

$$\frac{q_P}{\sigma_{PP} + C_P \left(2 \ln \frac{D_{oP}}{d_{fP}} \right)^{m_P}} = \frac{q_M}{\sigma_{PM} + \left(C_M 2 \ln \frac{D_{oM}}{d_{fM}} \right)^{m_M}} = \frac{W_P \left(\lambda_P, \beta_P, \frac{L_P}{D_{oP}}, \mu_P \right)}{W_M \left(\lambda_M, \beta_M, \frac{L_M}{D_{oM}}, \mu_M \right)} \quad (73)$$

Для иллюстрации разработанного метода рассмотрен процесс осесимметричной экструзии через коническую матрицу. Из [12, 13, 16] выбрано теоретическое выражение для вычисления давления пуансона и после некоторых преобразований оно имеет вид:

$$\frac{q}{\sigma_P} = \frac{1}{m+1} \left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\mu}{\sin 2\beta} \right) C \left(2 \ln \frac{D_o}{D_f} \right)^{m+1} + \mu \frac{L}{D_o} \quad (74)$$

Подставив (74) в (68), получим следующее выражение для безразмерного давления пуансона

$$\left(\frac{q}{\sigma_P} \right)_P = \left(\frac{q}{\sigma_P} \right)_M \frac{C_P \sigma_{PM} (m_M + 1)}{C_M \sigma_{PP} (m_P + 1)} \times \frac{\left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\mu_{1P}}{\sin 2\beta_P} \right) \left(2 \ln \frac{D_{oP}}{d_{fP}} \right)^{m_P + 1} + \mu_{1P} \frac{L_P}{D_{oP}}}{\left(1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \frac{\mu_{1M}}{\sin 2\beta_M} \right) \left(2 \ln \frac{D_{oM}}{d_{fM}} \right)^{m_M + 1} + \mu_{2M} \frac{L_M}{D_{oM}}} \quad (75)$$

В (75) значение давления пуансона в модели $(q/\sigma_P)_M$ определяется из экспериментов.

Переменные $m_M, \sigma_{PM}, \beta_M, L_M, D_{oM}, d_{fM}, m_P, \sigma_{PP}, \beta_P, L_P, D_{oP}$ и d_{fP} – известные параметры зависимостей (4), (65), (70). Геометрические размеры, характеризующие модель и объект, также даны. Отметим, что углы матрицы в модели и объекте могут быть неодинаковы.

УДК 539.3

Пивник Я., Кульчицкий-Жигайло Р.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕСТРУКЦИИ ТЕРМОУПРУГОЙ СИСТЕМЫ

ВВЕДЕНИЕ

Механизм разрушения механической системы существенно зависит от поля напряжений и деформаций, возникающих в процессе эксплуатации элементов системы. Поэтому важным является адекватное математическое моделирование процессов, проходящих в механической системе, позволяющее с высокой степенью точности определить характеристики напряженно-деформированного состояния в элементах системы. В настоящей статье предлагается математическая постановка задачи, моделирующая движение двухслойного цилиндра

вдоль внутренней поверхности трубы. Характерной особенностью работы является учёт влияния термических факторов на распределение напряжений и деформаций в рассматриваемой механической системе. Целью работы есть получение системы соотношений, позволяющих определить напряженно-деформированное состояние во внешнем слое цилиндра в момент вылета его из трубы. Полученные результаты предполагается использовать для анализа возможного механизма разрушения упомянутого слоя.

Таким образом, разработанная методика позволяет оценить значение нагрузки, в рассмотренных процессах экструзии, при любых значениях угла матрицы β_p .

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Theory of Plastic Deformation of Metals, Mashinostroenie, Moscow 1983, Ed. E.P. Unksov.
2. V.L. Kolmogorov. Mechanics of Metal Forming, Metallurgija, Moscow 1986.
3. A.N. Levanov, V.L. Kolmogorov, V.L. Burkin. Contact Friction in Metal-Forming Processes, Metallurgija, Moscow 1976.
4. JG.Ja. Gun. Theory of Metal Forming, Metallurgija, Moscow 1980.
5. G.D. Del. Engineering Technology Mechanics, Mashinostroenie, Moscow 1978.
6. W. Szczepinski. Introduction to the Mechanics of Plastic Forming of Metals, PWN, Warszawa 1979.
7. M. Morawiecki, L. Sadok, E. Wasiek. Metal Forming. Theoretical Foundations, "Slask", Wroclaw 1986.
8. J. Piwnik. Mechanics of Metal Extrusion Processes, Bialystok Technical University, Rozprawy Naukowe 6, Bialystok 1991.
9. J. Piwnik. Modelling of Plastic Flow Processes, Bialystok Technical University, Rozprawy Naukowe 14, Bialystok 1992.
10. J. Piwnik. Analysis of Axially-Symmetric Metal-Forming Processes, Prace IPPT PAN (IFTR Reports), no.44, Warsaw 1985.
11. E.G. Thomson, C.I. Yang, S. Kobayashi. Mechanics of Plastic Deformation in Metal Processing, Me Millan Co, 1965.
12. J.L. Perlin, L.Ch. Rajtbarg. Theory of Forging of Metals, Metallurgija, Moscow 1975.
13. B. Avitzur. Metal Forming. Processes and Analysis, Huntington, New York, 1979.
14. W. Libura, J. Zasadzinski. Metal Extrusion with Controlled Plastic Zone, Archiwum Hutnictwa (Archives of Metallurgy), v.25, 2, 1980.
15. J. Piwnik. Modelling of Plastic Flow During Complex Extrusion, Postepy Technologii Maszyn i Urzedzen, no. 3-4, 1987.
16. J. Piwnik. Experimental Verification of Theoretical Expressions for Extrusion Load, Rozprawy Inzynierskie (Engineering Transactions), v.29, 2, 1981.

Кульчицкий-Жигайло Р., Белостокский технический университет. Республика Польша, Белосток, ул. Виеска, 45а.

КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим упругое тело в форме двухслойного цилиндра, движущееся с линейной скоростью $V(t)$ вдоль внутренней поверхности трубы и одновременно вращающееся с угловой скоростью $\omega(t)$ вокруг собственной оси симметрии (рис. 1).

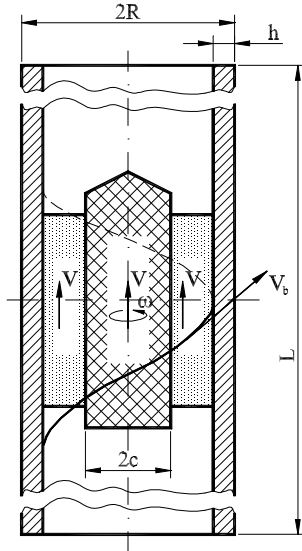


Рис. 1. Термоупругая система перед деструкцией.

Модуль вектора скорости точек боковой поверхности цилиндра равняется $V_b(t) = V(t)/\cos(\alpha)$, а между линейной и угловой скоростью цилиндра существует взаимосвязь $\omega(t) = V(t) \operatorname{tg}(\alpha)/R$, где α - угол между вектором скорости $V_b(t)$ и образующей цилиндра, R - радиус цилиндра. Начальная скорость цилиндра составляет V_0 . В момент времени t_d цилиндр утрачивает контакт с трубой, а его внешний слой разрушается (рис. 2).

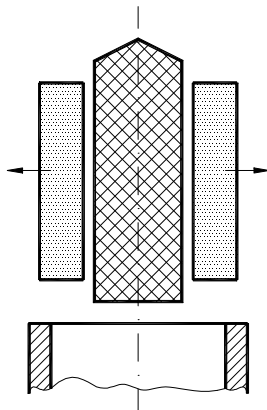


Рис. 2. Термоупругая система после деструкции.

Момент времени t_d найдём из уравнения

$$\int_0^{t_d} V(t) dt = L, \tag{1}$$

где L - длина трубы.

Скорость цилиндра определим на основании закона сохранения энергии, который в нашем случае сводится к утвер-

ждению, что изменение кинетической энергии цилиндра $K(t)$ равняется работе сил трения

$$K(t) - K(0) = \int_0^t A(t) dt, \tag{2}$$

где $A(t)$ - мощность сил трения, возникающих на площадке контакта фрикционной пары цилиндр-труба в момент времени t .

Элементарная работа сил трения da произведённая на элементарной поверхности цилиндра ds равняется $da = \tau(t) V_b(t) ds dt = \tau(t) V(t) ds dt / \cos(\alpha)$. Предполагаем, что силы трения распределены на площадке контакта равномерно, вследствие чего мощность сил трения можно определить на основании выражения

$$A(t) = 2\pi R l \tau(t) V(t) / \cos(\alpha), \tag{3}$$

где l - длина цилиндра.

Кинетическая энергия цилиндра в начальный момент времени равняется:

$$K(0) = (M_1 + M_2) V_0^2 / 2, \tag{4}$$

где M_1, M_2 - соответственно массы внешнего и внутреннего слоя цилиндра. В момент времени t кинетическая энергия цилиндра состоит из кинетической энергии поступательного и вращательного движения

$$K(t) = (M_1 + M_2) V^2(t) / 2 + J \omega^2(t) / 2 = \\ = \left\{ (M_1 + M_2) / 2 + (M_2 \rho^2 + M_1 (1 + \rho^2)) \operatorname{tg}^2(\alpha) / 4 \right\} V^2(t), \tag{5}$$

где J - осевой момент инерции цилиндра, $\rho = c/R$, c - радиус внутреннего слоя цилиндра.

Подставляя выражения (3)-(5) в уравнение (2) получим выражение из которого можем определить линейную скорость цилиндра $V(t)$:

$$M V^2(t) = (M_1 + M_2) V_0^2 - \frac{4\pi R l}{\cos(\alpha)} \int_0^t \tau(t) V(t) dt, \tag{6}$$

где

$$M = (M_1 + M_2) + (M_1 \rho^2 + M_2 (1 - \rho^2)) \operatorname{tg}^2(\alpha) / 2.$$

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА

Выражение для определения линейной скорости движения цилиндра (6) содержит неизвестное распределение касательных напряжений $\tau(t)$. Предполагаем, что имеет место закон Кулона

$$\tau(t) = f p(t), \tag{7}$$

где f - коэффициент трения, а $p(t)$ - контактное давление. Чтобы определить контактное давление между цилиндром и трубой $p(t)$, необходимо рассмотреть контактную задачу, в которой $p(t) = -\sigma_r$, где σ_r - радиальное напряжение на внешней боковой поверхности цилиндра.

Формулируя контактную задачу, предполагаем, что:

- динамические эффекты связанные с движением цилиндра незначительно влияют на распределение напряжений в цилиндре;
- влиянием касательных напряжений на распределение контактного давления можно пренебречь [1-3];

- контактное давление не изменяется вдоль образующей цилиндра;
- в процессе деформирования не происходит искривления сечений цилиндра в плоскости, перпендикулярной к его оси симметрии;
- модуль Юнга материала внутреннего слоя цилиндра и материала трубы значительно превышают модуль Юнга материала внешнего слоя цилиндра;
- существенное влияние на распределение контактного давления оказывают термические деформации внешнего слоя цилиндра [4-6];

При принятых предположениях определение напряжений во внутреннем слое цилиндра и в трубе можно опустить. Распределение напряжений и деформаций во внешнем слое цилиндра можно представить в виде суперпозиции осесимметричного распределения напряжений (в предположении, что деформация в направлении оси цилиндра отсутствует) и распределения напряжений, возникающих при нагружении вдоль оси цилиндра.

Первую составляющую напряжений получим в результате решения системы уравнений термоупругости [7-8]:

- уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0; \quad (8)$$

- соотношения Дюгамеля-Неймана:

$$\epsilon_{rr} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{rr} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{\theta\theta} \right) + (1+\nu) \alpha_2 T_2, \quad (9)$$

$$\epsilon_{\theta\theta} = \frac{1-\nu^2}{E} \left(\sigma_{\theta\theta} - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{rr} \right) + (1+\nu) \alpha_2 T_2, \quad (10)$$

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}) - E \alpha_2 T; \quad (11)$$

- геометрические зависимости

$$\epsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r}. \quad (12)$$

В уравнениях (8)-(12) введены обозначения: $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}$ - соответственно радиальное, тангенциальное и осевое напряжение; $\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}$ - соответственно радиальная и тангенциальная деформация; u - радиальное перемещение; T_2 - температура во внешнем слое цилиндра; E, ν, α_2 - соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного термического расширения материала внешнего слоя цилиндра; r, θ, z - цилиндрические координаты, связанные с цилиндром (ось z направлена вдоль оси цилиндра в направлении движения, начало координат совпадает с центром масс цилиндра).

Определяя из уравнений (9),(10) напряжения $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$ и подставляя полученные выражения в уравнение (8), получим (учитывая зависимость (12)) уравнение

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(ru)}{dr} \right) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha_2 \frac{dT_2}{dr}. \quad (13)$$

В результате интегрирования уравнения (13) придём к выражению

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_2}{r} \int_c^r T_2(x) x dx + C_1 r + \frac{C_2}{r}, \quad (14)$$

где неизвестные постоянные C_1, C_2 необходимо определить из граничных условий на боковых поверхностях внешнего слоя цилиндра.

Выражение для определения радиальных напряжений σ_{rr} , соответствующее выражению (14), получим на основании соотношений (9), (10), (12) и (14)

$$\sigma_{rr} = -\frac{E}{1-\nu} \frac{\alpha_2}{r^2} \int_c^r T_2(x) x dx + \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{C_1}{1-2\nu} - \frac{C_2}{r^2} \right). \quad (15)$$

После сложения полученного выше осесимметричного распределения перемещений и напряжений и распределения перемещений и напряжений возникающих в результате растяжения вдоль оси z (принимая, что деформация вдоль оси является постоянной $\epsilon_{zz} = C_3$), выражение (15) не изменится, а выражение (14) необходимо сложить с выражением $-\nu C_3 r$. В результате получим зависимость для определения суммарного радиального перемещения точек внешнего слоя цилиндра

$$U = u - \nu C_3 r = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_2}{r} \int_c^r T_2(x) x dx + C_1 r + \frac{C_2}{r} - \nu C_3 r. \quad (16)$$

Решение (16) содержит три неизвестные постоянные, которые необходимо определить из граничных условий. Требуемые граничные условия на боковых поверхностях и торцах внешнего слоя цилиндра получим, рассмотрев термическую деформацию внутреннего слоя цилиндра и термическую деформацию трубы

$$U(c) = c \epsilon_{\theta\theta}^{(1)} = c \alpha_1 T_1(c), \quad (17)$$

$$U(R) = R \epsilon_{\theta\theta}^{(3)} = R \alpha_3 \hat{T}_3(R),$$

$$\epsilon_{zz} = C_3 = \epsilon_{zz}^{(1)} = \alpha_1 T_1(c), \quad (18)$$

где $\epsilon_{\theta\theta}^{(1)}, \epsilon_{zz}^{(1)}$ - тангенциальная и осевая термическая деформация внутреннего слоя цилиндра; $\epsilon_{\theta\theta}^{(3)}$ - тангенциальная термическая деформация трубы; α_1, α_3 - коэффициенты линейного термического расширения соответственно внутреннего слоя цилиндра и трубы; $T_1(c)$ - температура на внешней боковой поверхности внутреннего слоя цилиндра; $\hat{T}_3(R)$ - средняя температура в области контакта цилиндра и трубы.

Подставляя выражение (16) в граничные условия (17), получим выражения для определения постоянных C_1, C_2 :

$$C_1 = \frac{D_2 R - D_1 c}{R^2 - c^2}, \quad (19)$$

$$C_2 = \frac{(D_1 R - D_2 c) R c}{R^2 - c^2},$$

где

$$D_1 = c(1+\nu) \alpha_1 T_1(c), \quad (20)$$

$$D_2 = R \alpha_3 \hat{T}_3(R) + \nu R \alpha_1 T_1(c) - \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\alpha_2}{R} \int_c^R T_2(x) x dx. \quad (21)$$

Подставляя выражения (19) в зависимость (15) и учитывая связь между радиальным напряжением и контактным давлением получим выражение

$$p = -\sigma_{rr}(R) = \frac{E\alpha_2}{1-\nu} \frac{1}{R^2} \int_c^R T_2(x) x dx + \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{D_2 R - D_1 c}{(1-2\nu)(R^2 - c^2)} - \frac{c(D_1 R - D_2 c)}{R(R^2 - c^2)} \right] \quad (22)$$

Из выражений (20)-(22) следует, что полученное решение зависит от распределений температуры в цилиндре и в трубе, для определения которых необходимо рассмотреть задачу теплопроводности для термоупругой системы цилиндр-труба.

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При формулировании задачи теплопроводности будем предполагать, что на площадке контакта образуется тепло, возникшее в результате преобразования работы сил трения в тепловую энергию. Генерируемое тепло разделяется на два тепловых потока q_2 и q_3 , нагревающих соответственно цилиндр и трубу. Предполагаем, что интенсивность теплообразования равняется мощности сил трения

$$q_2 + q_3 = V_b \tau = f V_b p \quad (23)$$

Принимаем, что тепловой контакт между слоями цилиндра является идеальным, а тепловой контакт между цилиндром и трубой - неидеальным, считая при этом, что разница тепловых потоков q_2 и q_3 пропорциональна разности температур контактирующих поверхностей

$$q_2 - q_3 = \hat{\alpha}_1 (\hat{T}_2 - T_2) \quad (24)$$

где $\hat{\alpha}_1$ - термическая проницаемость промежуточного слоя малой толщины, возникшего в области контакта. Принимаем также, что распределение температуры на внешней поверхности цилиндра является равномерным, что отражено в зависимости (24) ($\hat{T}_2 = T_2$). Между внешней боковой поверхностью трубы и внешней средой происходит теплообмен согласно закону Ньютона.

При принятых предположениях задача теплопроводности сводится к следующей задаче математической физики [8]:

- нестационарные уравнения теплопроводности для внутреннего и внешнего слоя цилиндра

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_i}{\partial r} \right) = \frac{1}{a_i} \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2; \quad (25)$$

- квазистационарное уравнение теплопроводности для трубы

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_3}{\partial r} \right) = \frac{V(t)}{a_3} \frac{\partial T_3}{\partial z}; \quad (26)$$

- условия идеального термического контакта между слоями цилиндра

$$T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}, \quad r = c; \quad (27)$$

- условия неидеального термического контакта между цилиндром и трубой

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} - \lambda_3 \frac{\partial \hat{T}_3}{\partial r} = f V_b p, \quad (28)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} + \lambda_3 \frac{\partial \hat{T}_3}{\partial r} + \hat{\alpha}_1 (T_2 - \hat{T}_3) = 0, \quad r = R;$$

- условия теплообмена между трубой и внешней средой

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial r} = \hat{\alpha}_2 (T_s - T_3), \quad r = R + h; \quad (29)$$

- начальные условия

$$T_1 = T_2 = T_0^{(1)}, \quad T_3 = T_0^{(3)}, \quad t = 0, \quad (30)$$

где $\lambda_i, a_i, i = 1, 2, 3$ - соответственно коэффициенты теплопроводности и температуропроводности для материалов слоёв цилиндра и трубы соответственно; $\hat{\alpha}_2$ - коэффициент теплообмена между трубой и внешней средой, h - толщина трубы, T_s - температура среды.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения (6), (7), (22), (25)-(26), граничные и начальные условия (27)-(30) составляют замкнутую систему зависимостей для определения неизвестных характеристик термоупругой системы цилиндр-труба. Решение полученных уравнений позволит определить состояние рассматриваемой термоупругой системы в момент вылета цилиндра из трубы. Анализ характеристик этого состояния позволит определить механизм расслоения слоёв цилиндра.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hamilton G.M., Goodman L.E. (1966), The stress field created by circular sliding contact, Trans ASME, J. of Appl. Mech., Ser. E., 33, P. 371-376.
2. Kuznetsov Ye.A., Gorokhovskiy G.A. (1981), Effect of tangential load on the stressed state of rubbing rough bodies, Wear, 73, P. 49-59.
3. Johnson K.L. (1987), Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge.
4. Barber J.R. (1976), Some thermoelastic contact problems involving frictional heating, Q.J.Mech. Appl., 29, P. 1-13.
5. Barber J.R. (1975), Thermoelastic contact of a rotating sphere and a half-space, Wear, 35, No 2, P. 283-289.
6. Yevtushenko A.A., Kulchytsky -Zhyhailo R.D. (1996), Two axi-symmetrical contact problems with the steady-state frictional heating, J.Theoret. Appl. Mech., 34, P. 767-779.
7. Timoshenko S., Goodier J.N. (1951), Theory of elasticity, McGraw-Hill, New York.
8. Nowacki W. (1986): Thermoelasticity, PWN - Pergamon Press, Warszawa.

УДК 539.3

Босьяков С.М.

АНАЛИЗ ЭФФЕКТОВ СВЯЗАННОСТИ ТЕПЛООВОГО И МЕХАНИЧЕСКОГО ПОЛЕЙ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕРМОУПРУГОСТИ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Введение. Результаты исследования закономерностей распространения термоупругих волн в кубически анизотропных средах с учетом релаксации теплового потока на базе

Босьяков Сергей Михайлович, к.т.н., доцент каф. теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета.

Беларусь, БГУ, г. Минск.

классического метода отражены [1-3]. В частности, в [3] выведены уравнения движения кубически анизотропной среды в напряжениях в условиях плоской деформации, изучены зави-