что при получении штормового сообщения об ОМЯ, необходимо реализовывать соответствующие защитные мероприятия, направленные на снижение уровня социально-экономического ущерба. В связи с этим, одной из первоочередных задач гидрометеорологической службы в области обеспечения гидрометеорологической безопасности является прогноз и предупреждения об ОМЯ, которые являются предпосылками своевременной эффективной организации работ по минимизации разрушений и последствий стихии.

Список литературы

1. Правила составления краткосрочных прогнозов погоды общего назначения – Минск,2008. – С. 4–13.

2. Белоусов С.Л., Васильев А.А. Руководство по краткосрочным прогнозам погоды. Часть 1 – Ленинград, Гидрометеоиздат,1986. – С. 362–565.

3. О защите населения и территорий от чрезвычайных ситуаций природного и техногенного характера: Закон Республики Беларусь от 05.05.1998 г.: в ред. Законов Респ. Беларусь от 04.01.2003 г., от 14.06.2005 г., от 21.07.2008 г., от 09.11.2009 г. // Консультант Плюс: Беларусь [Электрон. ресурс] / ООО «ЮрСпектр», Нац. Центр правовой информ. Респ. Беларусь. – Минск, 2012.

УДК 614.8.084:510

ОСОБЕННОСТИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ ПРИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ОПОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Шведовский П.В. *, Шведовская Д.В. **, Волчек А.А. *, Клебанюк Д.Н. *

*****Учреждение образования «Брестский государственный технический университет», г. Брест, Республика Беларусь, ofig@bstu.by

******Учреждение образования «Брестский государственный университет им А.С. Пушкина», г. Брест, Республика Беларусь

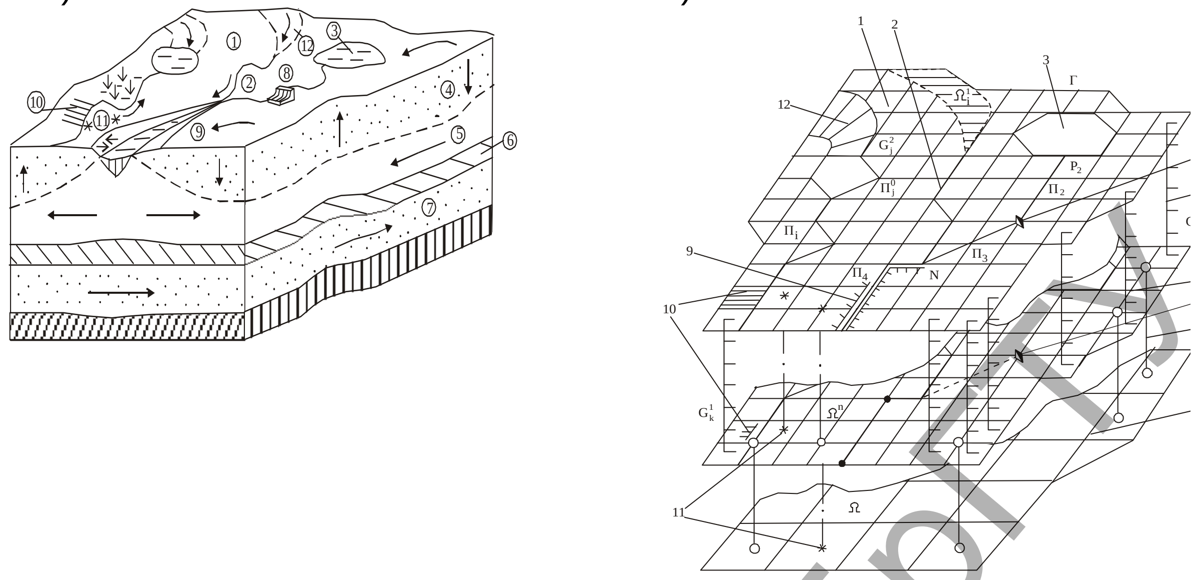
In article features of an assessment of parameters of reliability and stability, and also probability of optimum performance of systems are considered. The special attention is paid to search of decisions at limitation of aprioristic information.

Введение

На сложность решения проблемы оценки экологической устойчивости и вероятности прогноза оптимального функционирования систем указывает схема формирования информационных полей региона, которая представлена на рисунке 1.

Масштабы прямого и косвенного ущерба от последствий, связанных с нарушением оптимального функционирования систем, предъявляют особые требования к методам прогнозирования как самих событий, так и экстремальных значений параметров надежности и устойчивости.

а) б)



а – компонентная, б – информационно – структурная; 1 – поверхностный сток (G_j^2); 2 – речная сеть (П); 3 – водоемы (Г); 4 – область фильтрационных потоков; 5 – область грунтовых вод (Ω^n); 6 – область напорных подземных вод (Ω); 7 – подземный сток; 8 – инженерные сооружения (N); 9 – область пойменных процессов; 10 – область действия поверхностных водохозяйственных систем (Р); 11 – область действия глубинных хозяйственных систем; 12 – область склонового стока

***Рисунок 1** – Схема формирования информационных полей*

Основы оценки вероятности оптимального функционирования

Оптимальность функционирования систем достаточно полно задается параметрами экологической надёжности и устойчивости. В общем случае, вероятность оптимального функционирования систем ($\hat{p}$) может быть определена точечной оценкой, так как каждая из них функционирует в специфических условиях и достигает критического уровня по строго нефиксированному влиянию подсистем и сочетанию компонент.

Однако, такая оценочная функция является несмещённой, состоятельной и эффективной только при $n \to \infty$, т. е. большом количестве рецензированных подсистем. Так как взаимосвязь компонент может быть как с прямым, так и косвенным поствоздействием, интервальную оценку параметров экологической устойчивости и надёжности целесообразно осуществлять по преобладающему типу взаимосвязи (прямые – косвенные) и максимальному риску.

Следует отметить, что независимо от условий функционирования, структуры, уровня и ранга системы, математическая модель, учитывающая запас по уровню экологической надёжности и устойчивости каждой из компонент, отображается в виде

$$p = p_0 \left(1 - \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot \eta_i + \sum_{i>j} q_{ij} \cdot \eta_{ij} + \ldots + (-1)^{N-1} \cdot q_{1,2,\ldots,N} \right), \qquad (1)$$

где p_0 – вероятность оптимального функционирования системы при отсутствии снижения экологической надёжности и устойчивости компонент до критического уровня; q_i – вероятность достижения критического уровня экологической надёжности и устойчивости любой из *i*-ой компоненты; η_i – весовой коэффициент для *i*-ой компоненты, определяющий его функциональную значимость (избыточность); $\eta_{ij}, q_{ij}, ..., \eta_{1,2,...,N}, q_{1,2,...,N}$ – весовые коэффициенты компонент и вероятности возникновения парных, тройных и т.д. наложенных процессов снижения экологической надёжности и устойчивости компонент; $\eta_i = 1 - p_i / p_0$; p_i – вероятность оптимального функционирования системы при достижении критического уровня экологической надёжности и устойчивости *i*-ой компонентой.

Соответственно, при независимости процессов достижения компонентами критических уровней экологической надёжности и устойчивости, при $p_0 \approx 1$, имеем

$$p = \prod_{i=1}^{N} (1 - q_i \cdot \eta_i), \quad (2)$$

где $q_i = d_i / n_i$.

Наиболее достоверными для прогноза ситуаций, нарушающих оптимальное функционирование, и формируемых факторами, состоящими из нескольких несовместимых групп, внутри которых распределение случайно, но с различной вероятностью встречаемости, являются модификации пуассоновского распределения [2].

В соответствии с [3, 4], случайная величина *r* имеет распределение Пуассона, если

$$P_n = P\{r = n\} = \frac{v^n e^{-v}}{n!}, n = 0,1,2,..., \quad (3)$$

где P_n – вероятность значения *n*; *n* – число редких событий, происходящих в каждой большой группе; *v* – среднее число редких событий на каждую большую группу; *n!* – факториал, с основными числовыми характеристиками:

$$E[r] = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{v^n e^{-v}}{n!} = v; \quad (4)$$

$$D_r = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n - v^2 = v; \quad (5)$$

E [r] – среднее; D_r – дисперсия случайной величины.

Используя производящую функцию распределения случайной целой неотрицательной величины *r* вида

$$\bar{f}(x) = e^{m(t-1) + \frac{\sigma^2}{2}(t-1)^2}, \quad (6)$$

сложнопуассоновское распределение можно определить по формуле

$$P_n = \frac{1}{n!} \bar{f}^{(n)}(t)\Big|_{t=0}. \quad (7)$$

Приравняв *t=0,* имеем систему:

$$\left.\begin{aligned} &P_0 = e^{-m+\frac{\sigma}{2}}; \quad p_1 = p_0 c; \quad p_2 = p_0(c^2+\sigma^2)\frac{1}{2}; \\ &p_3 = p_0(c^3 + 3c\sigma^2)\frac{1}{6}; \quad p_4 = p_0(c^4 + 6c^2\sigma^2 + 3\sigma^4)\frac{1}{24}; \\ &p_5 = p_0(c^5 + 10c^3\sigma^2 + 15c\sigma^4)\frac{1}{120} \ \ и \ \ т.д.; \end{aligned}\right\}, \quad (8)$$

где $c=(m-\sigma^2)$.

Не менее эффективным для описания сложного характера процессов, формирующих критические события, является дискретное лагранжево вероятностное распределение [5, 6] с функцией вероятности вида

$$P\{r=n\}=\frac{1d^{n-1}}{n!dt^{n-1}}\left\{\left[f_1(t)\right]^n\frac{d}{dt}f_2(t)\right\}\Big|_{t=0}\ , \tag{9}$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ – вероятностные производящие функции, определяемые на неотрицательных целых числах.

Достаточно эффективно и модифицированное распределение Девендроя

$$P_n=v_2(v_2+nv_1)^{n-1}\frac{(\theta e^{-v_1\theta})^n}{n!e^{v_2\theta}}. \tag{10}$$

В случае, если область реализации случайной величины случайного процесса практически неограниченна $-\infty<v<+\infty$, т.е. $\sigma_v<<m_v$, эффективным распределением для нее является предельное гипернормальное распределение.

В соответствии с производящей функцией распределения

$$p_k=\frac{1}{k!}\bar{f}^{(k)}(0), \tag{11}$$

предельное гипернормальное распределение описывается зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= e^{-m_v}\int_0^1 e^{-\sigma_v\sqrt{2n}\sqrt{-Ei(\ln P)}}dp;\\ p_1 &= p_0 m_v + e^{-m_v}\sigma\sqrt{2n}\int_0^1 e^{-\sigma_v\sqrt{2n}\sqrt{-Ei(\ln P)}}\sqrt{-Ei(\ln P)}dp \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

Все последующие зависимости для определения вероятностей $p_k=P(r=k)$ зависят от интеграла

$$J_k(\sigma\sqrt{2n})=\int_0^1 e^{-\sigma_v\sqrt{2n}\sqrt{-Ei(\ln P)}}\left(\sqrt{-Ei(\ln P)}\right)^k dp\ , \tag{13}$$

значение которого табулировано [3].

Достаточно эффективно использование методов рандомизации псевдосостояний, сущность которых в том, что состояния системы с немарковскими потоками переходов заменяются эквивалентной группой фиктивных состояний с марковскими потоками переходов. Созданная система является статистически эквивалентной реальной системе и уже может быть исследована с помощью аппарата теории марковских цепей.

Любой, даже самой сложной системе, можно поставить в соответствие не более двух состояний, т.е. S_1 – система функционирует оптимально и S_2 – переходит в неоптимальный режим функционирования под воздействием реальных потоков событий.

Для того, чтобы добиться статистической эквивалентности исходной информации о времени пребывания системы в определенном состоянии, необходимо найти закон распределения числа псевдосостояний (порядок потока Эрланга p_n). Очевидно, что он должен удовлетворять, по определению, характеристической функции, т.е. следующему уравнению [7, 8, 9]

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-it\lambda^{-1})^{-n}p_k=\phi(t)\ , \tag{14}$$

где $(1-it\lambda^{-1})^{-k}$ -характеристическая функция распределения Эрланга случайной величины T с целочисленным параметров формы n.

Используя метод моментов и учитывая свойства характеристических функций, среднее число псевдосостояний можно определить по следующей зависимости

$$v = \frac{2}{v_t^2}, \tag{15}$$

где v_t – коэффициент вариации времени пребывания системы в состоянии S_1, а интенсивность перехода выражается как

$$\lambda = \frac{v}{m_T}. \tag{16}$$

Отсюда, если r случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром v, то этот параметр может рассматриваться как случайная величина, имеющая гамма-распределение с параметрами

$$\left.\begin{aligned} &\mu = P(1-P)^{-1},\ m = k; \\ &f(v) = \frac{\mu}{\Gamma(m)}(\mu v)^{m-1} e^{-v\lambda\mu} \end{aligned}\right\}, \tag{17}$$

и вероятность того, что $r=n$, определяется зависимостью

$$p(r=n) = C_{k+n-1}^{k} p^{k}(1-p)^{n}, \tag{18}$$

т.е. случайная величина r имеет отрицательное биноминальное распределение (распределение Паскаля) с параметрами (p, k). Для такого случая система расчетных уравнений трансформируется в систему вида [9]:

$$\left.\begin{aligned} &\lambda^{-1}\frac{(1-p)k}{p} = m_1; \\ &\lambda^{-2}\left[\frac{(1-p)^2 k^2}{p^2} + 2\frac{(1-p)k}{p^2}\right] = m_2; \\ &\lambda^{-3}\left\{E\left[n^3\right] + 3E\left[n^2\right] + 2E\left[n\right]\right\} = m_3 \end{aligned}\right\}, \tag{19}$$

из которой однозначно определяются параметры закона Паскаля (k и p) и интенсивность перехода λ.

Используя свойство производящей функции, можно найти первые три начальных момента случайного числа псевдосостояний однозначно определяющие параметры m_v, σ^2 и λ.

Однако, оценка параметров экологической надежности и устойчивости систем при ограниченности объёма априорной информации определяет необходимость использования непараметрических методов микростатистики, в комплексе с эмпирическими функциями распределения, на базе принципов максимума неопределённости.

Так как малой выборке случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ обычно соответствует эмпирическая функция распределения $p_n(x)$ вида

$$p_n(x) = \begin{cases} 0, x \le x_1^{(n)}; \\ \dfrac{k}{n}, \ x_k^{(n)} < x \le x_{k+1}^{(n)}; \\ 1, \ x > x_n^{(n)}, \end{cases} \tag{20}$$

график которой, представляет ступенчатую линию со скачками (быстрыми изменениями), кратными величине $\frac{1}{n}$ в точках, определяемых членами вариационного ряда $x_1^{(n)} \le x_2^{(n)} \le \ldots \le x_n^{(n)}$, и по закону больших чисел эта функция сходится на вероятности к исходному теоретическому распределению, то определять математическое ожидание можно с использованием бутстреп-процедур, при использовании сглаженной функции квантилей распределения оценки параметров типа

$$X_p = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \cdot p^k \,, \tag{21}$$

коэффициенты которой, удовлетворяют эмпирической функции распределения.

Неоднозначность выбора коэффициентов ряда (8) дополнительно требует ввода принципа максимума неопределённости, с использованием в качестве меры неопределённости – энтропию Шеннона, т.е.

$$H_\varepsilon = \int_0^1 ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot C_k \cdot p^{k-1}\right) dp \rightarrow \frac{max}{C_k}; \tag{22}$$

$$X_k^{(n)} \le C_0 + C_1 \cdot \frac{k}{n} + C_2 \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \ldots + C_{n-2} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^{n-1} \le X_{k+1}^{(n)}, \tag{23}$$

где H_ε – энтропия; k=1,2…, n.

Заключение

Высокая цена ошибочных прогнозов диктует необходимость отыскания достоверных методов прогнозирования, как возможного времени их возникновения, так и масштабов последствий. Наиболее целесообразно, как показали исследования, в качестве прогнозных моделей использование модификаций пуассоновских распределений, распределений Дивендроя и дискретных лагранжевых вероятностных распределений. Для случая возможной реализации практически неограниченных параметров чрезвычайных ситуаций, эффективно предельное гипернормальное распределение.

Ограниченности априорной информации требуют ввода принципа максимума неопределенности с использованием, в качестве меры неопределённости, энтропию Шеннона.

Список литературы

1 Бурлибаев, М.Ж. Чрезвычайные ситуации в природной среде / М.Ж. Бурлибаев, А.А. Волчек, П.В. Шведовский // Алматы: Каганат, 2011 – 351 с.

2 Ивченко, Б.П. Информационная экология / Б.П. Ивченко, Л.А. Мартыщенко // С.-П., Нордмет-Издат, 1998 – 201 с.

3 Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн // М., Наука, 1973 – 831 с.

4 Мартыщенко, Л.А. Введение в статистическое моделирование технических систем / Л.А. Мартыщенко // М., Наука, 1982 – 219 с.

5 Лебедев, Н.Н. Специальные функции и их приложения / Н.Н. Лебедев // М.-Л, Наука, 1979 – 317 с.

6 Земанян, А. Интегральные преобразования обобщенных функций / А. Земанян // М., Наука, 1979 – 317 с.

7 Гурман, В.И. Моделирование процессов в природно-экономических системах / В.И. Гурман // Новосибирск, Наука, 1982 – 175 с.

8 Райфа, Г. Анализ решений. Введение в проблему выбора в условиях неопределенности / Г. Райфа // М., Наука, 1970 – 420 с.

9 Чернышев, М.К. Математическое моделирование иерархических систем / М.К. Чернышев // М., Наука, 1998 – 246 с.