\dot{\sigma}_{11}+\dot{\sigma}_{22}+\tau\left(\ddot{\sigma}_{11}+\ddot{\sigma}_{22}\right)\right).
\end{aligned}\qquad(3)$$

Следуя [3], получим следующее уравнение первого порядка, которому удовлетворяет характеристическая поверхность $Z\left(t,x_1,x_2,x_3\right)=0$ системы (3): (4),

$$\begin{vmatrix}
\begin{matrix}a^2-v^2+\left(1+b^2\right)\times\\ \times\left(1-b^2-a^2\right)n_1^2,\end{matrix} & \begin{matrix}-b^2\left(a^2-v^2\right)+\\ +a^2\left(1+b^2\right)n_1^2,\end{matrix} & 0, & \left(1-b^2\right)\left(a^2-v^2\right);\\
\begin{matrix}-b^2\left(a^2-v^2\right)+\\ +a^2\left(1+b^2\right)n_2^2,\end{matrix} & \begin{matrix}a^2-v^2+\left(1+b^2\right)\times\\ \times\left(1-b^2-2a^2\right)n_2^2,\end{matrix} & 0, & \left(1-b^2\right)\left(a^2-v^2\right);\\
a^2n_1n_2, & a^2n_1n_2, & a^2-v^2, & 0;\\
-\varepsilon_2n_*v^2/2, & -\varepsilon_2n_*v^2/2, & 0, & 1-n_*v^2\left(1+\varepsilon_2\right);
\end{vmatrix}=0,\qquad(4)$$

где $\varepsilon_2=2\beta^2T_0\big/\left(A_1+A_2\right)c_v$ - коэффициент связанности полей температур и деформаций в двумерной динамической задаче кубически анизотропного тела в напряжениях. Заметим, что в случае одномерных движений коэффициент связанности как в динамической задаче, сформулированной в напряжениях, так и в перемещениях [5, 6] имеет один и тот же вид $\varepsilon_1=\beta^2T_0\big/c_vA_1$. Значения ε_2 и ε_1 для некоторых кубически анизотропных материалов, рассчитанные по числовым данным [7-9] приведены в табл. 2 (T_0 =293 *К*).

Анализ коэффициентов связанности $\varepsilon_i, i=\overline{1,3}$ показывает, что для каждого материала ε_i в задачах разной размерности различны и с возрастанием размерности задачи также возрастают, причем ε_3 может превышать ε_1 на 10% $\div$ 40%.

Решение уравнения характеристик. Раскроем определитель (4). В результате получим:

$$v^6B+v^4B_1+v^2B_2+B_3=0\,,\qquad(5)$$

где $B=n_*$, $B_1=-\left(2+n\left(2\left(1+a^2\right)+\varepsilon_2\left(1+b^2\right)\right)\right)\Big/2$,

$$\begin{aligned}
B_2=&\left(8+n\left(1+\varepsilon_2\right)\left(1-b^4\right)+\right.\\
&+2a^2\left(4+n\left(3+b^2\left(\varepsilon_2-1\right)+\varepsilon_2\right)\right)+\\
&\left.+n\left(1+b^2\right)\left(b^2+2a^2-1\right)\left(1+\varepsilon_2\right)\cos4\alpha\right)\Big/8,
\end{aligned}$$

$$B_3=-\left(1-b^4-2a^2\left(b^2-3\right)+\left(1+b^2\right)\left(b^2+2a^2-1\right)\cos4\alpha\right)\Big/8.$$

Для решения уравнения (5) введем следующую замену $p=-B_1^2\big/3B^2+B_2/B$,

$q=2B_1^3\big/27B^3-B_1B_2\big/3B^2+B_3/B$.

Тогда (5) запишется в виде

$$v^6+pv^2+q=0.$$

Отсюда на основании известных формул для корней приведенного кубического уравнения с неположительным дискриминантом [10] получим

$$v_k=\sqrt{-\frac{B_1}{3B}+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\Lambda+2\pi k\right)\right)},$$

$$\Lambda=\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\right)\quad k=\overline{1,3}\qquad(6)$$

В выражениях (6) индекс $k=1$ соответствует модифицированной квазипоперечной волне, $k=2$ - модифицированной квазипродольной волне, $k=3$ - модифицированной тепловой волне. На рис. 1 представлены зависимости скоростей v_2 и v_3 для свинца от безразмерного параметра n_* для разных углов нормали к характеристической поверхности (числовые данные взяты из таблицы).

Скорость v_2 при $n_*<0.1$ приближенно равна скорости распространения упругой продольной волны c_1, с увеличением параметра n_* до 1.5 скорость v_2 уменьшается на 20%. Влияние угла наклона нормали на скорость распространения фронта модифицированной квазипродольной волны наиболее существенно при $n_*<0.1$ и составляет $\approx$3%. Скорость распространения модифицированной тепловой волны v_3 при $n_*<1$ стремится в бесконечность, если $n_*>1$, то скорость v_3 близка к скорости распространения упругой продольной волны, отличие между значениями v_3 для разных значений углов α более заметно также при $n_* > 1$. Скорость v_1 при изменении n_* остается постоянной независимо от угла наклона нормали к характеристической поверхности. Зависимости скоростей v_2 и v_3 для свинца от угла наклона нормали к характеристической поверхности представлены на рис. 2.

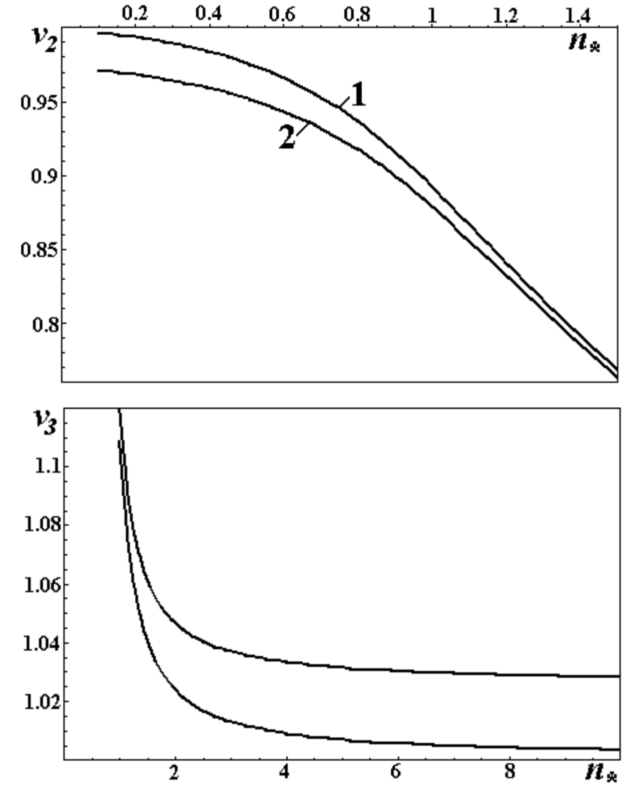

Рис. 1. Зависимости безразмерных скоростей v_2 и v_3 от параметра n_* для разных углов наклона нормали к характеристической поверхности: 1 – $\alpha = 0$, 2 – $\alpha = \pi/4$.

Чтобы оценить влияние взаимосвязи механического и теплового полей на распространение термоупругих волн, запишем выражения для скоростей распространения упругих и тепловой волн в плоскости $x_3 = 0$ [11]:

$$U_{1,2} = \sqrt{\left(A_1 + A_4 \mp \Omega\right)/2\rho},$$

$$\Omega = \sqrt{\left(A_1 - A_2\right)^2 - 2\varepsilon\left(A_1 + A_2\right) n_1^2 n_2^2}, \tag{7}$$

$$U_T = c_1 / \sqrt{n_*}, \tag{8}$$

где $U_{1,2}$ - скорости распространения упругих квазипоперечной и квазипродольной волн, U_T - скорость распространения тепловой волны.

На рис. 3 показаны зависимости отношений V_2/U_2 и V_3/U_T от безразмерного параметра n_* для свинца (ρ =11342 кг/м^3) при различных углах α.

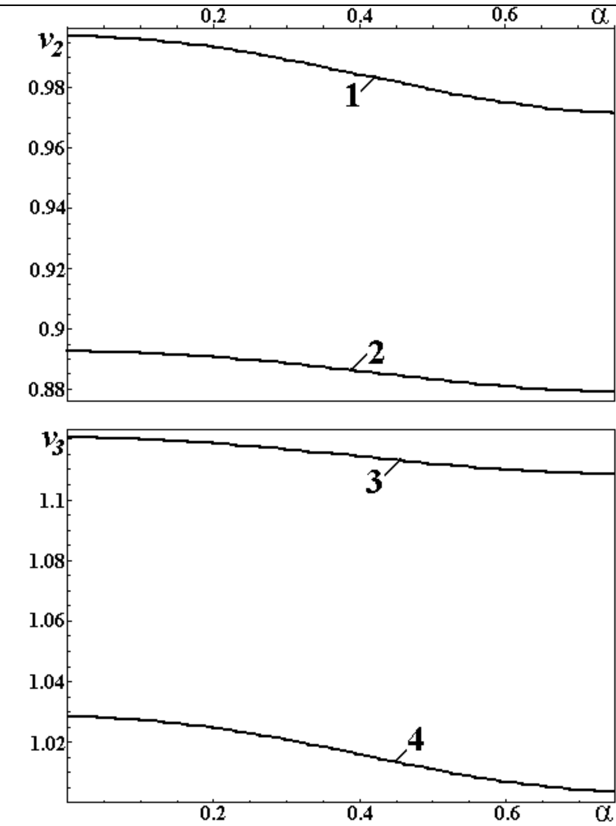

Рис. 2. Зависимости безразмерных скоростей v_2 и v_3 от угла наклона нормали к характеристической поверхности α для разных значений параметра n_*: 1 – $n_* = 0.1$, 2, 3 – $n_* = 1$, 4 – $n_* = 10$.

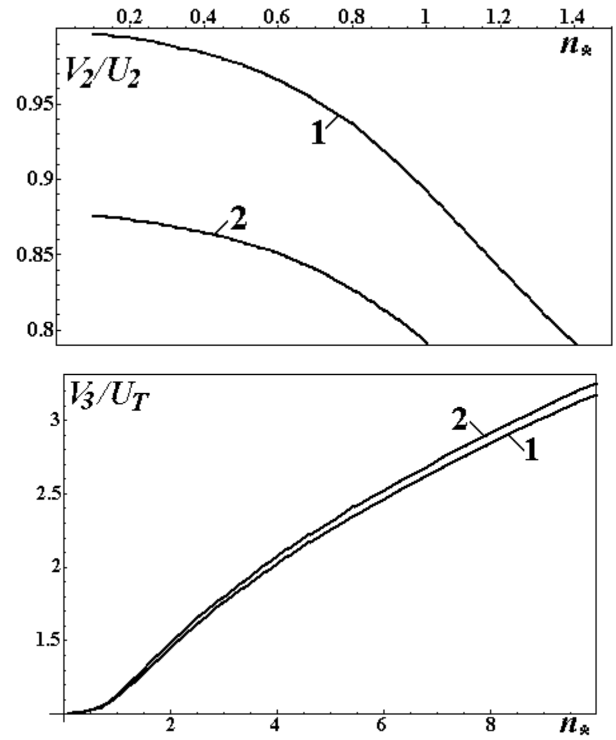

Рис. 3. Зависимости отношений V_2/U_2 и V_3/U_T от безразмерного параметра n_* при различных углах α: 1 – $\alpha = 0$, 2 – $\alpha = \pi/4$.

Скорость распространения модифицированной упругой волны V_2 меньше скорости распространения упругой квазипродольной волны U_2 и с возрастанием параметра n_* значения V_2 резко уменьшаются по сравнению с U_2., причем значительное влияние на отношение V_2/U_2 оказывает угол α. Так, если при $\alpha = 0$ отличие между ними менее 1%, то при $\alpha = \pi/4$ скорость U_2 превышает V_2 на 12% ($n_* = 0.1$).

Из поведения функции V_3/U_T следует, что скорость модифицированной тепловой волны превышает скорость тепловой волны и с увеличением n_* отношение скоростей V_3/U_T также возрастает. Угол наклона нормали к характеристической поверхности не оказывает заметного влияния на значения V_3/U_T, т. е. скорость модифицированной тепловой волны практически не зависит от α.

Лучевая скорость распространения термоупругих волн. Найдем лучевую скорость распространения волны

$$R = \sqrt{\left(\frac{\partial p_0}{\partial p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_0}{\partial p_2}\right)^2}. \qquad (9)$$

Для этого уравнение (5) запишем в следующем виде:

$$p_0^6 \bar{B} + p_0^4 \bar{B}_1 + p_0^2 \bar{B}_2 + \bar{B}_3 = 0, \qquad (10)$$

где $B = n_*/c_1^6$,

$$\bar{B}_1 = -g^2\left(2 + n_*\left(2\left(1+a^2\right) + \varepsilon_2\left(1+b^2\right)\right)\right)\Big/2c_1^4,$$

$$\bar{B}_2 = \Big(\left(p_1^2 + p_1^2\right)\times$$

$$\times\left(2 + a^2\left(2\left(n_*+1\right) + n_*\varepsilon_2\left(1+b^2\right)\right)\right) +$$

$$+2p_1^2p_2^2\left(2 + n_*\left(1+\varepsilon_2\left(1-b^4\right)\right) - a^2\left(n_*\left(\varepsilon_2 +\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+b^2\left(2+\varepsilon_2\right)\right) - 2\right)\right)\Big/2c_1^2,$$

$$\bar{B}_3 = -g^2\left(a^2\left(p_1^4 + p_2^4\right) + \left(1 - 2a^2b^2 - b^4\right)p_1^2p_2^2\right).$$

Из (10) вытекает:

$$\frac{p_0^{(k)}}{c_1} = \sqrt{-\frac{\bar{B}_1}{3\bar{B}} + 2\sqrt{-\frac{\bar{p}}{3}}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\bar{\Lambda} + 2\pi k\right)\right)},$$

$$\bar{\Lambda} = \arccos\left(-\frac{\bar{q}}{2}\sqrt{-\left(\frac{3}{\bar{p}}\right)^3}\right), \qquad (11)$$

где $\bar{p} = -\bar{B}_1^2/3\bar{B}^2 + \bar{B}_2/\bar{B}$,

$\bar{q} = 2\bar{B}_1^3/27\bar{B}^3 - \bar{B}_1\bar{B}_2/3\bar{B}^2 + \bar{B}_3/\bar{B}$ - коэффициенты приведенного кубического уравнения, $k = \overline{1,3}$.

Дифференцируя (11) по p_1 и p_2, получим

$$\frac{1}{c_1}\frac{\partial p_0^{(k)}}{\partial p_i} = \frac{-1}{2V_k}\left(\frac{d_1}{3B} + \left(\frac{1}{\sqrt{-3p}}\cos\left(\frac{1}{3}\left(\Lambda + 2\pi k\right)\right)\times\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{-2B_1d_1}{3B^2} + \frac{d_2}{B}\right) + +\frac{1}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\sin\left(\frac{1}{3}\left(\Lambda + 2\pi k\right)\right)\times$$

$$\times\frac{\sqrt{4p^3}}{\sqrt{4p^3 - 27q^2}}\left(\sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3}\left(\frac{6B_1^2d_1}{27B^3} - \frac{B_2d_1 + B_1d_2}{3B^2} + \frac{d_3}{B}\right) +\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{9\sqrt{3}q}{2}\left(\frac{-2B_1d_1}{3B^2} + \frac{d_2}{B}\right)\right)\right), \qquad (12)$$

где $d_1 = -2n_i\left(2 + n_*\left(2\left(1+a^2\right) + \varepsilon_2\left(1+b^2\right)\right)\right)$,

$$d_2 = n_i\left(2 + a^2\left(2\left(n_*+1\right) + n_*\varepsilon_2\left(1+b^2\right)\right)\right) +$$

$$+2n_in_j^2\left(2 + n_*\left(1 + \varepsilon_2\left(1-b^4\right)\right)\right),$$

$$d_3 = -2n_i\left(a^2\left(n_1^4 + n_2^4\right) + \left(1 - 2a^2b^2 - b^4\right)n_1^2n_2^2 +\right.$$

$$\left.+2a^2n_i^2 + \left(1 - 2a^2b^2 - b^4\right)n_j^2\right),$$

$n_1 = \cos\alpha$, $n_2 = \sin\alpha$, $i \neq j = 1,2$.

Подставляя (12) в (9), получим выражения для безразмерных лучевых скоростей термоупругих волн $r_k = R_k/c_1$, $k = \overline{1,3}$. Зависимости r_2 и r_3 от параметра n_* для свинца и других кубически анизотропных материалов аналогичны зависимостям $v_2(n_*)$ и $v_3(n_*)$ при соответствующих значениях угла α (см. рис. 1). На рис. 4 изображены зависимости R_2/V_2 и R_3/V_3 от угла α для свинца при разных значениях параметра n_*.

Как показывает рис. 4, лучевые скорости R_2 и R_3 распространения термоупругих волн незначительно отличаются от скоростей V_2 и V_3, направленных по нормали к характеристической поверхности. Отношение R_2/V_2 при увеличении параметра n_* уменьшается, при $n_* = 0.1$ скорость R_2 превышает V_2 на 0.12%. Отношение скоростей R_3/V_3 с возрастанием n_* также возрастает.

Исследуем влияние взаимосвязи механического и теплового полей на лучевые скорости распространения термоупругих волн. Выражения для частных производных от p_0 по p_1 и p_2 получим из (7), (8). С учетом $n_i = \cos\alpha_i = p_i/g$, $i = 1,2$ будем иметь:

$$\frac{\partial p_0^{(1,2)}}{\partial p_i} = \frac{n_i\left(A_1 + A_4 \mp \dfrac{\left(A_1 - A_4\right)^2 - \varepsilon\left(A_1 + A_2\right)n_j^2}{\Omega}\right)}{2\rho U_i}, \qquad (14)$$

$$\frac{\partial p_0^{(3)}}{\partial p_i} = \frac{c_1n_i}{\sqrt{n_*}}. \qquad (15)$$

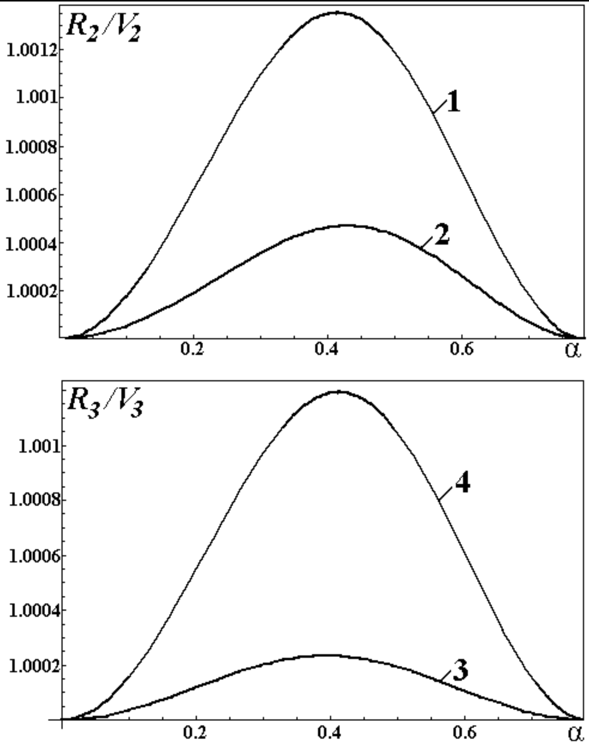

Рис. 4. Зависимости R_2/V_2 и R_3/V_3 от угла наклона нормали к характеристической поверхности α при разных значениях параметра n_*: 1 – $n_* = 0.1$; 2 и 3 – $n_* = 1$; 4 – $n_* = 10$.

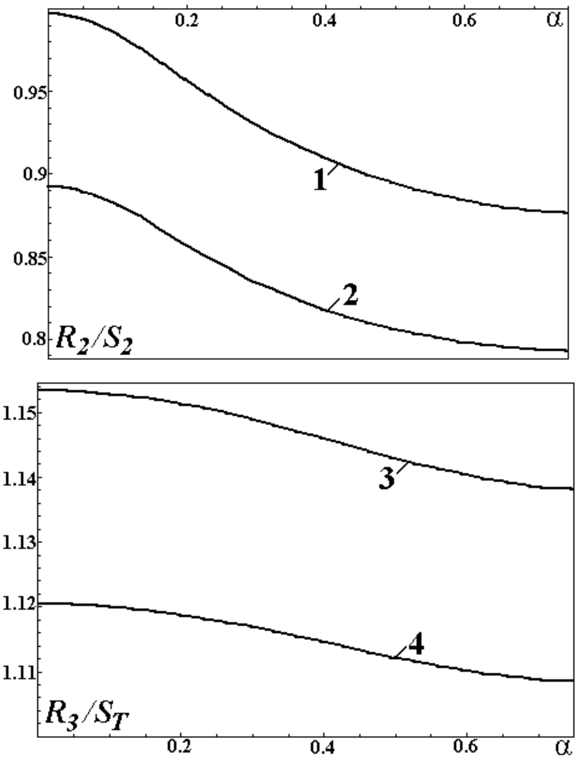

Рис. 5. Зависимости отношений скоростей R_2/S_2 и R_3/S_T от угла α при различных значениях параметра n_*: 1 – $n_* = 0.1$; 2 и 3 – $n_* = 1$; 4 – $n_* = 1.1$.

Отсюда с помощью (9) получим формулы для лучевых скоростей $S_{1,2}$ и S_T упругих квазипоперечной, квазипродольной и тепловой волн. На рис. 5 показаны зависимости отношений лучевых скоростей R_2/S_2 и R_3/S_T от угла α при различных значениях параметра n_*.

Поведение функции R_2/S_2 показывает, что лучевая скорость распространения упругой квазипродольной волны S_2 превышает лучевую скорость распространения термоупругой волны R_2.

Лучевая скорость распространения модифицированной тепловой волны R_3 больше скорости распространения тепловой волны $S_T = V_T$, причем с увеличением параметра n_* отношение R_3/S_T резко возрастает. Так, если при $n_* = 1$ $R_3/S_T \approx 1.12$ (см. рис. 5, $\alpha = 0$), то при $n_* = 10$ $R_3/S_T \approx 3.25$. Отметим также, что изменение угла α мало влияет на значения лучевой скорости R_3, с увеличением n_* зависимость $R_3(\alpha)$ носит все менее выраженный характер.

Заключение. Коэффициенты связанности механического и теплового полей при постановке задаче в напряжениях различны и при возрастании размерности также возрастают. В условиях плоской деформации скорость распространения модифицированной упругой квазипоперечной волны V_1 (а также R_1) в кубически анизотропной среде практически не зависит от безразмерного параметра n_*, поэтому этот тип поверхности разрыва можно считать чисто упругой волной. Волны, распространяющиеся со скоростями $V_{2,3}$ и $R_{2,3}$, являются термоупругими, причем учет эффекта связанности механического и теплового полей приводит к уменьшению скорости V_2 по сравнению со скоростью c_1 и увеличению скорости V_3 квазипродольной волны по сравнению со скоростью распространения тепловых возмущений U_T. Добавим, что представленные выше зависимости могут быть применены для оценки промежутка времени релаксации теплового потока.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф03М—171).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мартыненко М. Д., Босяков С. М. Поверхности сильного разрыва в теории термоупругости кубически анизотропных тел // Вестник Белгосуниверситета. Сер. 1. – 2000, №3. - С. 78—81.
2. Босяков С. М. Уравнения движения кубически анизотропного тела с учетом времени релаксации теплового потока и их анализ с помощью метода характеристик // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2001, № 5 - С. 34—39.
3. Мартыненко М. Д., Босяков С. М. Метод характеристик для динамической термоупругой задачи кубически анизотропного тела в напряжениях // ИФЖ. - 2002. - Т. 75, №3. - С. 84—71.
4. Шашков А. Г., Бубнов В. А., Яновский С. Ю. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. – Минск: Навука і тэхніка, 1993. – 290 с.

5. Sharma J. N., Singh H. Generalized thermoelastic waves in anisotropic media / / J. Acoust. Soc. Am. – 1989. – Vol. 85, № 4. – P. 1407 – 1413.
6. Sharma J. N., Singh H. Propagation of generalized thermoelastic waves in cubic crystals / / Arch. Mech. – 1990. – Vol. 42, № 1. – P. 19—30.
7. Таблицы физических величин. Справочник. Под редакцией И. К. Кикоина. – Москва: Атомиздат, 1976. – 1008 с.
8. Современная кристаллография. Физические свойства кристаллов. – Москва: Наука, 1984. – 584 с.
9. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов / / УФН. – 1961. – Т. 74, № 3. – С. 461—520.
10. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. 2. — Москва: Наука, 1981. – 552 с.
11. Босяков С. М. Метод характеристик в динамических задачах механики деформируемого твердого тела: Автореф. дис. …канд. физ. – мат. наук. Мн.: БГУ, 2002. – 21 с.

УДК 620.179.112(075.8)

Крупич Б.

ВЛИЯНИЕ ДЕФОРМАЦИОННОГО УПРОЧНЕНИЯ НА ГАЗОАБРАЗИВНУЮ ЭРОЗИЮ СТАЛИ 40Х

Введение. Эрозионный износ элементов вентиляционных машин требует от конструкторов соответствующего выбора конструкционных материалов. Скорость эрозии определяется основными тремя факторами: свойства подверженного эрозии материала и материала атакующих частиц; кинетическая энергия частиц; вид среды, в котором происходит процесс. Энергия ударяющей частицы подлежит преобразованию [1] (рис. 1).

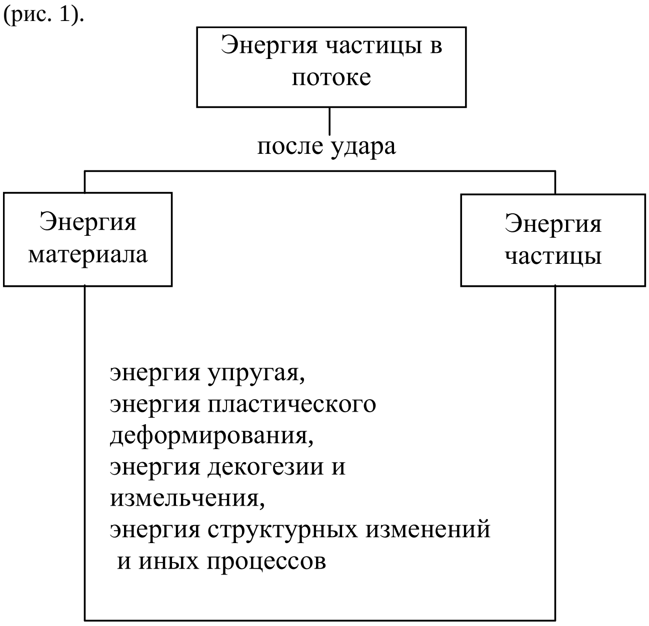

Рис. 1. Схема преобразования энергии частицы.

В заданных условиях эксплуатации известен удельный расход пролетающих частиц $\dot{m}$, определяемый как

$$\dot{m} = \frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{\partial m}{\partial t}\right), \qquad (1)$$

где m – масса частиц в потоке; A – площадь сечения потока; t – время.

Конструктора интересует, прежде всего, интенсивность износа I_v элемента конструкции

$$I_v = \frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t} = \alpha\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}, \qquad (2)$$

где V_z – объем материала как продукт эрозии, h – глубина эрозии, α - коэффициент.

Интенсивность изнашивания I_v является величиной, характерной для данного материала и условий процесса эрозии. Чаще всего она определяется экспериментально.

Критерии эрозионного износа. Критерии возникновения эрозии и ее дальнейшего протекания обсуждаются в работах [2-10]. Финни [2] устанавливает зависимость объема удаленного материала V_z от кинетической энергии частицы, угла падения и удельного сопротивления отрыву.

Биттер [3] подразделяет износ V_z на V_D – связанный с нормальной составляющей скорости к поверхности материала и V_c – соответствующей касательной составляющей скорости. Устанавливает также составляющие скорости, K – нормальной и V_p – касательной, ниже которых не наблюдается эрозионный износ.

Беккманн [4] вводит в рассмотрение удельную энергию среза, которая является отношением работы сил резания к удаленному объему материала. Погодаев [5] предлагает параметр $w^*_{\text{кр}}$, который определяет скорость потока энергии частиц, отнесенной к единице объема удаленного материала.

Филд и Гатчингс [6] используют безразмерный параметр D, который является отношением энергии частицы единичного объема к пределу текучести материала.

Сорокин [7, 8] полагает, что критерий стойкости к абразивному изнашиванию стали должен учитывать одновременно ее прочность и пластические свойства. При анализе процесса абразивного изнашивания большое значение придается растягивающим напряжениям, возникающим во время перемещения углубленной частицы абразива. Величина углубления зависит от твердости материала.

Хачатурян [9] использует модуль пластичности D, вычисляемый на основе данных из опытов на одноосное растяжение, т.е.

$$D = \frac{S_k - \sigma_T}{l_k}, \qquad (3)$$

где S_k – истинное напряжение разрыва; σ_T – предел текучести; l_k – истинные деформации в момент разрушения образца. Чем больше модуль, тем больше стойкость к эрозии.

Петров [10] записывает критерий начала эрозии в виде

$$\int_{t-\tau}^{t} \sigma(s)ds \le \sigma_S\tau, \qquad (4)$$

__Крупич Б.__ Доцент Белостокского технического университета.
Республика Польша, Белосток, ул. Виеска, 45а.