

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**  
**«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ  
МАТЕМАТИКИ И  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ**

**Материалы IV республиканской научной конференции  
молодых ученых и студентов  
28-30 ноября 2005 года**

**Брест 2005**

УДК 517+519+004  
ББК 22.11/.19+32.97

**Редакционная коллегия:**

1. **В.В. Тур**, проректор по научной работе УО «БГТУ», д.т.н., профессор
2. **Р.Х. Садыхов**, УО «БГУИР», д.т.н., профессор
3. **В.В. Голенков**, УО «БГУИР», д.т.н., профессор
4. **В.В. Старовойтов**, ОИПИ НАНБ, д.т.н., профессор
5. **Н.В. Лазакович**, УО «БГУ», д. ф.-м.н., профессор
6. **А.И. Калинин**, УО «БГУ», д. ф.-м.н., профессор
7. **В.А. Головкин**, УО «БГТУ», д.т.н., профессор
8. **С.С. Дереченник**, УО «БГТУ», к.т.н., доцент
9. **В.М. Ракецкий**, УО «БГТУ», к. ф.-м.н., доцент
10. **В.С. Рубанов**, УО «БГТУ», к. ф.-м.н., доцент
11. **Л.П. Махнист**, УО «БГТУ», к.т.н., доцент
12. **Ю.В. Савицкий**, УО «БГТУ», к.т.н., доцент

**Современные проблемы математики и вычислительной техники:** материалы IV республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, 28-30 ноября 2005 г. – Брест: УО «БГТУ». – 2005. – 168 с.

Представлены материалы по современным проблемам математики, информатики, вычислительной техники и их приложениям.

ISBN 985-493-026-2

УДК 517+519+004  
ББК 22.11/.19+32.97

## РАЗДЕЛ I. ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ

### ИСКУССТВЕННЫЕ ИММУННЫЕ СИСТЕМЫ: ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ

*Безобразов С. В., БГТУ, Брест*

Современные компьютерные системы нуждаются в надежной системе защиты информации. Число компьютерных преступлений растет и по оценке специалистов, ущерб от них увеличивается на 35 процентов в год [1]. Современные антивирусные программы не обеспечивают должный уровень защиты компьютерных систем от вирусов и сетевых атак. Все это привело к поиску нетрадиционных методов в построении антивирусных программ. Изучая биологическую иммунную систему человека, мы приходим к выводу, что это совершенный механизм по защите человеческого организма от опасных бактерий и инфекций. Мы полагаем, что система, построенная на принципах биологической иммунной системы, значительно повысит уровень защиты компьютерных систем.

Основными элементами иммунной системы являются лимфоциты – белые клетки [2]. Существуют две разновидности лимфоцитов, которые образуются из стволовых клеток в костном мозге. После синтеза лимфоциты попадают в кровяное русло. Некоторые из них направляются к тимусу (вилочковой железе), где происходит их созревание (Т-лимфоциты). Другие же попадают в лимфатические узлы, и их созревание происходит там (В-лимфоциты). Процесс созревания незрелых лимфоцитов играет большую роль в иммунной системе и называется селекцией антител. В результате селекции уничтожаются нежелательные для организма лимфоциты. Зрелые лимфоциты имеют на своей поверхности детекторы, которые способны обнаруживать специфический антиген (вредные бактерии, вирусы). Контакт В-клеточных рецепторов со специфическим антигеном и связывание определенного его количества стимулируют рост этих клеток и последующее многократное деление. В результате образуются многочисленные клетки двух разновидностей: плазматические и «клетки памяти». Плазматические клетки синтезируют антитела, тем самым увеличивая количество клеток, способных обнаружить вирус. Клетки памяти являются копиями В-клеток, однако имеют гораздо больший период жизни, что обеспечивает защиту организма от повторного заражения вирусом. При связывании определенного количества вируса, Т-клетки секретируют особую группу веществ, называемую лимфокинами. Некоторые лимфокины способны сами разрушать антиген и зараженные клетки. Другие лимфокины способствуют делению Т-клеток, в результате чего появляется большое количество антител, способные реагировать на обнаруженный антиген.

Биологическая иммунная система обладает качествами, которые необходимы для защиты компьютерных систем: способность защищать как организм, так и саму себя; распределенность, т.е. отсутствие центрального органа управления; динамичность; способность к адаптации, т.е. обнаружение и уничтожение новых, неизвестных вирусов; наличие иммунной памяти, в которой хранится информация о встречавшихся ранее вирусах.

Анализируя структуры различных вирусов, мы пришли к следующему выводу, что они разительно отличаются от «чистых» файлов, так как их действия направлены на нарушение нормального функционирования системы.

Основную роль в искусственной иммунной системе (ИИС) по обнаружению вирусов играют антитела, которые способны распознавать вредоносные программы.

Механизм генерации антител представляет собой случайный процесс. Суть его заключается в том, чтобы сгенерировать такую последовательность бит, которая была бы

максимально схожа со структурой возможного вируса. Каждый детектор наделяется жизненным циклом – промежутком времени, в течение которого антитело находится («живет») в компьютерной системе. Если, по истечении данного промежутка времени, антитело не обнаружило вирусов, оно должно быть уничтожено, и его место занимает другое антитело. Если же обнаружение произошло, то жизненный цикл данного антитела увеличивается. Этот механизм не только предотвращает систему от переполнения антителами, но и обеспечивает ИИС разнообразными по структуре детекторами.

Так как процесс создания антител по своей сути случайный процесс, то имеется вероятность создания таких антител, которые вместо вируса будут обнаруживать «чистый», незараженный файл. Механизм селекции предотвращает распространение таких антител по всей системе. Наиболее распространенным методом селекции антител является метод негативной селекции. Целью данного метода является отбор тех антител, которые по своей структуре не похожи на структуру «чистых» файлов. Таким образом, искусственная иммунная система получает способность реагировать на вредоносные программы, но не на «чистые» файлы.

После селекции, «зрелые» антитела попадают в систему и, на протяжении жизненного цикла, выполняют функцию по обнаружению вирусов, проверяя различные файлы. Основным методом обнаружения является строковое сравнение антитела и файла по соответствующим правилам. Правила сравнения могут быть различными, например: вычисление Евклидова расстояния, или расстояние Хэмминга, или правило  $r$ -смежных бит [3].

При обнаружении вируса в системе происходит мобилизация ИИС. Для успешной борьбы с найденным вирусом и зараженными им файлами необходимо иметь большое количество детекторов, одинаковых по своей структуре. Это обеспечивается путем создания большого количества копий детектора, который первый обнаружил вирус. Механизм создания большого количества копий называется клонированием [3]. Антитело, которое первым обнаружило вирус, и копии которого появляются в результате клонирования, называется «родителем». Сами же клоны называются «потомками». Существует многоуровневая система клонирования, т.е. «потомки», в свою очередь также могут стать «родителями» и иметь своих «потомков». Чем больше клоны структурно будут походить на вирус, тем быстрее и надежнее будет происходить обнаружение всех проявлений вируса. Для реализации этого процесса используется механизм внесения незначительных изменений в структуру клонов, который позволяет улучшить их характеристики. Этот механизм называется мутацией. С помощью механизмов клонирования и мутации ИИС адаптируется к обнаруженному вирусу, вырабатывает большое количество антител, что помогает ей успешно бороться с обнаруженным вирусом. После уничтожения всех следов вируса активность ИИС приходит в норму, общее количество всех антител восстанавливается, так как антитела имеют срок жизни, по истечении которого они уничтожаются.

Иммунная память ИИС является механизмом быстрого реагирования на повторные заражения вирусами, т.е. вирусами, которые когда-либо обнаруживались в компьютерной системе [3]. Иммунная память способна длительное время хранить информацию о встречавшихся ранее вирусах. Детектор, обнаруживший вирус, кроме того, что является объектом клонирования, еще делает полную копию самого себя. Эта копия детектора называется клеткой памяти и наделяется дополнительными свойствами. Совокупность клеток памяти образует иммунную память ИИС.

Описанная нами искусственная иммунная система обладает рядом особенностей, которые в выгодную сторону отличают ее от традиционных систем защиты информации. Мы полагаем, что искусственная иммунная система, построенная по принципу биологической иммунной системы, позволит поднять уровень безопасности компьютерных систем.

### Литература

1. Почему не срабатывают антивирусы – <http://www.i2r.ru>, 2003
2. Иммунитет – <http://krugosvet.ru>, 2004
3. D. Dasgupta, Z. Ji, F. Gonzales. Artificial Immune System (AIS) research in the last five years. – [issrl.cs.memphis.edu](http://issrl.cs.memphis.edu), 2003

## ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРИСТУПОВ ЭПИЛЕПСИИ

*Безобразова С. В., БГТУ, Брест*

Эпилепсия является распространенным нервно-психическим заболеванием. Согласно статистике лечебно-профилактических учреждений в последнее время наблюдается рост заболеваемости эпилепсией.

Основные исследования данного заболевания проводятся по средствам электроэнцефалографии. Электроэнцефалограмма (ЭЭГ) представляет собой суммарную запись электрической активности мозга, по которой можно судить не только о наличии эпилепсии, но и о причинах ее возникновения, очагах заболевания. Также по данным ЭЭГ производятся попытки предсказать появление приступов, что может значительно облегчить жизнь больным. Фактор «непредсказуемости» болезни затрудняет ее лечение, а также вызывает социально-психологические комплексы у больных эпилепсией, что усугубляет их психическое состояние.

Многие считают, что предсказание наступления припадков эпилепсии невозможно, так как между ними нет временных закономерностей, и они могут быть спровоцированы различными раздражающими факторами окружающей среды. Однако на сегодняшний день существует ряд подходов, направленных на предсказания эпилептических приступов и ориентированных на предиктальное состояние больного (состояние перед приступом):

- Сбор информации о жизни больного, развитии болезни, очень подробное описание приступов, а также состояний, им предшествующих, по возникновению которых в дальнейшем можно определить наступление новых приступов [5]. Важное значение играет способность больного описать свои ощущения, отметить повторяющиеся проявления (например: головные боли или слабость).

- Анализ ЭЭГ, который показывает, что при приближении приступа происходит синхронизация работы некоторых нейронов на уровне значений старшего показателя Ляпунова, что позволяет предсказать появление приступа, используя хаотическую природу сигналов ЭЭГ [2]. Требуется тщательной обработки данных (разделение сигналов, устранение шумов и помех).

Однако этими методами нельзя точно определить момент наступления приступа и тем более его продолжительность; также нельзя утверждать будет ли приступ один или их будет несколько (существуют случаи с часто повторяющимися приступами, которые следуют один за другим с малыми временными перерывами).

На базе вышеперечисленных подходов можно предложить другой, основанный на анализе ЭЭГ и направленный на прогнозирование времени начала приступа эпилепсии и его длительности. При рассмотрении данной проблемы важной является особенность возникновения приступов, то есть нарушения активности мозга, которые отражаются на ЭЭГ. Хотя изменения визуально могут быть различимы только при наступлении приступа (характерные пики, резкие скачки сигнала), появляются они раньше [1].

При нормальном состоянии активность мозга человека является хаотической, то есть характеризуется положительным старшим показателем Ляпунова. Было исследовано, что при нарушении работы мозга в случае эпилептического приступа происходит переход от хаоса к порядку, то есть значение показателя становится меньше нуля.

На основе вышеописанной зависимости была разработана программа, позволяющая по сигналам ЭЭГ (на основе рассчитываемых значений старшего показателя Ляпунова в каждый момент времени), определять момент наступления приступа эпилепсии, а также его длительность с высокой точностью (погрешность составила 0,05 секунды, где отсчеты данных взяты через 0,005 секунды) [3]. Однако никаких характерных изменений в значении старшего показателя Ляпунова во время предиктальной стадии обнаружено не было.

Для решения проблемы предсказания приступов было предложено использовать прогнозирующую нейронную сеть - многослойный персептрон с одним обрабатывающим слоем. Нейронная сеть обучается на данных ЭЭГ, после обучения производится прогнозирование этих данных. Обучающая выборка формируется следующим образом: выбираются набор данных ЭЭГ из временного интервала, который предшествует появлению эпилептического приступа. Результаты прогнозирования исследуются при помощи описанной ранее программы на наличие приступов, далее производится сравнение результатов с эталонными значениями.

Программно реализованная нейронная сеть была протестирована на реальных данных ЭЭГ [4]. Обучающая выборка составила 100 значений, взятых на протяжении 1 секунды, прогнозирование осуществлялось на последующие 3 секунды времени (300 значений). В результате были получены прогнозы сигнала ЭЭГ, которые не имели высокой точности, однако мы решили исследовать данные на хаотичность. Определить наличие эпилептического приступа на спрогнозированных данных удалось с той же точностью, что и на эталонных, также был точно зафиксирован временной интервал, в течение которого происходит приступ. Таким образом, нам удалось спрогнозировать появление приступа, это дает возможность заранее знать о его появлении.

Используя данные, которые были в нашем распоряжении, получилось осуществить прогноз появления эпилептического припадка всего на несколько секунд. Конечно, это не является полным решением проблемы, однако этот результат позволяет утверждать о возможности такого прогнозирования и определения времени наступления приступа. В данном примере мы оперировали секундами, но известно, что изменения в динамике мозга появляются за несколько часов до приступа [1]. Спрогнозировать данные на несколько часов вперед достаточно сложно (при длительном прогнозировании погрешность возрастает), но мы убедились, что точность не требуется, а динамика работы мозга отражается без изменений даже на данных, спрогнозированных с большими отклонениями от эталонных сигналов. Исходя из этого, мы планируем продолжить исследование в данном направлении и добиться более высоких результатов.

Мы доказали, что при использовании старшего показателя Ляпунова можно зафиксировать изменения мозговой активности человека еще до наступления самой аномалии (приступа). Кроме того, нам удалось получить точное время наступления приступа и его длительность.

### Литература

1. Litt B, Echauz J. Prediction of epileptic seizures: review. - <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/entrez>, 2002.
2. Sackellares J.Ph, Iasemidis L.D, Shiau D.-Sh, Gilmore R.L, Roper S.N. Epilepsy when chaos fails. - <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/entrez>, 2000
3. Безобразова С.В. Диагностика эпилепсии на основе анализа энцефалограмм // Сборник конкурсных работ студентов и аспирантов – 2005 / БГТУ. – Брест, 2005. – с. 91-94 (в соавторстве с Головки В.А.).
4. Данные электроэнцефалограмм. - <http://republica.pl>, 2002.
5. Диагностика эпилепсии. - <http://www.neuro.net.ru/epilepsy>, 2003.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РЮКЗАКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

Бочков Л.Н., БГТУ, Брест

Необходимо сложить в рюкзак предметы, имеющие вес  $w_i$  и полезность  $p_i$ , таким образом, чтобы общая полезность была максимальной. При этом необходимо учитывать ограничение  $W$  рюкзака по весу. Математически данная проблема записывается в виде:

$$Z = \sum_{i=1}^n p_i \cdot X_i \rightarrow \max ; \sum_{i=1}^n w_i X_i \leq W, X_i \in \{0,1\}.$$

В данном случае бинарный хромосом является удобным способом кодирования. Его можно рассматривать как вектор набранных в рюкзак вещей  $X = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_n)$ , где  $X_i$  принимает значения 1 ( $i$ -ая вещь взята в рюкзак) и 0 ( $i$ -ая вещь не взята в рюкзак). Для преобразования хромосом будем использовать генетические операторы: мутацию, изменяющую значение бита с вероятностью  $p_m$ , и одноточечное скрещивание.

Ограничение рюкзака введем в целевую функцию, используя функцию штрафа. Тогда функция приспособленности особи  $X$  будет иметь вид:

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot X_i - K \cdot \max \left( \sum_{i=1}^n w_i \cdot X_i - W, 0 \right),$$

где  $K$  является весовым коэффициентом, подбираемым таким образом, чтобы сильно штрафовать недопустимые разрешения и тем самым уменьшать их шансы на репродукцию. Примем в качестве  $K$  значение

$$K = \max_{i=1, \dots, n} p_i / \min_{i=1, \dots, n} w_i.$$

Будем использовать пропорциональную репродукцию. Но при этом требуется, чтобы значения функции приспособленности были положительными, что, вообще говоря, не является истинным для принятого вида функции. Для преодоления этого, применим метод масштабирования приспособленности (fitness scaling), при котором вероятность репродукции описывается соотношением

$$p_r(X) = \frac{\Phi(X) - \Phi_{\min}}{\sum_{Y \in P^t} \Phi(Y) - \Phi_{\min}},$$

где  $\Phi_{\min}$  является значением функции приспособленности наихудшей особи в популяции  $P^t$

$$\Phi_{\min} = \min_{Y \in P^t} \Phi(Y).$$

Благодаря этому мы избегаем опасности получения «отрицательной вероятности».

**Условия эксперимента.** Будем паковать рюкзак  $n = 50$  предметами. Значения  $p_i$  и  $w_i$  генерируем случайным образом, независимо друг от друга, из предела  $[0.0001, 1]$ . Ограничение рюкзака по весу примем равным  $W = 13$ .

Генетический алгоритм содержит  $\mu = 100$  особей в базовой популяции  $P^t$ . В момент времени  $t = 0$  базовая популяция создана случайно сгенерированными особями. Хромосома каждой из них создается 50-кратным случайным выбором с вероятностью выпадения единицы, равной 0.2 (т.е. содержит около 20% единиц, а остальные нули). Установим вероятности генетических операторов равными  $p_m = 0.02$  (для мутации) и  $p_c = 0.7$  (для скрещивания). Остановка алгоритма происходит, если в течение 100 последовательных генераций не наступило улучшение результата.

### Литература

1. Jarosław Arabas. Wykłady z algorytmów ewolucyjnych – Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2001. – 304 s.
2. David E. Goldberg. Algorytmy genetyczne i ich zastosowania – Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2003. – 408 s.
3. Zbigniew Michalewicz. Algorytmy genetyczne + struktury danych = programy ewolucyjne. – Warszawa: Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 2003. – 430 s.

## АНАЛИЗ ЭЛЕКТРОЭНЦЕФАЛОГРАММ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ БОЛЕЗНИ АЛЬЦГЕЙМЕРА С ПОМОЩЬЮ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

*Кирьянов Д. П., БГТУ, Брест*

Как и в целом в психофизиологии, большинство традиционных методов анализа электроэнцефалограмм (ЭЭГ) в явной или неявной форме основано на линейном подходе. Рассмотрение же деятельности мозга с позиций теории сложных систем побудило ряд исследователей пересмотреть свои взгляды на природу ЭЭГ. Так, если в случайном процессе непредсказуемость является результатом вклада в него большого числа независимых величин, то в хаотическом процессе непредсказуемость, нерегулярность является результатом чрезвычайной чувствительности системы к начальным условиям, то есть критической зависимости траекторий системы от минимального изменения начальных условий.

### 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

Основной задачей рассматриваемого в данной работе метода является определение уровня хаотичности исходного сигнала электроэнцефалограммы, как индикатора степени обострения диагностируемого заболевания нервной системы. В качестве количественной меры хаотичности будет использован старший показатель Ляпунова (экспонента Ляпунова).



Оценка размерности аттрактора исходной хаотической системы и вычисления показателя Ляпунова основана на использовании для этих целей аттрактора, полученного при помощи так называемой псевдофазовой реконструкции, т.е. отображения, в котором точке  $x(t)$  временного ряда ставит в соответствие точку  $(x(t), x(t-\tau), \dots, x(t-(m-1)\cdot\tau)) \in R^m$ , где  $t$  – дискретное время,  $\tau$  – временная задержка (в дискретах времени) и  $m$  – размерность пространства вложения. Реконструированный таким образом аттрактор сохраняет важнейшие топологические свойства и динамику оригинального аттрактора.

Для выбора временной задержки  $\tau$  будем использовать метод взаимной информации. Пусть  $(a, b) \in R^1$  – минимальный интервал, содержащий все значения временного ряда. Разобьем данный интервал на  $L$  равных частей. Обозначим событие «значение  $x(t)$  принадлежит  $i$ -му интервалу» через  $A_i$ , а событие «значение  $x(t+\tau)$  принадлежит  $j$ -му интервалу» через  $B_j$ . Тогда функция взаимной информации определяется соотношением:

$$I(\tau) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L P(A_i B_j) \cdot \log_2 \frac{P(A_i B_j)}{P(A_i) P(B_j)}, \quad (1)$$

где  $P(\cdot)$  – вероятность соответствующего события.

В данном методе оптимальная задержка выбирается в соответствии с первым минимумом функции  $I(\tau)$ .

Выбираем исходную точку  $X(0)$  в области притяжения аттрактора и находим ближайшую к ней точку  $X'(0)$  таким образом, чтобы расстояние между ними было достаточно малым:  $d(0) = |X(0) - X'(0)| \approx 10^{-8}$ . Затем отслеживаем эволюцию этих двух точек на фазовой траектории до тех пор, пока  $d(n) < 1$ . Строим график зависимости  $\ln d(n)$  от  $n$  и прямую регрессии, наклон которой соответствует наибольшему показателю Ляпунова.

Описанный выше метод характеризуется большой вычислительной сложностью и невозможностью применения для малого объема исходных данных. Это связано с тем, что трудно найти две точки ряда, отстоящие друг от друга на расстояния меньше чем  $10^{-8}$ . Рассматриваемым в данной работе путём преодоления этого недостатка является применение нейронных сетей для вычисления старшего показателя Ляпунова. Эта процедура может быть представлена следующим алгоритмом:

1. Обучаем нейронную сеть на прогнозирование по методу скользящего окна и выбираем любую точку  $x(t)$  из обучающей выборки и формируем следующий набор данных:  $\{x(t), x(t-\tau), \dots, x(t-(k-1)\tau)\}$ , где  $k$  – размер окна.
2. Вычисляем  $\{x(t+\tau), x(t+2\tau), \dots, x(t+n\tau)\}$  используя многошаговый прогноз.
3.  $x(t+i\tau) = F(x(t+(i-1)\tau), x(t+(i-2)\tau), \dots, x(t+(i-k)\tau))$ , где  $i = \overline{1, n}$ ,  $F$  – нелинейная функция.
4. Вычисляем  $x'(t) = x(t) + d_0$ , где  $d_0 \approx 10^{-8}$  и, подавая на сеть  $\{x'(t), x(t-\tau), \dots, x(t-(k-1)\tau)\}$  повторяем шаг 2 для получения  $x'(t+i\tau)$ .
5. Оцениваем  $\ln(d_i) = \ln|x'(t+i\tau) - x(t+i\tau)|$  и выбираем только точки, где  $\ln(d) < 0$ . Строим график  $\ln(d_n)$  от  $n$ . Строим прямую регрессии для выбранных точек и вычисляем её наклон, который равен наибольшему показателю Ляпунова.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Из открытых источников сети Интернет были взяты данные ЭЭГ-сигналов следующих двух человек: молодой здоровый индивидуум (с закрытыми и открытыми глазами); пациент, страдающий болезнью Альцгеймера (с закрытыми и открытыми глазами). Сиг-

налы были записаны с частотой дискретизации 128 Гц и 256 уровнями квантования в течение 8 секунд. Таким образом, объём выборки составил 1024 значений на канал.

В процессе экспериментов для вычисления старшего показателя Ляпунова для исследуемых сигналов использовалась компьютерная программа, реализованная мной по описанному выше алгоритму. Для прогнозирования был использован многослойный персептрон с одним скрытым слоем и одним выходным нейроном, в процессе экспериментов предполагалась возможность варьировать количество входных нейронов ( $n$ ) и количество нейронов в скрытом слое ( $m$ ). В основном эксперименты проводились с  $n=14$  и  $m=9$ . При работе с упомянутыми сигналами размер выборки обучения варьировался от 400 до 1000 значений.

Результаты проведённых экспериментов прежде всего показали, что описанный алгоритм и программное обеспечение на его основе с успехом могут применяться для определения степени хаотичности электроэнцефалографических сигналов (см. рис. 1). В целом усреднённый старший показатель Ляпунова для пациента, страдающего болезнью Альцгеймера оказался на 2.4% ниже здорового человека (см. рис.2), однако следует учитывать индивидуальные психологические и биологические особенности обследуемого, так как характеристики сигнала ЭЭГ изменяются со временем в результате умственной или физической деятельности человека, а также характер этой деятельности (рутинный, спонтанный и т.д.).

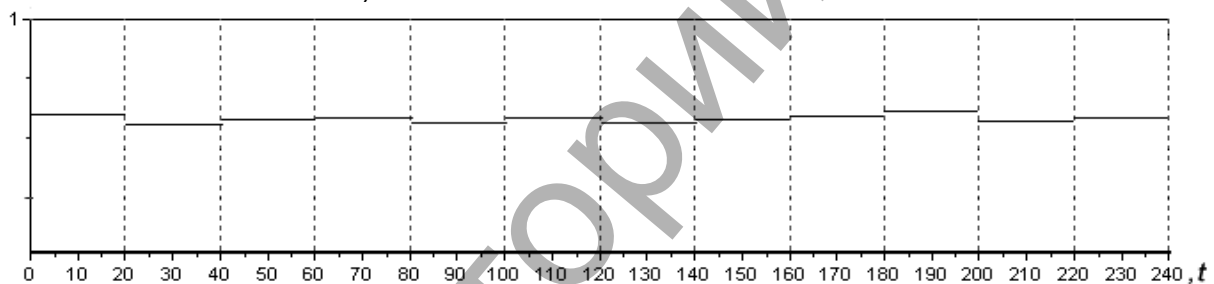


Рис.1. Временная зависимость уровня хаотичности сигнала ЭЭГ

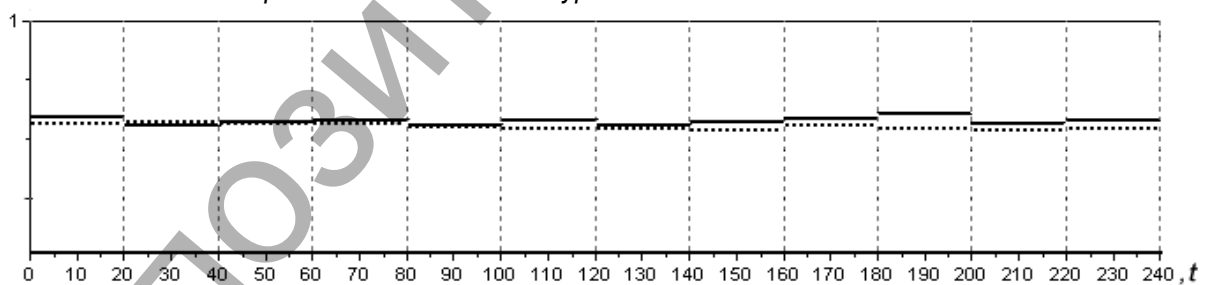


Рис.2. Хаотичность сигнала ЭЭГ здорового человека (сплошные отрезки) выше чем сигнала больного (пунктирные отрезки)

Применение описанного алгоритма с целью выделения интервалов разной хаотичности, а также с целью выявления тенденций роста или падения уровня хаотичности сигнала в совокупности с накопленными персональными статистическими данными пациента позволит диагностировать заболевания ЦНС, а также определять моменты наступления приступов (эпилепсии).

### Литература

1. Babloyantz A. and Destexhe A. Low-dimensional chaos in an instance of epilepsy. - Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1986, vol. 83, pp. 3515-3517
2. Андреев Ю.В., Дмитриев А.С., Куминов Д.А. Хаотические процессоры. – Успехи современной радиоэлектроники, 1997, №10, с. 50-79

## АНАЛИЗ ВХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ НЕЙРОСЕТЕВОЙ СИСТЕМЫ ОБНАРУЖЕНИЯ АТАК В РАЗЛИЧНЫХ СЕТЕВЫХ ОКРУЖЕНИЯХ

*Кочурко П. А., БГТУ, Брест*

Системы обнаружения атак (СОА) используются для обнаружения различных типов атак. Они объединяются с межсетевыми экранами и другими средствами обеспечения безопасности для того, чтобы своевременно оповещать персонал в случае обнаружения подозрительной активности. На текущий момент в обнаружении атак используются различные технологии [1], в том числе и искусственные нейронные сети (ИНС), которые могут применяться на разных этапах обнаружения атак: в качестве детектора аномалий [2], в качестве детектора злоупотреблений или распознавания типа атаки [3], на этапе предобработки данных для уменьшения размерности входных данных и др.; для различных целей применяются и различные архитектуры ИНС.

В качестве входных данных для анализа сетевой активности наиболее часто берутся журналы регистрации [1] или непосредственно данные сетевого трафика [1-3]. В любом случае, вопрос выделения признаков для анализа решается в итоге чаще всего одинаково: и записи журналов регистрации, и данные трафика конвертируются в записи о соединениях, анализ которых значительно эффективнее, чем анализ пакетов. Параметры, которые могут подаваться на вход СОА, варьируются в зависимости от целей и технологии работы детектора и делятся на следующие группы:

- внутренние параметры соединения – такие как длительность работы, количество переданных байт, порты, флаг результата и т. д.;
- параметры данных – количество попыток и отказов регистрации в системе, shell-запросов и т. п.;
- статистические параметры – количество соединений с данным сервисом, количество запросов от данного хоста в течение последних  $n$  секунд и т. п.

ИНС в качестве детекторов атак [2-3] применялись следующим образом: на небольшой выборке из базы данных KDD нормальных соединений и/или соединений-атак обучались соответствующие ИНС, после чего, благодаря способности к обобщению и функционированию в окружении с большим количеством шумов, они становятся способны обнаруживать атаки во всех соединениях в данной базе, причём процент ошибок зачастую значительно меньше, чем при применении других методов обнаружения атак. Однако при анализе реального сетевого трафика таким обученным детектором процент ложных срабатываний неожиданно многократно возрастает.

Для выяснения причины данного явления проанализируем параметры, подающиеся на вход сетей в [3]: длительность работы соединения, количество переданных байт в обе стороны, флаг результата соединения, тип протокола, сервис, флаг регистрации в системе (logged in). Шесть из семи параметров относятся к внутренним параметрам соединений, последний – параметр данных. Могут ли различаться данные параметры для сходных по природе нормальных соединений в различных сетевых окружениях настолько, чтобы быть принятыми за атаку?

Рассмотрим два одинаковых TCP соединения, которые установлены с одним и тем же удаленным сокетом с хостов в разных сетевых окружениях. Из перечисленных выше

у них точно не должны различаться типы протокола, сервис, флаг регистрации. При одинаково успешном (или не успешном) результате работы соединений флаг результата тоже должен быть одинаковым. Разниться же могут количества переданных байт (но не сильно), и, главным образом, длительность работы соединения, например, вследствие различий в скорости и технологии подключения к сети Интернет или в скорости передачи данных внутри сети. Статистический анализ данных входных параметров и результатов показывает, что данные параметры наиболее существенно влияют на качество обнаружения атак.

Как можно избежать проблем, связанных с различными значениями параметров сходных по природе соединений в различных сетевых окружениях? Поставлен следующий эксперимент: на трёх хостах в различных сетях с разной скоростью доступа в Интернет (dial-up, Ethernet, dial-up) запрашивались из веб-браузера подряд шесть URL (протокол – tcp, сервис – http): <http://ibrest.net>; <http://dynamo.brest.by>; <http://santa-bremor.com>; <http://mail.tut.by>; <http://santa-bremor.com/products/surimi/ru>; <http://www.bstu.by>; <http://iit.bstu.by>. Естественно, что результат, который был получен в браузере, ничем друг от друга не отличался. Сниффер (разработанный на технологии WinPCap) же выдал следующие параметры (таблица 1).

Как видно из таблицы, идентичные действия в различных сетевых окружениях приводят к различной сетевой активности, вплоть до различных количеств соединений и пакетов. Сравним длительности работы соединений в различных сетях (Рис. 1).

Таблица 1 – Результаты работы

	Пакетов	TCP	UDP	ICMP	Соед.
Dial-up 1 (2)	2866	2787	78	1	177
Dial-up 1 (3)	2728	2650	77	1	179
Ethernet (4)	2757	2757	0	0	144
Ethernet (5)	2721	2721	0	0	149
Ethernet (6)	2783	2779	4	0	156
Dial-up 2 (7)	2249	2197	52	0	87
Dial-up 2 (8)	2278	2234	28	0	92

Как видно из рисунка 1, длительности работы нормальных соединений одинакового характера в разных сетевых окружениях серьёзно варьируются. Кроме того, даже одинаковые соединения в одной сети работают с разной продолжительностью, хотя и более сходно, чем в разных сетях.

Для того, чтобы получить сходные значения параметров соединений одинаковой природы перед подачей на вход СОА их необходимо статистически нормировать:

$$x_i^1 = (x_i^0 - M_i) / \sigma_i. \quad (1)$$

Таким образом, учитывая среднее значение длительности работы соединения, мы в какой-то мере учитываем среднюю скорость передачи данных в данной сети и от рассмотрения параметра «длительность работы соединения» переходим к параметру «нормированное отклонение от средней длительности». Рисунок 2 показывает, что значения в различных средах становятся намного более сходными.

Аналогичный анализ для количества переданных и полученных байт показывает, что нормирование данных параметров не влияет на степень подобия в различных средах – ненормированные и нормированные значения дают примерно одинаковую картину.

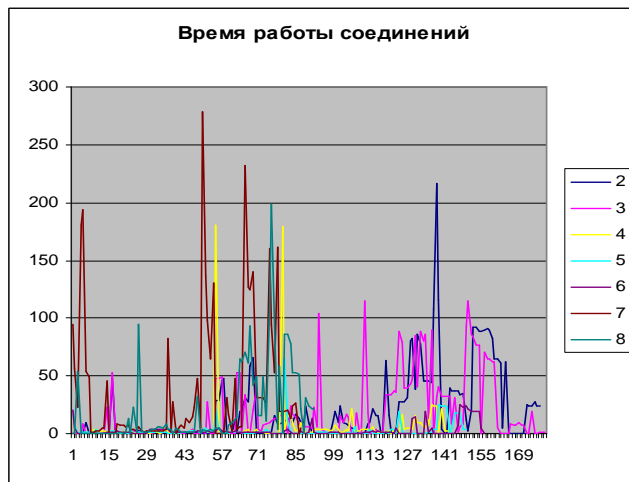


Рисунок 1 – Длительности работы соединений

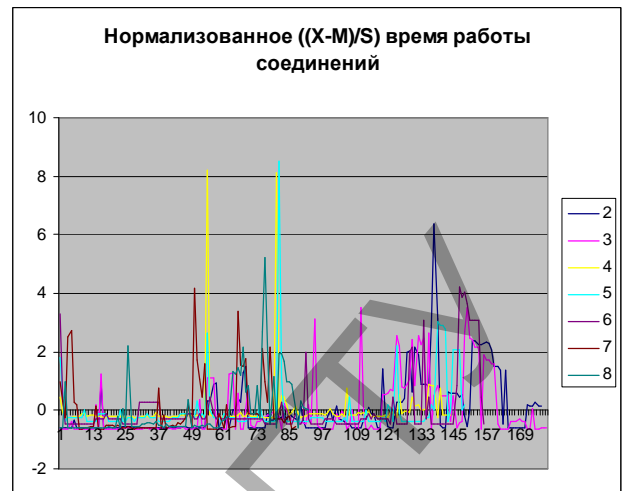


Рисунок 2 – Нормированные длительности

### Литература

1. S. T. Brugger. Data Mining Methods for Network Intrusion Detection. <http://www.bruggerink.com/~zow/Projects.html>
2. П. Кочурко. Нейросетевой детектор аномалий. Известия Белорусской инженерной академии, № 1(19)/2'2005 – с. 78-81.
3. Vladimir Golovko, Pavel Kochurko. *Intrusion Recognition Using Neural Networks*. In Proc. of IDAACS'2005, September, Sofia, Bulgaria, 2005

## НЕЛИНЕЙНАЯ МНОГОСЛОЙНАЯ НЕЙРОННАЯ СЕТЬ В ЗАДАЧЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПОТРЕБЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГИИ.

Кочурко Ю.В., БГТУ, Брест

### Введение

Предсказание потребления электроэнергии является актуальной задачей и играет ключевую роль в технико-экономическом функционировании объектов энергосистемы. Так, владение предварительными данными о нагрузке, с экономической стороны, позволяет значительно усовершенствовать тарифную политику для объектов энергопотребления и, тем самым, снизить коммерческие потери, а с технической – обеспечивает экономный и безопасный режим работы энергосистемы.

Начиная с 1990 года, активно рассматриваются возможности применения нейронных сетей для решения задачи предсказания нагрузки путем прогнозирования. В настоящее время имеется множество научных публикации, в которых рассматривается возможность прогнозирования нагрузок с помощью нейрокомпьютеров [1-3]. Также рассматривается задача построения краткосрочных предсказаний нагрузок с повышенной точностью. Исследована релевантность нескольких известных моделей. Предложен новый метод прогнозирования, основанный на использовании трехслойных искусственных нейронных сетей с комбинированной структурой, объединяющих линейные и нелинейные схемы.

### 1. Описание нейронной сети для решения задачи прогнозирования

Для решения задачи прогнозирования потребления электроэнергии использовалась нелинейная многослойная нейронная сеть (многослойный персептрон), поскольку ее

способность к аппроксимации любой непрерывной нелинейной функции обеспечивает хороший результат прогнозирования. Обобщенная структура данной сети представлена на рисунке 1.

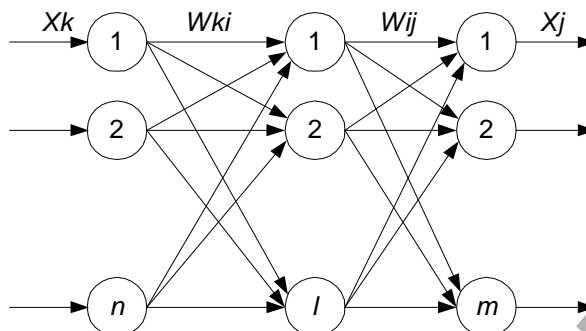


Рис. 1. Трехслойная нейронная сеть

В качестве исходных использовались реальные данные, полученные путем измерений на электростанциях за период времени с 1.01.2004 по 1.10.2004 года.

С помощью программного пакета Tisean 2.1 была исследована обучающая выборка и определены такие параметры временных рядов, как размерность пространства вложения и временная задержка, т.к. наличие этих показателей позволяет значительно снизить затраты времени на формирование модели прогнозирования. Исследовались входные данные за июль и сентябрь. Поскольку временная задержка временного ряда для этих периодов получилась различной, то целесообразно тестировать систему не на всей выборке, а именно на выборках за различный период.

Значение параметра пространства вложения говорит о том, что для хорошего прогноза необходимо, чтобы количество нейронных элементов входного и скрытого слоя было больше чем значение данного параметра.

Учитывая вышеупомянутые параметры, была выбрана архитектура нейронной сети, состоящая из трех слоев: входного, скрытого и выходного, а количество нейронных элементов в каждом слое составляло 6–5–2 соответственно. В качестве алгоритма обучения использовался алгоритм обратного распространения ошибки, а в качестве функции активации нейронных элементов – сигмоидная функция.

Для оценки качества прогнозирования воспользуемся показателем процентной погрешности MAPE (англ.: Mean Absolute Percentage Error), определяемой в виде

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|P_t - P'_t|}{P_t} * 100\%, \quad (1)$$

где  $P'$  – прямое спрогнозированное значение,  $P$  – фактическая нагрузка системы, а  $n$  число часов, на которые составляется прогноз.

Рассмотрим результаты 96-часового прогноза нагрузки и температуры, полученные с помощью разработанной сети. На вход сети последовательно подавались нагрузка и температура  $W(t)$ ,  $T(t)$ ,  $W(t-1)$ ,  $T(t-1)$ ,  $W(t-2)$ ,  $T(t-2)$ , ...,  $W(t-n)$ ,  $T(t-n)$ , а на выходе получали нагрузку и температуру в следующий момент времени  $W(t+1)$ ,  $T(t+1)$ .

Результаты прогноза нейронной сети с описанной выше архитектурой имели достаточно высокую погрешность, поэтому для ее снижения было увеличено количество нейронных элементов во входном и скрытом слоях, количество которых было подобрано экспериментально и составило: 22 – 22 – 2 нейронных элемента соответственно.

Сеть обучалась с использованием данных за июль и сентябрь 2004 года и показала достаточно хороший результат. Минимальная погрешность MAPE для этих периодов составила 3 – 4%.

На рисунке 2 представлен результат прогнозирования нагрузки и температуры за сентябрь.

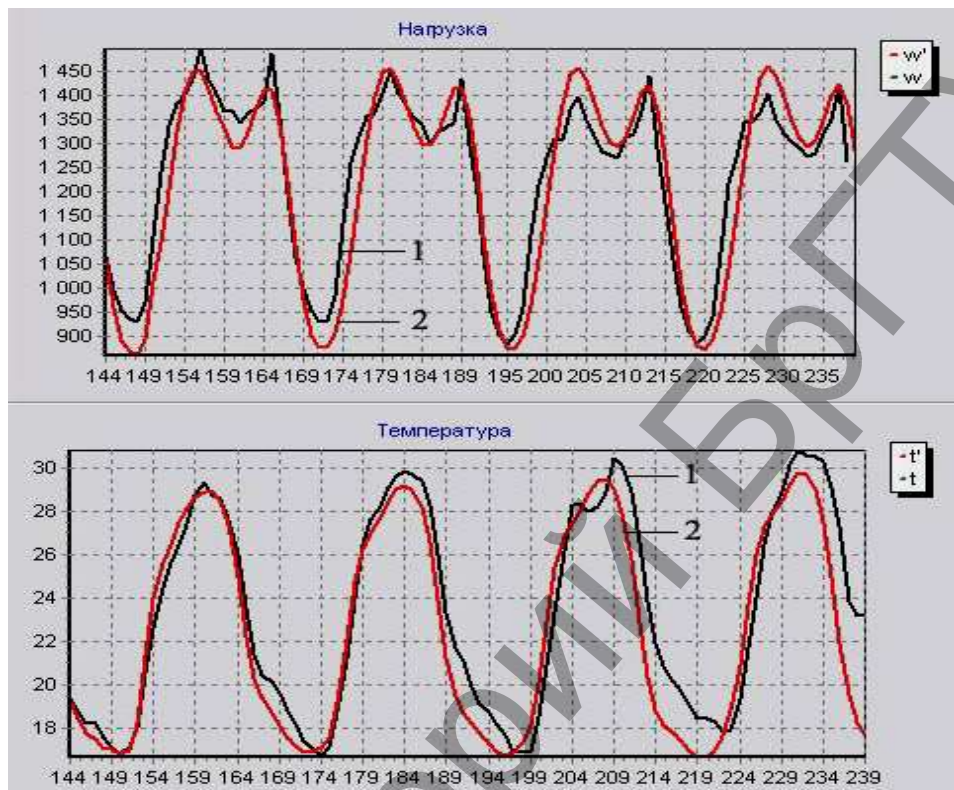


Рис. 2. Результаты прогноза (1 – эталонные значения, 2 – спрогнозированные значения)

### Заключение

В работе рассмотрена возможность применения многослойного персептрона для прогнозирования потребления электроэнергии. Как показали эксперименты, использование нейронной сети с такой архитектурой и алгоритма обратного распространения ошибки, как алгоритма обучения, позволяет эффективно прогнозировать нагрузку.

### Литература

1. Peng T.M., Hubele N.F., Karady G.G. Conceptual approach to the application neural networks for short-term load forecasting. / IEEE Int. Symp. Circuits and Syst., May 1-3, vol.4, 1990 p.2942-2945.
2. Bakirtzis A.G. Short term load Forecasting Using Fuzzy neural networks. / IEEE Power Eng. Review, vol.10, N3, Aug. 1995.
3. Станислав Осовский. Нейронные сети для обработки информации: пер. с пол. – М.: Финансы и статистика, 2004.
4. Головкин В.А. Нейрокомпьютеры и их применение: книга 4. Нейронные сети: обучение, организация и применение/ Под редакцией А.И. Галушкина.- М.: ИПРЖР, 2001.

## АЛГОРИТМ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННОЙ СЕТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Лахмицкий А.А., БГТУ, Брест

Рассмотрим нейронную сеть, состоящую из  $n$  нейронных элементов распределительно-го слоя и  $m$  - выходного слоя (рис. 1).

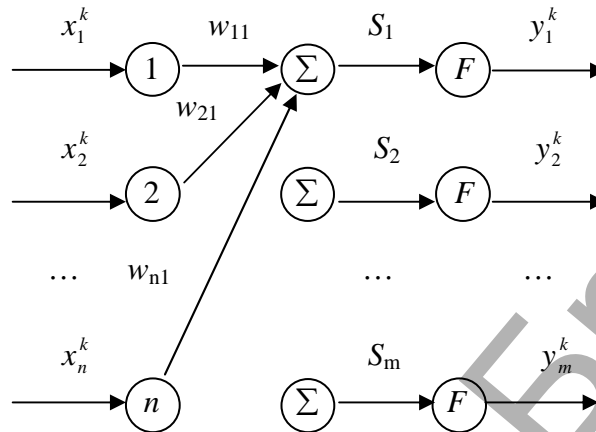


Рис. 1. Схема функционирования нейронной сети

Для данной сети каждый нейрон распределительного слоя имеет синаптические связи  $w_{ij}$ , ( $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ) со всеми нейронами обрабатывающего слоя. В качестве нейронов выходного слоя используются элементы с некоторой функцией активации  $F$  [1, 2]. На вход сети подаются входные образы – векторы  $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)$  ( $k = \overline{1, L}$ ).

Выходное значение  $j$ -ого нейрона сети для  $k$ -ого образа определяется выражением:

$$y_j^k = F(S_j^k), \text{ где } S_j^k = \sum_{i=1}^n w_{ij} x_i^k - T_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, L}. \quad (1)$$

Задача обучения нейронной сети с фиксированной функцией активации  $F$  состоит в нахождении весовых коэффициентов  $w_{ij}$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ) и порогов нейронных элементов  $T_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ), которые минимизируют некоторую ошибку сети  $E_S$ , как отклонение выходных значений  $y_j^k$  от эталонных значений  $t_j^k$  –  $j$ -ого нейрона сети для  $k$ -ого образа. В качестве ошибки сети можно рассмотреть “квадратичное отклонение”

$E_S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^m (y_j^k - t_j^k)^2$ , которое будем называть квадратичной ошибкой сети.

Столбец  $\vec{W} = (w_{11}, w_{21}, \dots, w_{n1}, T_1, w_{12}, w_{22}, \dots, w_{n2}, T_2, \dots, w_{1m}, w_{2m}, \dots, w_{nm}, T_m)^T$  будем называть приближенным решением или просто решением системы (по методу наименьших квадратов):

$$F\left(\sum_{i=1}^n w_{ij} x_i^k - T_j\right) = t_j^k, \quad j = \overline{1, m}, \quad k = \overline{1, L},$$

если “квадратичное отклонение”  $E_S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^m \left(F\left(\sum_{i=1}^n w_{ij} x_i^k - T_j\right) - t_j^k\right)^2$  достигает своего наименьшего значения.

Рассмотрим дважды непрерывно дифференцируемую функцию  $E_S(t)$  – ошибку сети, как функцию нескольких переменных:

$$E_S(w_{11}, w_{21}, \dots, w_{n1}, T_1, w_{12}, w_{22}, \dots, w_{n2}, T_2, \dots, w_{1m}, w_{2m}, \dots, w_{nm}, T_m).$$



Разложим функцию в ряд Тейлора, ограничиваясь частными производными второго порядка включительно:

$$E_s(t+1) = E_s(t) + (\nabla E_s(t), \bar{W}(t+1) - \bar{W}(t)) + \frac{1}{2} (\nabla^2 E_s(t) \cdot (\bar{W}(t+1) - \bar{W}(t)), \bar{W}(t+1) - \bar{W}(t)),$$

где

$$\nabla E_s(t) = \left( \frac{\partial E_s}{\partial w_{11}}, \frac{\partial E_s}{\partial w_{21}}, \dots, \frac{\partial E_s}{\partial w_{n1}}, \frac{\partial E_s}{\partial T_1}, \frac{\partial E_s}{\partial w_{12}}, \frac{\partial E_s}{\partial w_{22}}, \dots, \frac{\partial E_s}{\partial w_{n2}}, \frac{\partial E_s}{\partial T_2}, \dots, \frac{\partial E_s}{\partial w_{1m}}, \frac{\partial E_s}{\partial w_{2m}}, \dots, \frac{\partial E_s}{\partial w_{nm}}, \frac{\partial E_s}{\partial T_m} \right)^T -$$

вектор градиента функции  $E_s(t)$ ,  $\nabla^2 E_s(t)$  – матрица Гессе вторых производных функции  $E_s(t)$  в момент времени  $t$ .

Учитывая, что в соответствии с идеей метода сопряженных градиентов

$$\bar{W}(t+1) = \bar{W}(t) - \alpha(t) \cdot \nabla E_s(t) + \beta(t) \cdot (\bar{W}(t) - \bar{W}(t-1)), \quad (2)$$

и введя обозначение  $\Delta \bar{W}(t) = \bar{W}(t) - \bar{W}(t-1)$ , получим

$$\begin{aligned} E_s(t+1) &= E_s(t) + (\nabla E_s(t), -\alpha(t) \cdot \nabla E_s(t) + \beta(t) \cdot \Delta \bar{W}(t)) + \\ &+ \frac{1}{2} (\nabla^2 E_s(t) \cdot (-\alpha(t) \cdot \nabla E_s(t) + \beta(t) \cdot \Delta \bar{W}(t)), -\alpha(t) \cdot \nabla E_s(t) + \beta(t) \cdot \Delta \bar{W}(t)) = \\ &= E_s(t) - \alpha(t) \cdot (\nabla E_s(t), \nabla E_s(t)) + \beta(t) \cdot (\nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t)) + \frac{1}{2} \alpha^2(t) (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \nabla E_s(t)) - \\ &- \alpha(t) \beta(t) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t)) + \frac{1}{2} \beta^2(t) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \Delta \bar{W}(t), \Delta \bar{W}(t)). \end{aligned}$$

Найдем критические точки функции  $E_s(t+1) = E_s(\alpha; \beta)$ , как функции двух переменных.

Для этого найдем частные производные функции  $E_s(\alpha; \beta)$  и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_s}{\partial \alpha} = -(\nabla E_s, \nabla E_s) + \alpha \cdot (\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \nabla E_s) - \beta \cdot (\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \Delta \bar{W}) = 0 \\ \frac{\partial E_s}{\partial \beta} = (\nabla E_s, \Delta \bar{W}) - \alpha \cdot (\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \Delta \bar{W}) + \beta \cdot (\nabla^2 E_s \cdot \Delta \bar{W}, \Delta \bar{W}) = 0 \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} \alpha(t) = \frac{\|\nabla E_s(t)\|^2 \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \Delta \bar{W}(t), \Delta \bar{W}(t)) - (\nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t)) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t))}{(\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \nabla E_s(t)) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \Delta \bar{W}(t), \Delta \bar{W}(t)) - (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t))^2} \\ \beta(t) = \frac{\|\nabla E_s(t)\|^2 \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t)) - (\nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t)) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \nabla E_s(t))}{(\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \nabla E_s(t)) \cdot (\nabla^2 E_s(t) \cdot \Delta \bar{W}(t), \Delta \bar{W}(t)) - (\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \Delta \bar{W}(t))^2} \end{cases} \quad (3)$$

Вычислим частные производные второго порядка функции  $E_s(\alpha; \beta)$ :

$$\frac{\partial^2 E_s}{\partial \alpha^2} = (\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \nabla E_s), \quad \frac{\partial^2 E_s}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial^2 E_s}{\partial \beta \partial \alpha} = -(\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \Delta \bar{W}) \text{ и}$$

$$\frac{\partial^2 E_s}{\partial \beta^2} = (\nabla^2 E_s(t) \cdot \Delta \bar{W}, \Delta \bar{W}).$$

Тогда гессиан  $|\nabla^2 E_s(\alpha; \beta)|$  функции  $E_s(\alpha; \beta)$  равен

$$\begin{aligned} |\nabla^2 E_s(\alpha; \beta)| &= \begin{vmatrix} (\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \nabla E_s) & -(\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \Delta \bar{W}) \\ -(\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \Delta \bar{W}) & (\nabla^2 E_s \cdot \Delta \bar{W}, \Delta \bar{W}) \end{vmatrix} = \\ &= (\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \nabla E_s) \cdot (\nabla^2 E_s \cdot \Delta \bar{W}, \Delta \bar{W}) - (\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \Delta \bar{W})^2. \end{aligned}$$

В случае если  $|\nabla^2 E_s(\alpha; \beta)| > 0$  и  $(\nabla^2 E_s \cdot \nabla E_s, \nabla E_s) > 0$ , то функция  $E_s(\alpha; \beta)$  достигает минимального значения при  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ , определяемыми соотношениями (3).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема.** Величины квазиоптимальных параметров  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$  шага обучения нейронной сети с использованием метода сопряженных градиентов в момент времени  $t$  определяется соотношениями (3):

Приведем алгоритм обучения нейронной сети с использованием метода сопряженных градиентов, использующий соотношения (3):

1. Задается минимальная квадратичная ошибка сети  $\varepsilon_m$ , которой необходимо достичь в процессе обучения.

2. Записывается число  $t=0$  в счетчик числа итераций алгоритма.

3. Случайным образом инициализируются весовые коэффициенты сети  $w_{ij}(t)$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ), и пороговые значения нейронных элементов  $T_j(t)$  ( $j = \overline{1, m}$ ).

4. Подаются входные образы  $\overline{x^k} = (x_1^k, \dots, x_n^k)$  ( $k = \overline{1, L}$ ) на нейронную сеть и вычисляются векторы  $\overline{y^k}(t) = (y_1^k(t), \dots, y_m^k(t))$  ( $k = \overline{1, L}$ ) выходной активности сети, определяемые соотношениями (1).

5. Если  $t \neq 0$ , то величины квазиоптимальных параметров  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  шага обучения с использованием метода сопряженных градиентов вычисляются в соответствии с соотношениями (3), в противном случае параметр  $\alpha(t)$  определяется выражением

$\alpha(t) = \frac{(\nabla E_s(t), \nabla E_s(t))}{(\nabla^2 E_s(t) \cdot \nabla E_s(t), \nabla E_s(t))}$  [2], а  $\beta(t)$  полагается равным нулю.

6. Производится изменение весовых коэффициентов  $w_{ij}(t+1)$  ( $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ) и порогов нейронной сети  $T_j(t+1)$  ( $j = \overline{1, m}$ ) согласно выражению (2).

7. Полагается  $t=t+1$ .

8. Алгоритм завершает свою работу, если суммарная квадратичная ошибка сети  $E_s(t) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^L (y_j^k(t) - t_j^k)^2$  или норма вектора  $\overline{\Delta W}(t) = \overline{W}(t) - \overline{W}(t-1)$  не превосходят заданной величины  $\varepsilon_m$ , т. е.  $E_s(t) \leq \varepsilon_m$  или  $\|\overline{\Delta W}(t)\| < \varepsilon_m$ , в противном случае выполняется п. 4.

### Литература

1. Головкин В.А. Нейронные сети: обучение, организация и применение. Кн. 4: Учебное пособие для вузов / Общая ред. А.И. Галушкина. – М.: ИПРЖР, 2001. – 256 с.: ил. (Нейрокомпьютеры и их применение).

2. Гладкий И.И., Головкин В.А., Махнист Л.П. Обучение нейронных сетей с использованием метода наискорейшего спуска // Вестник Брестского государственного технического университета. – Брест: БГТУ, 2001. – № 5: Физика, математика, химия. – С. 47-55.

## ПРИМЕНЕНИЕ НЕЙРОПОДОБНЫХ СЕТЕЙ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧ РЕКУРСИВНОГО ФОРМООБРАЗОВАНИЯ

Полозков Ю. В., ВГТУ, Витебск

Искусственные нейронные сети позволяют эффективно решать широкий круг аналитических информационных задач. В компьютерной технологии изготовления пространственно сложных (нерегулярных) объектов [1] - рекурсивном формообразовании – к таким задачам относятся обработка изображений; организация баз данных, содержащих

цифровые модели поверхностей; оценка эффективности создания геометрических моделей по сравнению с использованием трансформационного преобразования имеющихся цифровых моделей поверхностей.

Особенность технологии рекурсивного формообразования состоит в сокращении степени человеческого участия на этапе проектирования изделий за счет автоматизированного геометрического описания (оцифровки) поверхностей физических объектов-аналогов, имеющих пространственно-сложную (нерегулярную) форму и последующего избирательно-редактирования полученных данных. Для оцифровки нерегулярных объектов был разработан программно-технический комплекс цифровой фотограмметрии. С его помощью реализуется специальный фотограмметрический метод, основанный на съемке наклонно установленной регистрирующей камерой объекта, поверхность которого освещается структурированным светом посредством горизонтально установленного проектора [2]. На снимках, получаемых в процессе оцифровки, отображаются проекции точек поверхности, освещенных с помощью слайда (рис. 1). Изменение кривизны последовательно расположенных проекций (световых линий) изображения обуславливается изменением формы поверхности. Вследствие имеющихся на объекте углублений, отверстий и других “неприятных” особенностей формы при обработке изображений в процессе сегментации могут изменяться количество и последовательность расположения сегментированных компонент (рис.1), что существенно снижает точность математической трансформации координат.

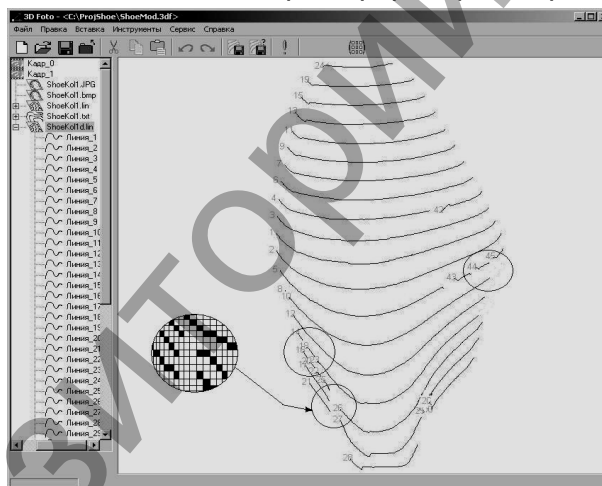


Рис. 1. Характерные неопределенности связности компонент изображения

Возникает задача структуризации и связности сегментированных компонент растрового изображения, решение которой может быть получено посредством нейросетевого анализа, позволяющего восстановить истинный их порядок. Для проведения анализа и интерпретации скелетизированного изображения были определены и формализованы следующие терминальные элементы (ТЕ): элементарная компонента (ЭК), непрерывная компонента (НК), базовая компонента (БК), фрагмент компоненты (Ф). Тип ТЕ определяется по расположению особых точек, в качестве которых выступают начальные, конечные точки ТЕ, а также их текущие точки, с координатами (по оси X или Y), равными координатам начальных и конечных точек смежных ТЕ. Комбинации указанных ТЕ описывают искомые синтезированные компоненты (СК).

На этапе предобработки данных осуществляется кластеризация ТЕ. По координатам особых точек выполняется проверка логических условий сравнения, определяющих пространственные отношения между всеми парами ТЕ. Это позволяет сформировать матрицы булевых функций. В данных матрицах, описывающих шесть возможных вариантов

отношений, индексы строк и столбцов соответствуют номерам ТЕ. Затем в результате выполнения семантических правил, описывающих сочетания пространственных отношений с элементами матриц, осуществляется построение новых (производных) матриц ТЕ, параметры (метрические, аналитические и пр.) которых будут анализироваться в дальнейшем для образования СК. Двоичные значения элементов матриц, полученных на этапе предобработки, задают внешнее возбуждение нейрона, синаптические входы которого соответствуют конкурирующим ТЕ. Отклик активированного нейрона устанавливает принадлежность ТЕ текущей цепочке или воспринимается следующими нейронами, проверяющими пространственно-логические отношения между анализируемыми ТЕ.

Сложность анализа рассматриваемых в данном случае скелетизированных изображений состоит в невозможности создания шаблонов ввиду непредсказуемости характера развития компонент изображения. Кроме того, непрерывная компонента и части дискретной компоненты могут иметь одинаковое признаковое описание. Поэтому для выработки решения о связности компонент построен трехслойный когнитрон, позволяющий реализовать конкурентный метод обучения без учителя (рис. 2) [3]. Эта самоорганизующаяся сеть включает три слоя нейронов. Нулевой слой сети является рецепторным. Количество нейронов в слое зависит от количества конкурирующих ТЕ изображения.

На первом и втором слоях сети происходит построение цепочки из БК и Ф, принадлежащих различным (последовательно расположенным) группам смежных ТЕ, ограниченных НК. При активации второго слоя на возбуждающие нейроны первого слоя, помимо латерального торможения, воздействуют тормозящие нейроны, имеющие синаптические соединения с набором выходов нейронов второго слоя. Третий слой сети построен аналогично предыдущим. Он обеспечивает выполнение принципа целостности восприятия, позволяя выбирать наиболее подходящие варианты синтеза компонент в обоих направлениях плоскости всего изображения. На этом слое по определенным критериям принимаются или отбрасываются решения, полученные на предыдущих слоях. Таким образом, реализуется способность сети к обучению, что позволяет решать вопрос неопределенности связности дискретных компонент, которая носит случайный характер и обеспечивать корректность и целостность машинной интерпретации изображения при цифровой фотограмметрии.

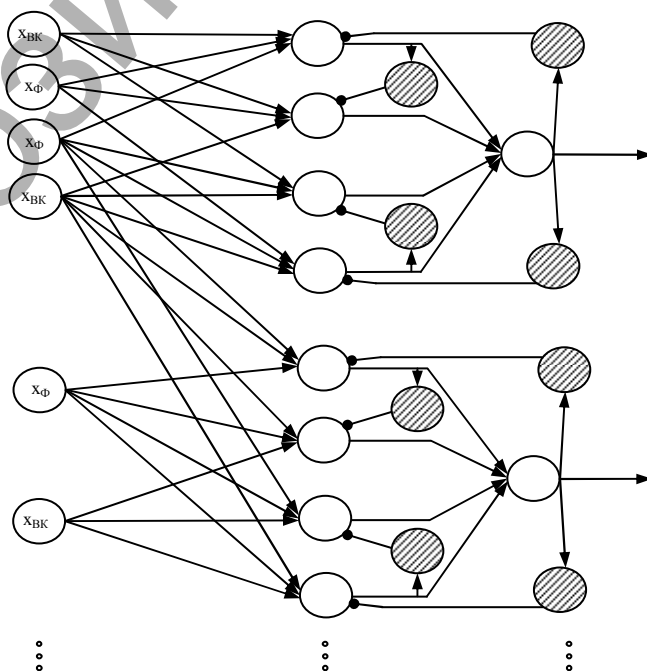


Рис. 2. Организация нейросетевой структуры первого и второго слоя

## Литература

1. Полозков Ю. В., Свирский Д. Н. Компьютерная технология рекурсивного формообразования нерегулярных поверхностей // Моделирование интеллектуальных процессов проектирования, производства и управления / ИТК НАН Беларуси. - Минск, 2002. - С. 44 - 45.
2. Свирский Д. Н., Полозков Ю. В. Создание трехмерных цифровых моделей нерегулярных объектов по их видеоизображениям // Цифровая обработка изображений. - Мн.: ИТК НАН Беларуси, 2001. - Вып. 5. - С. 33 – 38.
3. Уоссермен Ф. Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика.– 1992.–184 с.

## USING ARTIFICIAL NEURAL NETWORK AND STATISTICAL APPROACH FOR TIME SERIES FORECASTING (BY USING CLUSTERING AND CLASSIFICATION ALGORITHMS)

*I. Rubanau*

### 1. INTRODUCTION

The main aim of this paper is to create a mathematical model to forecast electricity load and to find correlation between electricity load and parameters (temperature, brightness and so on), by using clustering and classification algorithms.

From the expert knowledge are known that demand of the electricity load is highly correlated to the set of parameters, like day of the week, seasons, outside temperature, brightness and so on. Also are known that this correlation are non linear, that produce additional difficulties (obstacle) to make reasonable forecasting model.

### 2. THE MODEL

Let us split up the forecasting model (see figure 1) in to three major steps:

- 1) Clustering
- 2) Classification
- 3) Creating correlation function (mathematical model) between input and output

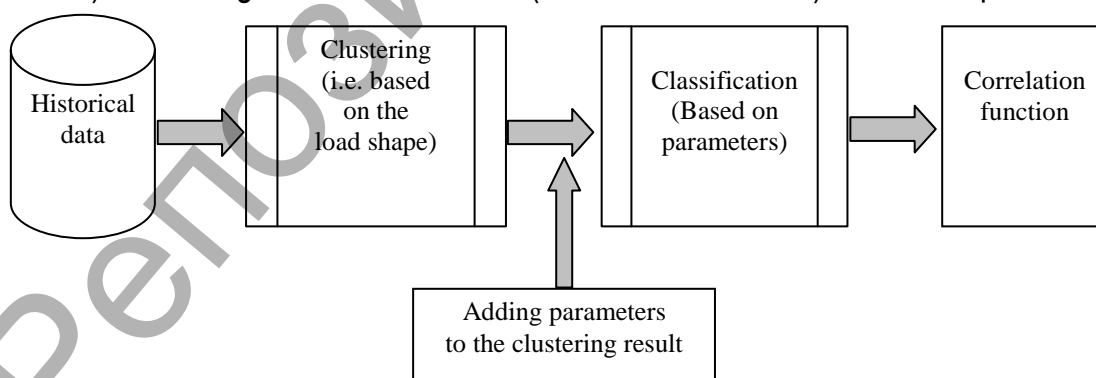


Figure 1. Mathematical model to forecast electricity load

At the first step we do clustering of the historical load data by using one of the clustering algorithm (k-means, hierarchical tree, SOM) [1,2,3], as result we have N clusters with different electricity load shapes, example of the clustering result is present in figure 2.

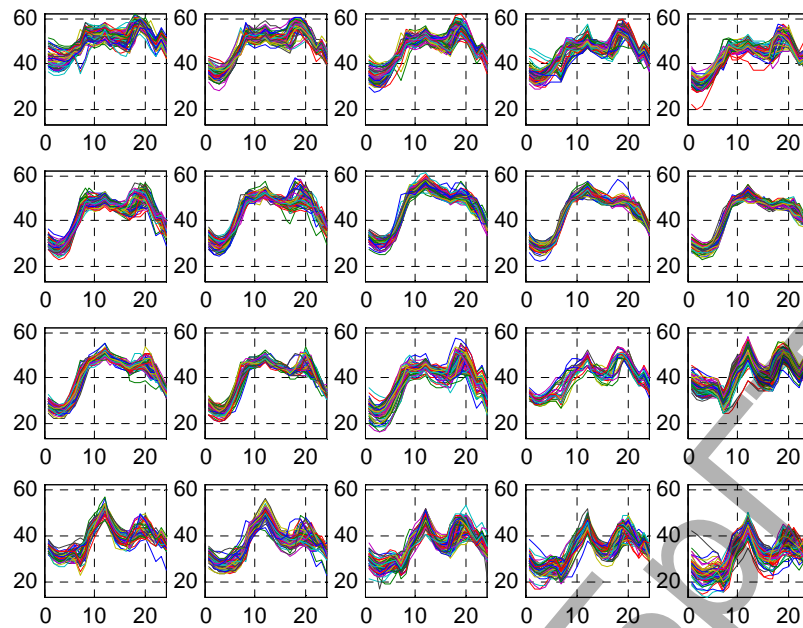


Figure 2. Clustering result

At the second step we create “parameters” table which contain description of each load curve in the cluster (i.e. days, month, season, temperature, and so on) and apply Probabilistic Neural Network algorithm to classification task [1]. The flow chart of this process you can see on figure 3. At this step we used only parameters of the day without any information about load shape at this day.

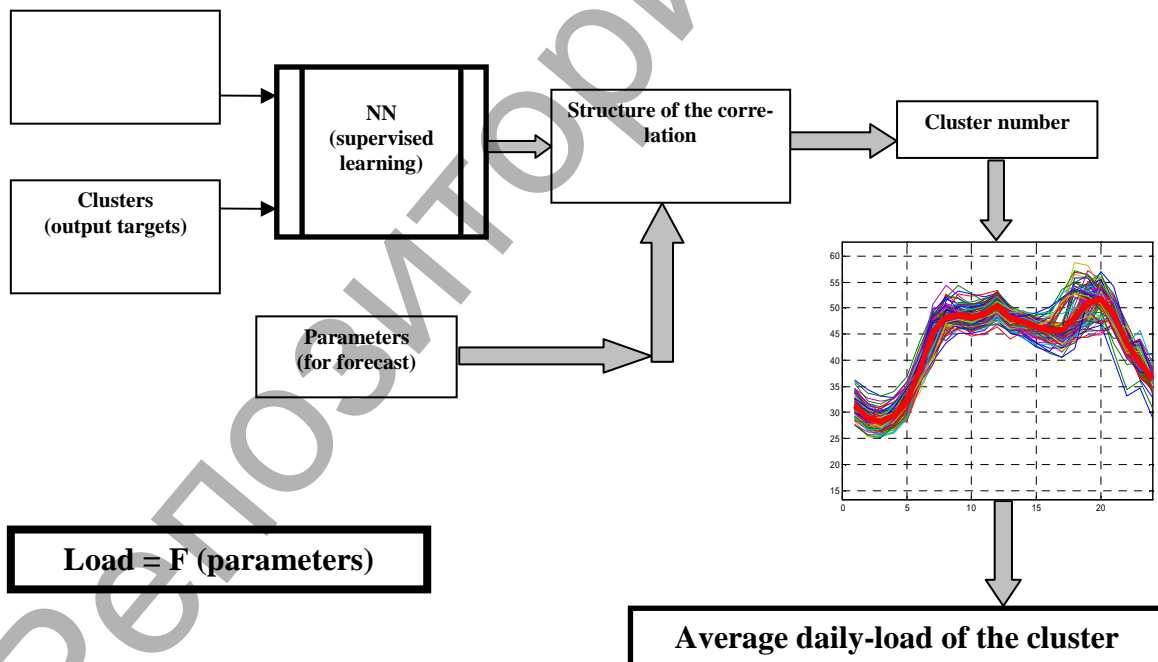


Figure 3. Flow chart of classification procedure

### 3. TESTING

The proposed model was tested with sets of historical data containing electricity load, daily temperature, brightness, wind, kind of the day from year 2000-2004 (years 2000-2003 was used as a historical data, year 2004 as a test year). The results of the simulation are presented in table 1. The error curves is presented in figure 4.

Table 1

Parameters:	MAPE	N° clusters
Week days, Saturday, Sunday, Holliday, Bridge days	8.19 %	10
Week days, Saturday, Sunday x Seasons, Holliday, Bridge days	7.30 %	15
Week days, Saturday, Sunday x Seasons, Holliday, Bridge days	7.03 %	30
Week days, Saturday, Sunday x Avg. Temp x Seasons, Holliday, Bridge days	6.85%	35
Just by taking average of year 2000-2003	9.92%	1

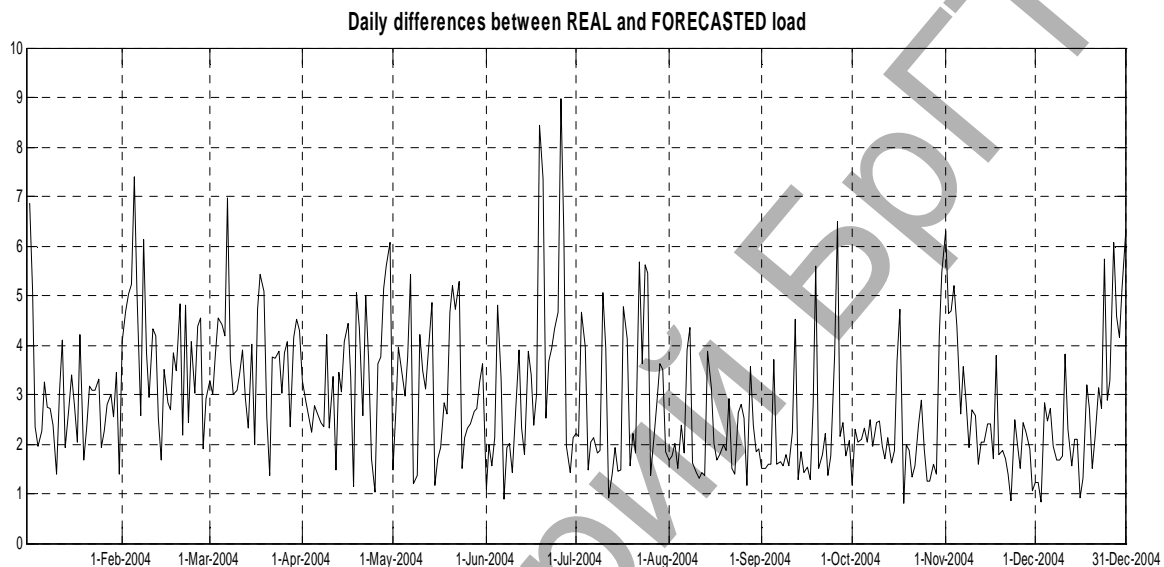


Figure 4. Error curves

### CONCLUSION

The obtained error for one-year forecast is  $MAPE \approx 7\%$ , that could be read out as good result. However, as you can see in figure 4 some days have relative big error that means some of the important parameters were missed (or in other word taking as parameters: Week days, Saturday, Sunday, Avg. Temp, Seasons, Holliday, and Bridge days was not enough to correctly classify some of the days). One of the solutions for this problem could be applying statistical methods (i.e. linear regression) to find additional parameters (i.e. hours, night temperature) for classification step.

### REFERENCES

- [1] S. Osowski, Neural network for processing the information, Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warsaw, 2000, pp. 142, 231.
- [2] GILLIAN M. MIMMACK, Choice of Distance Matrices in Cluster Analysis: Defining Regions, 26 June 2000 and 6 December 2000.
- [3] S. Borgatti, Distance and Correlation, Boston College.

## СИСТЕМА АНАЛИЗА ХАОТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ НА БАЗЕ РЕКУРРЕНТНЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

*Савицкий Ю. В., Дунец А. П., Игнатюк О. Н., БГТУ, Брест*

Нейросетевые методы анализа хаотических сигналов находят все большее применение в различных областях благодаря ряду преимуществ по сравнению с традиционными методами: возможностью исследования систем, математическая модель которых неизвестна (неизвестны математические соотношения, характеризующие поведение динамической

системы); использованием для исследований выборки данных ограниченного объёма и соответственно относительно малой вычислительной сложностью алгоритмов [1]. При этом данные методы базируются, как правило, на модели многослойного персептрона с сигмоидальными функциями активации скрытых нейронных элементов.

В то же время использование рекуррентных синаптических связей с задержкой сигнала между выходными нейронами сети и нейронами скрытого слоя (модель Джордана), либо нейронами распределительного слоя (модель Элмана), либо связями обоих типов (мульти-рекуррентная модель Джордана-Элмана) предоставляет дополнительные возможности по улучшению характеристик рассматриваемых методов. Это обусловлено тем, что наличие рекуррентных связей с задержкой сигнала позволяет при обучении и функционировании сети учитывать не только текущие данные, подаваемые на сеть, но и все предыдущие данные и состояния нейронной сети. Это создает предпосылки к тому, что рекуррентная нейросетевая модель в процессе обучения глубже учитывает и обобщает динамические свойства исследуемого процесса и, следовательно, позволит решать задачи анализа и прогнозирования на более высоком уровне качества [2].

В рамках данной работы авторами исследованы нейросетевые методы расчета старшего показателя Ляпунова на базе рекуррентных нейронных сетей вышеуказанных конфигураций. В качестве базовой архитектуры использована трехслойная нейронная сеть с сигмоидной функцией активации нейронов скрытого слоя и линейной функцией активации выходного нейронного элемента. За основу был взят алгоритм расчета старшего показателя Ляпунова для одного измерения хаотического сигнала, описанный в работе [1]. Суть алгоритма заключается в следующем. После того, как нейронная сеть была обучена на данных выборки до требуемой ошибки, начиная с некоторого измерения сигнала, осуществляется многошаговое прогнозирование по методу скользящего окна; результаты прогнозирования фиксируются. Следующим этапом является внесение в это измерение смещения достаточно малого размера, после чего при помощи нейронной сети заново выполняется многошаговый прогноз. Затем, на основании разницы между нейросетевым прогнозом, полученным на основе оригинальных данных выборки, и прогнозом, рассчитанным с учетом внесенного смещения, рассчитывается старший показатель Ляпунова.

Однако, поскольку вместо многослойного персептрона, который при вычислении текущей выходной активности никак не учитывает свои предыдущие состояния, используется рекуррентная нейронная сеть, то на данном этапе алгоритма внесены следующие *изменения*: при осуществлении прогнозов на вход нейронной сети должны быть предварительно поданы элементы выборки данных, начиная с первого. Это позволяет к моменту расчета старшего показателя Ляпунова сформировать соответствующее состояние рекуррентной нейронной сети. (Необходимость этого обусловлена тем, что текущее состояние нейронов рекуррентной сети формируется на основе предыдущего их состояния, которое, в свою очередь, было сформировано на основе всех предыдущих состояний.)

Для тестирования моделей были использованы данные хаотических процессов Энона и Лоренца с известными параметрами вложения и задержки, а также данные измерений EEG (<http://kdd.ics.uci.edu/databases/eeg/>), для которых соответствующие параметры вложения и задержки найдены с использованием пакета Tisean. С целью анализа чувствительности моделей к фрагментам детерминированных сигналов дополнительно были проведены эксперименты по расчету старшего показателя Ляпунова для смешанных сигналов (процессов Энона, Лоренца и данных EEG, в состав которых включены участки детерминированных сигналов). Результаты применения нейронных сетей Джордана и Джордана-Элмана проде-



монстрировали как достаточно высокую скорость сходимости алгоритма обучения к требуемой ошибке, так и удовлетворительные оценки старшего показателя Ляпунова. Так, для достижения среднеквадратичной ошибки обучения для процесса Энона (объем выборки - 500), равной  $E=2 \cdot 10^{-4}$ , потребовалось 194 итерации для сети Джордана, 265 – для сети Джордана-Элмана (192 – для многослойного персептрона). Аналогично, для процесса Лоренца (объем выборки - 800) для достижения ошибки  $E=9 \cdot 10^{-4}$  выполнено 386 итерации для сети Джордана, 442 – для сети Джордана-Элмана (329 – для многослойного персептрона). С целью расчета старшего показателя Ляпунова для данных EEG (объем выборки - 900) было выполнено 5000 итерации обучения для сети Джордана и рассчитан показатель Ляпунова, равный 0.0315. При этом на всех выборках смешанных данных модели показали высокую чувствительность при переходе от хаотического сигнала к детерминированному.

Авторы благодарят за поддержку исследований Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований при НАН Беларуси.

### Литература

1. V. Golovko, Y. Savitsky, N. Maniakov. Neural Networks for Signal Processing in Measurement Analysis and Industrial Applications: the Case of Chaotic Signal Processing // chapter of NATO book "Neural networks for instrumentation, measurement and related industrial applications". - Amsterdam: IOS Press, 2003, pp. 119-143.
2. Головки В.А. Нейронные сети: обучение, организация и применение. Кн. 4: Учеб. Пособие для вузов / Общая ред. А.И. Галушкина. – М.: ИРПРЖ, 2001. – 256 с.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ НЕЧЕТКОЙ ЛОГИКИ ПРИ ПРОГНОЗИРОВАНИИ ХАОТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Теленкевич Р.С., БГТУ, Брест*

В докладе представлено использование нечеткого контроллера Мамдани-Заде для прогнозирования ряда Энона как на уровне единичных отсчетов, так и на уровне динамики системы в фазовом пространстве.

Система Энона описывается разностными уравнениями:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - \alpha \cdot x_n^2 + y_n \\ y_{n+1} = \beta \cdot x_n \end{cases},$$

которая является хаотической (имеет высокую чувствительность к заданиям начальных условий) при  $\alpha = 1.4$  и  $\beta = 0.3$ . В работе рассматривается прогнозирование ряда изменений переменной  $x$ . В соответствии с теоремой Такенса заключаем, что для прогнозирования данного временного процесса достаточно построить отображение  $F(x_{n-1}, x_n) \rightarrow x_{n+1}$ . При этом размерность пространства вложения (равная 3) выбиралась с использованием метода «ложных соседей».

При построении нечеткой системы на основе обучающей выборки строилась база правил, где использовались треугольные функции принадлежности. Дефаззификация производилась с использованием центроидного (center of area) метода.

Результаты прогнозирования в области фазового пространства показали сходимость к аттрактору, идентичному с реальным, что говорит об адекватной настройке нечеткой системы на динамику процесса. Прогнозирование на уровне единичных отсчетов также дало удовлетворительный результат в пределах горизонта прогнозирования.

## РАЗДЕЛ II. РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ

### THE COLOR IMAGES OF INFECTED CROP FIELD PROCESSING ALGORITHM

*Doudkin A.A., Inyutin A.V., Vatkin M.E., United Institute of Informatics Problem,  
National Academy of Science of Belarus, Minsk, Belarus,*

#### Introduction

In this work we consider the problem of segmenting agricultural landed-fields in remote sensing data [1-3].

Our approach of agricultural images analysis contain following steps:

1. Blurring the image to avoid influence of noise and JPEG coding artifacts.
2. Color segmentation to detect area of field with different infection levels.
3. Improving segmented images.
4. Calculation of infection map of field.

#### 1. Color Image Segmentation Algorithm

Lets consider two-stage method of image segmentation.

At the first stage we find sets of pixels which color have small deviation inside of each set and the number of pixels in each set is significant regarding to amount of all pixels. For that purpose we use a clusterization algorithm of pixels in image color space.

At the second stage we use some heuristics to make threshold separation of obtained set of clusters into two groups. To the first group belong clusters that include pixels of sought objects and to the second clusters that include pixels of background.

Algorithm of image color space clusterization.

1. Let source set of clusters  $C = \emptyset$ .
2. Chose pixel  $x_j$  from pixels set of  $X$ .  $X = X \setminus \{x_j\}$ .
3. If  $C$  is equal  $\emptyset$   
Then:  
3.1.  $C = C \cup \{x_j\}$ .
- Else:  
3.2. Chose cluster  $c_i$  such as  $\|c_i - x_j\| \rightarrow \min$ .
- 3.3. If  $\|c_i - x_j\| < \epsilon$

Then

- 3.3.1. Find new value of cluster center

$c_i = (c_i \cdot n_i + x_j) / (n_i + 1)$  where  $n_i$  is the number of pixels added to the cluster  $c_i$ .

- 3.3.2. Find new number added pixels to the cluster  $c_i$   $n_i = n_i + 1$ .

Else

- 3.3.3. Add new cluster  $C = C \cup \{x_j\}$

4. If set  $X$  is not equal to  $\emptyset$  then repeat from 2.

Algorithm for finding the sought cluster center for segmentation.

1. Chose cluster  $c_i$  such as  $\|c_i - h\| \rightarrow \min$  where  $h$  is color of objects set by user. Set new index  $i = 1$  for  $c_i$ .

2. Sorting the set  $C$  according to rule

$\forall c_j, j < N - 1, \|c_j - c_i\|$  takes minimal value if  $i = j + 1$  where  $j < i \leq N$ .

3. Find  $d_{\max} = \|c_1 - c_N\|$
4. Find allowed deviation radius of objects color  $R = d_{\max} \cdot P/100$  where P is allowed deviation percent from chosen object color. User sets value of P.
5. Join  $c_i$  such as  $\|c_1 - c_i\| < R$  according to equation

$$h = \left( \sum_i c_i \cdot n_i \right) / \sum_i n_i$$

After applying of mentioned above algorithms we perform threshold segmentation of image. If  $\|h - x_i\| < R$ , then  $x_i$  is object pixel else  $x_i$  is background pixel.

## 2. Algorithm for improving the image after segmentation on the basis of soft morphology operations

The task of noise removal from the raster image in mathematical morphology usually is solved with the help of open and close operations, or their sequences. The open destroys narrow necks and smoothes ledges on the binary image, and the close swallows small hollows and closes gaps. Both open and close have property of idempotency. Hence, repeated using of function with same structuring element will not change the image. If it is required to improve filter outcome the set of structuring elements with a growing size is used. However increasing of a structuring element size reduces a resolving power of the filter. Thus, a shortage of classical morphological filters is low ability of the filter solving that leads to significant distortion of the initial image during filtering.

For noise removal on the image the modification of the soft morphological filter is offered [4]. For which the subset of a structuring element kernel is equal to an empty subset. Define operations of soft erosion and a dilatation in the following way:

$$SoftErode(A, B) = \begin{cases} a = 0, & n_o + t \leq n_b \\ a = 1, & n_o + t > n_b \end{cases}, \quad (3)$$

$$SoftDilate(A, B) = \begin{cases} a = 1, & n_o + t \leq n_b \\ a = 0, & n_o + t > n_b \end{cases}, \quad (4)$$

where  $n_o$  is a number of segment pixels that are same to appropriate pixel of the structuring element in current position of the structuring element window,  $n_b$  is a number of background pixels that are same to appropriate pixel,  $t$  is a filter threshold.

Thus, the soft open and close operations we can define as:

$$SoftOpen(A, B) = SoftDilate(SoftErode(A, B), B), \quad (5)$$

$$SoftClose(A, B) = SoftErode(SoftDilate(A, B), B), \quad (6)$$

Use of a threshold in the soft morphological filter allows operating the filter outputs. For example, in open and close operation it is possible to use different thresholds for erosion and dilatations.

The soft morphological filter works as follows - makes scanning the image by the structuring element. In a window of the structuring element the amount pixel the object (background), concurrent with nonzero pixel of structuring element is calculated. Depending on a function, according to formulas (3) - (4) the pixel value is appropriated.

## 3. Algorithms of segments description

The algorithms of segments description are used to find segments geometrical features. After finding geometrical features of segments we can apply mechanical treatment of field automatically. It is necessary to mention that description of field can be applied to all segments together (statistical approach) or to each segment separately.

Statistically map of field infection distribution can be evaluate as

$$f = \frac{\sum_i C_i \cdot K_i}{\sum_i C_i}, \quad (7)$$

where  $K_i$  is coefficient of infection for  $i$ -th level of infection,  $C_i$  is a number of pixels that belong to  $i$ -th level of infection in window of given size.

Thus finding value of  $f$  in different position of scanning window we can obtain a map of infection distribution.

To find features of segments individually we apply following algorithms.

Algorithm of segment description using it raster edge pixels.

All pixels of image are checked. If pixel  $p(x,y)$  is the object pixel and one of neighbor pixels is the background pixel then the pixel is edge pixel. All the edge pixels are sorted corresponding to their segments. Corresponding array of edge pixels is chosen by criterion if in the array is the pixel with coordinates that differ from verifiable pixel by 1. If such pixels are found in several edge pixels arrays, that arrays are joint in one array. The image is increased three times to exclude the special processing of exclusive pixels that are members of two different edge pixels arrays.

After sorting all edge pixels the coordinates of pixels are set to the original image scale.

Chord segment description algorithm and segments feature calculation.

Chord segment description is represented by two-dimension array of horizontal chords of segment. Chords are ordered by coordinates  $y$  and  $x$ . Chord segment description can be obtained from edge segment description using the following algorithm.

1. Arrange edge pixels by coordinates  $y$  and  $x$  into two-dimension array.
2. Define to left or right chord end the each pixel belongs.
3. Pick out pare of left and right edge pixels in the increasing order of coordinates  $x$  and  $y$ .

If edge pixel is left and right at the same time then that pixel is repeated two times. Selected pares are stored in new array of segment chords.

It is easy to the find following segment features using segments chord description.

1. Segment area

$$S = \sum_{i=1}^N (x_{li} - x_{ri}),$$

where  $x_{li}$ ,  $x_{ri}$  are left and right  $x$  coordinates of left and right ends of  $i$ -th chord,  $N$  is number of chords.

2. Geometric center of the segment

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^M x_i}{M}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^M y_i}{M},$$

where  $(x_i, y_i)$  are coordinates of  $i$ -th edge pixel,  $M$  is the number of segment edge pixels.

#### 4. Tests

Test was performed using airplane-photo of potato field (fig. 1). Test shows good image segmentation results that allow high quality further processing.

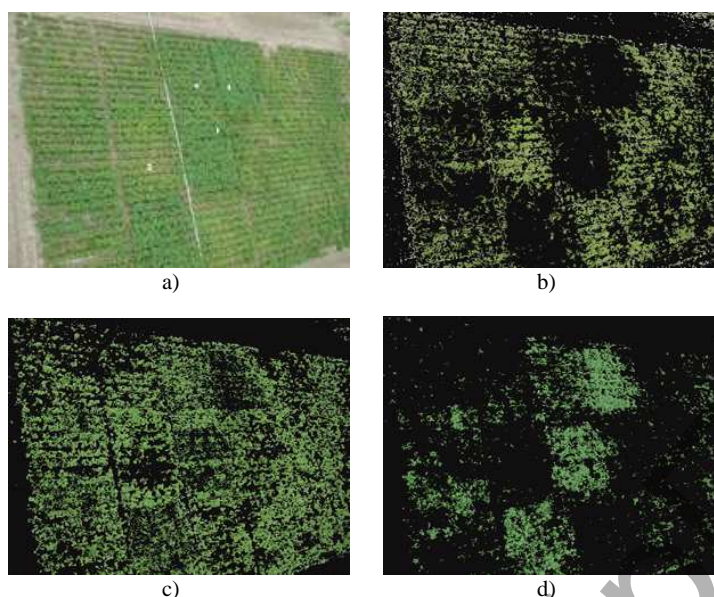


Fig.1 a) source image of field, b) the areas of field that are strongly infected, c) the areas of field that have average infection, d) the areas of field that are healthy

### References

1. Margarita Torre, Petia Radeva. "Agricultural-Field Extraction on Aerial Images by Region Competition Algorithm," *icpr*, vol. 01, no. 1, p. 1313, 15th 2000.
2. G. A. Carpenter, S. Gopal, and C. E. Woodcock, "A neural network method for efficient vegetation mapping," *Remote Sensing Environment*, vol. 70, no. 3, pp. 326--338, Dec. 1999.
3. Yang, C.C.; Prasher, S.O.; Landry, J.A.; Perrett, J., Ramaswamy, H.S. 2000. Recognition of Weeds with Image Processing and their use with Fuzzy Logic for Precision Farming. *Canadian Agricultural Engineering*. 42(4) : 195-200
4. A. Gasteratos and I. Andreadis, *Soft Mathematical Morphology: Extensions, Algorithms and Implementations*, <http://utopia.duth.gr/~agaster/papers/FuzzySoftMorph.pdf>

*The research is partially supported by the Belarussian Republican Foundation of Fundamental Research, grant T04-219.*

### АЛГОРИТМ УСТРАНЕНИЯ ЭФФЕКТА ПЕРЕСЕГМЕНТАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОПЕРАЦИИ ПОЛУТОНОВОГО ПСЕВДОСКЕЛЕТА

*Инютин А.В., Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси, Минск*

Операция сегментации проводится для нахождения границ однородных областей на изображении. В разных задачах требуется проводить сегментацию по различным признакам - по яркости, по текстуре, по цвету. Для сегментации полутонового изображения по яркости можно использовать морфологической операции трансформации водораздела [1-4]. Отличительной особенностью данной операции является высокая точность сегментации, относительно невысокая вычислительная сложность и отказ от использования порогов.

На вход операции трансформации водораздела подается градиент изображения. Результатом будет являться граница однородных по яркости областей. Толщина границы равна одному пикселю. Связность элементов границы будет зависеть от выбора структурирующего элемента для операции трансформации водораздела.

Однако недостаток данного метода - это пересегментация изображения. Под пересегментацией понимается наличие большое количество сегментов малого размера на

изображении, что приводит к значительному усложнению этапа проверки и слияния полученных сегментов. Пересегментация вызывается наличием на исходном изображении шума и незаметных для глаза ошибок квантования.

Меньшее количество областей сегментации дает метод масштабируемого градиента [5]. Но при использовании данного метода для сегментации изображения с большим количеством объектов (изображения земной поверхности на аэрофотоснимках) была выявлена недостаточная точность при выполнении сегментации.

Для устранения эффекта пересегментации предлагается использовать морфологическую операцию полутонового псевдоскелета.

### 1. Полутоновой псевдоскелет

Для сокращения избыточных неинформативных частей градиента будем использовать операцию полутонового псевдоскелета, которая эффективно утоньшает градиент изображения.

Алгоритм сегментации полутоновых изображений с использованием операции полутонового псевдоскелета имеет следующий вид:

1. Фильтрация изображения
2. Вычисление градиента
3. Нахождение полутонового псевдоскелета
4. Операция трансформации водораздела
5. Анализ и объединение областей

Полутоновой псевдоскелет вычисляется по формуле

$$Skel(S) = U_n \{Erode(S_{n-1}, B) - Open(Erode(S_{n-1}, B), B)\}, n=1,2,\dots, \quad (1)$$

где  $Erode(S_{n-1}, B)$  - эрозия изображения  $S_{n-1}$  по структурирующему элементу  $B$ ,  $Open(Erode(S_{n-1}, B), B)$  - отмыкание по  $B$  результата эрозии.

Вычисляя разность между эрозией и ее отмыканием на каждом шаге последовательного сокращения изображения, и просуммировав полученные в итоге разности, получим полутоновой псевдоскелет изображения. Операция отмыкания имеет свойство сглаживать мелкие выступы и неровности на изображении. Другими словами, полутоновой псевдоскелет - это сумма мелких деталей изображения, отфильтрованных на каждом шаге алгоритма.

Термин «полутоновой псевдоскелет» используется для того, чтобы подчеркнуть отличие данной операции от классической операции скелета для черно-белого изображения. Полутоновой псевдоскелет не удовлетворяет условиям связности и непрерывности, которые обязательны для классического определения скелета изображения.

В качестве структурирующего элемента используется квадрат размером  $3 \times 3$  пикселя. На каждом шаге нахождения полутонового псевдоскелета вычисляется разница между результатом очередной эрозии и отмыканием результата эрозии по тому же структурирующему элементу. В конце результаты всех шагов суммируются. Последовательные эрозии проводятся до полного сокращения изображения, т.е. до момента, когда яркость всех точек изображения станет равной 0.

### 2. Экспериментальные результаты

Алгоритм сегментации на основе полутонового псевдоскелета является универсальным и может быть использован для различных видов изображений. Разработанный алгоритм применялся для сегментации аэрофотографий земной поверхности.

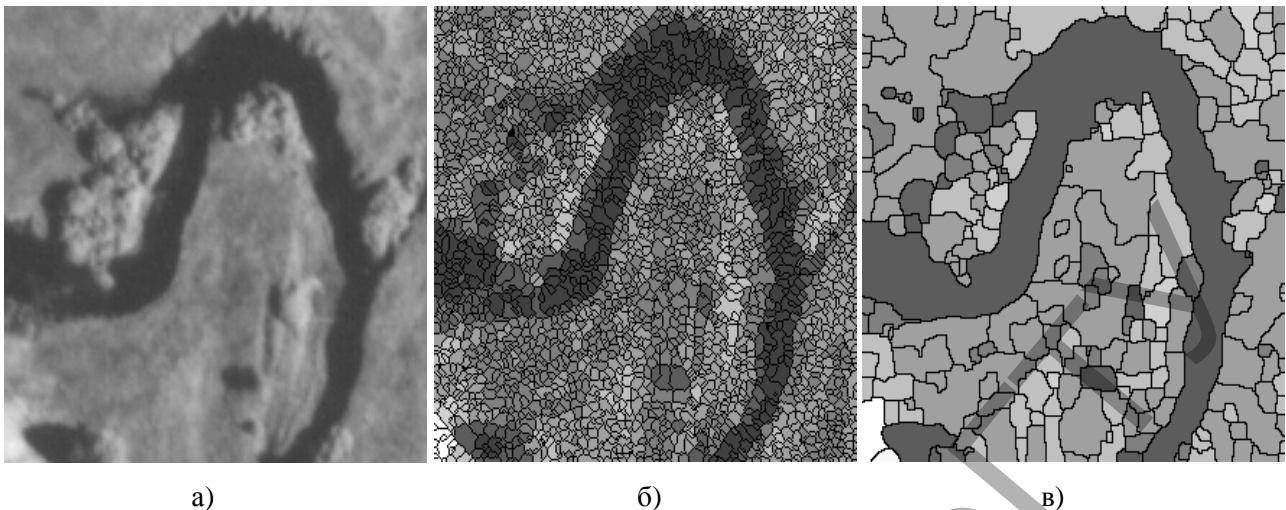


Рис.1. Исходное изображение (а), результат трансформации водораздела для морфологического градиента (б) и полутонового псевдоскелета (в)

На рис.1 приведен пример сегментации с использованием предложенного алгоритма. На рис.1.а присутствует крупный однородный по яркости объект- река. Размер изображения - 300x300 пикселей, 256 градаций серого. Результат работы операции водораздела для морфологического градиента приведен на рис.1.б. Результат сегментации - 3173 области. Результат сегментации с помощью полутонового псевдоскелета - 222 области (рис.1.в).

#### Заключение.

В докладе вводится понятие полутонового псевдоскелета изображения и предлагается новый алгоритм сегментации полутоновых изображений на его основе.

Преимущество алгоритма заключается в отказе от использования пороговой операции, что позволяет значительно повысить качество сегментации. Операция полутонового псевдоскелета позволяет значительно снизить влияние ошибок квантования и шумов на изображении на результат сегментации. Что значительно сокращает время сегментации на этапе анализа и объединения областей.

#### Литература

1. Serra J. Image analysis and Mathematical Morphology, Academic Press, New York, 1982.
2. Dougherty E.R. An introduction to morphological image processing, Bellingham, Washington, 1992.
3. Giardina C.R., Dougherty E.R. Morphological method in image and signal processing, Prentice Hall, New Jersey, 1988.
4. Садыхов Р.Х., Инютин А.В. Операторы математической морфологии в задачах обработки бинарных и полутоновых изображений. – Минск, 2001. – 44 с. (Препринт / Ин-т техн. Кибернетики НАН Беларуси; №3).
5. Wang D. A multiscale gradient algorithm for image segmentation using watersheds // Pattern Recognition. Vol. 30, №12, 1997, pp. 2043-2025
6. Blum H. Biological shape and visual science, Pattern Recognition. Vol. 10, 1978, pp. 205-287.

## СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА НЕКОТОРЫХ НЕЙРОСЕТЕВЫХ АЛГОРИТМОВ РАСПОЗНАВАНИЯ ПЕЧАТНЫХ СИМВОЛОВ.

Калюхович Д. О., БГТУ, Брест

**Исходные данные.** Имеется  $K$  различных распознаваемых символов. Каждый распознаваемый символ представлен черно-белым изображением (матрицей)  $A$  размера  $m \times n$ , где  $m$  – высота изображения,  $n$  – ширина изображения. Полагаем, что точка  $a_{ij} = 1$  принадлежит распознаваемому символу,  $a_{ij} = 0$  – точка фона, где  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

**Алгоритм распознавания №1.** Используется многослойный персептрон:

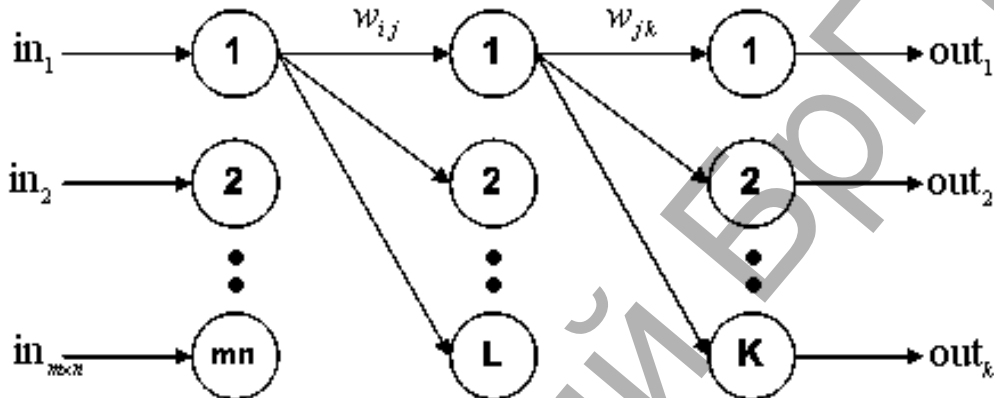


Рис. 1. Архитектура многослойного персептрона

где размерность входного вектора  $m \times n$ , количество нейронов скрытого слоя равно  $L$ , а выходного слоя –  $K$ . В качестве функции активации  $F(S)$  нейронов скрытого и выходного слоя используется линейная, сигмоидная функции. Для обучения сети на ее входы последовательно подаются матрицы  $A$  распознаваемых символов, представленные в виде вектора  $in$  размерности  $m \times n$ . На выходе сети значение нейрона, соответствующего распознаваемому символу, равно 1, остальных – 0 (вектор  $out$ ). Сеть обучается до достижения требуемой среднеквадратической ошибки  $E$  согласно алгоритму обратного распространения ошибки:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^K \sum_{i=1}^K (\overline{out}^{(n)}(i) - out^{(n)}(i))^2 \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$w_{jk}(t+1) = w_{jk}(t) - \alpha \cdot (\overline{out}(i) - out(i)) \cdot F'(S_k) \cdot y_j, \quad (2)$$

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) - \alpha \cdot F'(S_j) \cdot in(i) \cdot \sum_{k=1}^K ((\overline{out}(k) - out(k)) \cdot F'(S_k) \cdot w_{jk}(t)), \quad (3)$$

где  $\overline{out}$  – выходной вектор, полученный многослойным персептроном,  $\alpha$  – шаг обучения,  $S_k$  – взвешенная сумма  $k$ -ого выходного нейрона,  $y_j$  – выходное значение  $j$ -ого нейрона скрытого слоя,  $S_j$  – взвешенная сумма  $j$ -ого нейрона скрытого слоя. Распознаваемым считается символ с номером  $k^*$ , удовлетворяющий условию:

$$k^* = \max_{i=1, K} (\overline{out}(i)). \quad (4)$$



**Алгоритм распознавания №2.** Используется нейронная сеть Кохонена:

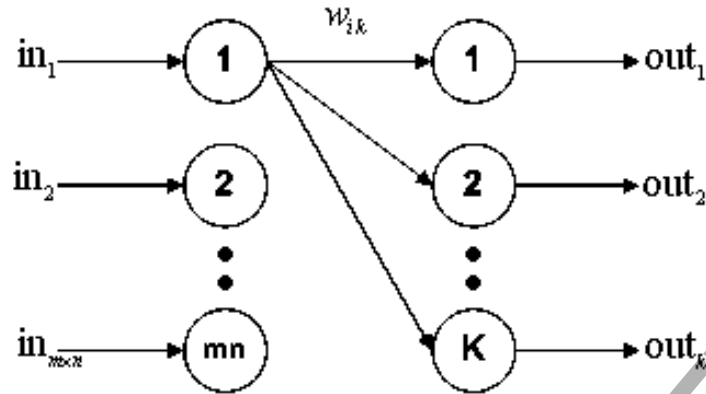


Рис. 2. Архитектура сети Кохонена

Структура входных и выходных данных аналогична при применении многослойного персептрона. Для обучения сети используется контролируемое конкурентное обучение с одним нейроном-победителем:

$$\begin{cases} W_k(t+1) = W_k(t) + \alpha \cdot (in - W_k(t)), & \text{при корректном распознавании,} \\ W_k(t+1) = W_k(t) - \alpha \cdot (in - W_k(t)), & \text{в противном случае,} \end{cases} \quad (5)$$

где  $W_k$  – весовые коэффициенты  $k$ -ого нейрона конкурентного слоя,  $\alpha = \frac{1}{t}$  – шаг обучения, уменьшающийся с течением времени. Распознанным считается символ, соответствующий номеру нейрона-победителя.

**Алгоритм распознавания №3.** К матрице изображения  $A$  применяется разложение в ряд Фурье:

$$F_k = F(k) = \sum_{i=0}^{m \times n - 1} in(i) \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot k \cdot i}{m \times n}\right), \quad (6)$$

где  $k = \overline{0, m \times n - 1}$ . В результате получаем частотное описание распознаваемого символа:

$$\bar{F} = [F_0, F_1, \dots, F_{m \times n - 1}]. \quad (7)$$

Для инвариантности полученного описания символа относительно системы координат выполняется следующее преобразование:

$$\bar{F}^* = \left[ F_0 - \frac{1}{m \times n} \cdot F_0, F_1 - \frac{1}{m \times n} \cdot F_0, \dots, F_{m \times n - 1} - \frac{1}{m \times n} \cdot F_0 \right]. \quad (8)$$

Для инвариантности относительно масштаба образа осуществляется нормирование всех компонент разложения Фурье:

$$\bar{F}^{**} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{m \times n - 1} |F_i^*|^2}} \bar{F}^*. \quad (9)$$

Для обеспечения неизменности частотного описания символа относительно угла поворота осуществляем следующее преобразование:

$$\bar{F}^{***} = \exp\left(-j \cdot \frac{1}{m \times n} \cdot \sum_{i=0}^{m \times n - 1} \text{Arg}[F_i^{**}]\right) \cdot \bar{F}^{**}. \quad (10)$$

Для понижения размерности частотного описания символа применяется метод главных компонент. В результате имеется частотное описание всех распознаваемых символов, не зависящее от масштаба и угла поворота изображения символа. На полученных данных согласно формулам (1)-(3) обучается многослойный персептрон, согласно формуле (5) – сеть Кохонена.

В докладе представлено сравнение рассматриваемых методов.

### Литература

1. Станислав Осовский. Нейронные сети для обработки информации. Финансы и статистика. Москва, 2002. – 343 с.

## РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ОБЛАСТИ БЕЗОПАСНОСТИ

*Проходцов И. В., Брестский филиал "Государственного института переподготовки кадров "Газ-институт", Брест*

В настоящее время всё большую актуальность приобретают методы обработки информации в области обеспечения общественной безопасности, борьбы с терроризмом. События последних лет (разрушение всемирного торгового центра в Нью-Йорке, взрывы домов в Москве, взрывы станций метро в Лондоне) демонстрируют серьёзные проблемы в обеспечении безопасности общества, в значительной степени связанные с неэффективностью используемых методов анализа и распознавания изображений.

Первый метод заключается в сравнении двух изображений. Первое изображение (назовём его контрольным) должно быть предварительно внесено в базу данных, второе получается при прохождении контроля. Оба изображения "раскладываются" на пиксели и соответствующие пиксели сравниваются. Такой метод широко использовался для переноса фотографий на холст. На фотографию и на холст наносилась сетка с одинаковым количеством клеток (чем больше клеток, тем точнее изображение после переноса на холст). Однако для распознавания человеческого лица при контроле этот метод имеет ряд серьёзных недостатков. Во-первых, для стопроцентного совпадения условия при проверке (освещение, положение лица, макияж, причёска, очки и т.п.) должны в точности соответствовать условиям, при которых было сделано контрольное изображение, во-вторых, системы, использующие данный метод распознавания должны иметь огромные вычислительные ресурсы для хранения информации о каждом пикселе контрольного изображения и для процесса сравнения.

Второй метод заключается в анализе и сравнении геометрических параметров лица. Этот метод издавна используется в криминалистике при составлении фотороботов. При распознавании используется информация о наборе расстояний между контрольными точками (уголками рта, центрами глазных яблок, кончиками ушей и носа и т.п.) и их соотношениями. В отличие от первого метода не требуются огромных вычислительных мощностей, однако условия проверки должны быть такими же, т.к. даже смена настроек может привести к отрицательному результату сравнения.

Третий метод использует сравнение контуров лица (контуры носа, бровей, глаз и т.д.). В каждом контуре определяются контрольные точки, а сам контур вычисляется интерполированием. Но и данному методу присущи недостатки первого.

Общим недостатком приведённых выше методов является статичность. То есть для получения изображения, наиболее подходящего для сравнения, лицо человека должно быть зафиксировано в определенном положении, что невозможно сделать, не привлекая внимания и не затрачивая времени. Исходя из вышесказанного, можно сделать вывод, что эффективность систем контроля, использующих статические методы, несравнимо низка относительно затрат.

Динамический метод сравнения (наиболее эффективный) использует несколько последовательных кадров изображения для расчёта двумерного векторного поля, наилучшим образом преобразующего один кадр — в другой. Алгоритм находит наиболее соответствующие друг другу блоки, начиная с больших, которые затем разбиваются на более мелкие. В результате получаем таблицу соответствия изображений. Переход проверяемого кадра в контрольный можно представить тем же деревом соответствия, что и переход одного контрольного кадра в другой.

Для использования самых эффективных методов необходимы новые технологии, необходимы системы, которые будут способны анализировать информационные потоки так, как это делает сам человек.

### Литература

1. Фу К. Структурные методы в распознавании образов. - М.: Мир, 1977. - 320 с.
2. Фор А. Восприятие и распознавание образов / Пер.с фр. А.В.Серединского; под ред. Г.П.Катыса. – М.: Машиностроение, 1989. – 272 с.
3. Вапник В.Н., Червоненскис А.Я. Теория распознавания образов. – М.: Наука, 1974. - 178 с.
4. Башкиров О.А., Бовырин А.В., Губанов А.В., Родюшкин К.В., Курякин В.Ф. "Real-time search and recognition of objects in the image by the structural template" // Распознавание образов анализ изображений. -т.11. -2001. - с.138-140.
5. Горелик А.Л.,Скрипкин В.А. Методы распознавания. Учебное пособие для вузов. - М.: ВШ, 1989. - 231с.

## РАЗДЕЛ III. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

### ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ

Громько Ю.В., БелГУТ, Гомель

Рассматриваются осесимметричные вынужденные колебания несимметричной по толщине упругой трехслойной пластинки круглой формы с отверстием. Постановка задачи и ее решение проводится в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ . Срединная плоскость заполнителя принимается за координатную, ось  $z$  направлена ей перпендикулярно вверх. Для внешних несущих слоев толщиной  $h_1 \neq h_2$  принимаются гипотезы Кирхгофа, для легкого заполнителя ( $h_3 = 2c$ ) – гипотеза о прямолинейности и несжимаемости деформированной нормали. Работой заполнителя в тангенциальном направлении и инерцией вращения его нормали пренебрегаем. Внешняя вертикальная нагрузка не зависит от координаты  $\varphi$ :  $q = q(r, t)$ . На контуре пластинки предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев. В силу симметрии задачи тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют  $u_{\varphi^k} = 0$ , а прогиб пластинки  $w$ , относительный сдвиг в заполнителе  $\psi$  и радиальное перемещение координатной поверхности  $u$  не зависят от координаты  $\varphi$  ( $k$  – номер слоя), т. е.  $w = w(r, t)$ ,  $\psi = \psi(r, t)$ ,  $u = u(r, t)$ . В дальнейшем эти функции считаем искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластинки отнесены к ее радиусу  $a$ ; силовые характеристики – к 1 Па; через  $h_k$  обозначена толщина  $k$ -го слоя.

В работе [1] для подобной круглой сплошной пластинки на основе вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая вынужденные поперечные колебания, которая будет справедлива и в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0; \quad L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) = 0; \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= -q, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $M_0$  – коэффициент, зависящий от физических и геометрических параметров слоев;

$L_i$  – дифференциальные операторы; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате;

$a_i$  – коэффициенты, зависящие от жесткостных и геометрических параметров пластины.

Задача определения функций  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$  замыкается присоединением к (1) граничных и начальных условий

$$w(r, 0) \equiv f(r); \quad \dot{w}(r, 0) \equiv g(r). \quad (2)$$

В работе [2] для подобной круглой рассмотрена однородная система дифференциальных уравнений, описывающая свободные колебания пластинки с отверстием. Она следует из (1) при  $q = 0$ . С помощью первых двух уравнений и двукратного интегрирования эта система преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} u &= b_1 w_{,r} + C_1 r + C_2 / r; \quad \psi = b_2 w_{,r} + C_3 r + C_4 / r; \\ L_3(w_{,r}) + M^4 \ddot{w} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В конечном виде решение для  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$ ,  $w(r, t)$  представляется с помощью разложения в ряд по полученной фундаментальной системе собственных ортонормированных функций:

$$v_n \equiv \frac{1}{d_n} [J_0(\beta_n r) + k_{1n} I_0(\beta_n r) + k_{2n} Y_0(\beta_n r) + k_{3n} K_0(\beta_n r)];$$

$$d_n^2 = \int_{r_0}^1 [J_0(\beta_n r) + k_1 I_0(\beta_n r) + k_2 Y_0(\beta_n r) + k_3 K_0(\beta_n r)]^2 r dr. \quad (4)$$

Для описания вынужденных колебаний рассматриваемой пластинки внешняя нагрузка  $q(r, t)$  и искомое решение  $u(r, t)$ ,  $\psi(r, t)$  и  $w(r, t)$  представляются в виде следующих разложений в ряд по построенным системам собственных функций (4):

$$q(r, t) = M \sum_{n=0}^{\infty} v_n q_n(t); \quad w(r, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n T_n(t);$$

$$\psi(r, t) = b_2 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t); \quad u(r, t) = b_1 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n T_n(t). \quad (5)$$

Выражения для функций  $q_n(t)$  получим, помножив первое из соотношений в (5) на  $v_n$  и проинтегрировав по радиусу пластинки. В силу ортонормированности функций  $v_n$  имеем:

$$\int_{r_0}^1 v_m v_n r dr = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}, \quad q_n(t) = \frac{1}{M} \int_{r_0}^1 q(r, t) v_n r dr.$$

Уравнение для определения неизвестной функции  $T_n(t)$  в этом случае можно получить из третьего уравнения системы (3), после подстановки в него выражений (5):

$$\ddot{T}_n + \omega_n^2 T_n = q_n. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6) можно принять в виде:

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin \omega_n (t - \tau) q_n(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Таким образом, прогиб, относительный сдвиг и радиальное перемещение в круглой трехслойной пластинке с отверстием, находящейся под воздействием осесимметричной динамической нагрузки, определяются соотношениями (5) с учетом (7).

Численные результаты получены для случая пластинки, заделанной по внутреннему и внешнему контурам, и пластинки, внешний контур которой заделан, а на внутреннем – шарнирная опора. Трансцендентные уравнения для определения собственных чисел, исследованы на интервале 0 ... 500. Первые 10 корней, вычисленные с точностью до 0,001 при радиусе отверстия  $r_0 = 0,2$  ( $h_1 = h_2 = 0,005$ ,  $c = 0,1$ ), приведены в таблице.

Таблица.

Заделка-заделка				Заделка-шарнир			
$n$	$\beta_n$	$n$	$\beta_n$	$n$	$\beta_n$	$n$	$\beta_n$
0	5.883	5	25.507	0	5.877	5	25.505
1	9.785	6	29.436	1	9.785	6	29.435
2	13.717	7	33.364	2	13.717	7	33.364
3	17.647	8	37.293	3	17.647	8	37.293
4	21.577	9	41.220	4	21.577	9	41.220

Частоты исследовались для кольцевой пластинки типа: металл – полимер – металл. В качестве металла принимался дюралюминий, наполнитель – фторопласт. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [3].

Полученное в работе решение задачи о поперечных колебаниях кольцевой трехслойной пластинки, а также проведенное исследование частот собственных колебаний может быть использовано, например, при расчете панелей с иллюминаторами.

### Литература

1. Старовойтов Э. И. Осесимметричные колебания круглой трехслойной пластинки, возбужденные тепловым ударом. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук - 1988, № 3, С. 3–10.
2. Громыко Ю. В. Собственные колебания пластины с отверстием. // Материалы молодежной научно-технической конференции вузов приграничных регионов славянских государств, 23-24 окт. 2001 г. – БГТУ: Брянск, 2002. – С. 9–15.
3. Старовойтов Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. Гомель: БелГУТ, 2001. 344 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований РБ (проект Т04М–002).

## ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВЕКТОРНЫХ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОПУЩЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Гурин А.С., БГУ, Минск

### Введение

При анализе и моделировании динамических процессов, временных рядов в экономике, медицине, защите окружающей среды, а также при создании систем искусственного интеллекта задача прогнозирования является одной из часто встречающихся. Можно предложить ряд ее решений в том случае, если данные наблюдаются без "пропусков". Наличие же пропущенных наблюдений значительно усложняет поиск и реализацию оптимальных алгоритмов прогнозирования и исследование их свойств. Результаты решения этой проблемы представлены в настоящей статье для модели векторной авторегрессии наблюдаемых временных рядов на основе методов робастного статистического анализа данных [1, 2].

### Математическая модель

Пусть наблюдаемый  $d$ -векторный ( $d \geq 1$ ) временной ряд  $Y_t = (Y_{t1}, \dots, Y_{td})' \in \mathbf{R}^d$  описывается моделью VAR(1) векторной авторегрессии первого порядка [3]:

$$Y_{t+1} = BY_t + U_{t+1}, \quad t \in \mathbf{Z}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{Z}$  – множество целых чисел,  $B \in \mathbf{R}^{d \times d}$  – матрица коэффициентов авторегрессии, спектральный радиус которой  $\lambda_0 = \lambda_0(B) < 1$ ,  $\{U_t \in \mathbf{R}^d : t \in \mathbf{Z}\}$  – независимые в совокупности случайные векторы с нормальным распределением:  $\mathcal{L}\{U_t\} = \mathcal{N}_d(0_d, \Sigma)$ ,  $t \in \mathbf{Z}$ . В наблюдениях  $\{Y_t\}$  имеются "пропуски". Шаблоном "пропусков" назовем последовательность двоичных векторов  $O_t = (O_{ti})$ ,  $t \in \mathbf{Z}$ , где  $O_{ti} = 1$ , если  $Y_{ti}$  наблюдается,  $O_{ti} = 0$ , если  $Y_{ti}$  не наблюдается. Обозначим минимальный и максимальный моменты времени с наблюдаемыми компонентами:  $t_- = \min\{t : \sum_{i=1}^d O_{ti} > 0\}$ ,  $t_+ = \max\{t : \sum_{i=1}^d O_{ti} > 0\}$ ; без ограниче-

ния общности  $t_- = 1, t_+ = T$ . Отметим, что авторегрессионные модели  $AR(p), VAR(p)$  порядка  $p$  сводятся к  $VAR(1)$  изменением пространства наблюдений [3]. Задача состоит в построении статистических оценок модельных параметров  $B, \Sigma$  по наблюдаемому временному ряду  $\{Y_t\}_{t=1, \dots, T}$  с шаблоном "пропусков"  $\{O_t\}_{t=1, \dots, T}$ , построении прогнозов временного ряда (1) и исследовании их асимптотического поведения.

**Оценки параметров, основанные на выборочных ковариациях**

Сформулируем дополнительные предположения о шаблоне  $\{O_t\}$ .

П1. При  $T \rightarrow \infty$  число наблюдаемых пар компонент векторов в один и тот же и соседние моменты времени бесконечно увеличивается:  $\sum_{t=1}^{T-k} O_{t+k,i} O_{tj} \rightarrow \infty, i, j \in \{1, \dots, d\}, k \in \{0, 1\}$ .

П2. При  $T \rightarrow \infty$  имеет место асимптотическое поведение шаблона  $\{O_t\}$ :

$$\sum_{t=1}^{T-k} O_{t+k,i} O_{tj} / (T - k) \rightarrow \vartheta_{k,i,j} \in (0, 1],$$

$$\sum_{t,t'=1}^{T-1} O_{t+k,i} O_{tj} O_{t'+k,i'} O_{t'j'} \delta_{t-t', \tau} / (T - |\tau| - 1) \rightarrow \tilde{\vartheta}_{\tau,k,k',i,i',j,j'} \in [0, 1],$$

$\vartheta_{k,i,j}$  – предельная частота наблюдения пары компонент  $(i, j)$  в моменты времени, сдвинутые на  $k$ ,  $\tilde{\vartheta}_{\tau,k,k',i,i',j,j'}$  – предельная частота наблюдения пары  $(i, j)$  совместно с парой  $(i', j')$  в моменты времени, сдвинутые на  $\tau + k - k'$  и  $\tau$  единиц времени от первой пары, где  $\tau \in \mathbf{Z}, i, j, i', j' \in \{1, \dots, d\}, k, k' \in \{0, 1\}, \delta_{a,b}$  – символ Кронеккера.

Обозначим ковариации:  $g_{t-t',k,k',i,i',j,j'} = \text{Cov}\{Y_{t+k,i}, Y_{tj}, Y_{t'+k,i'}, Y_{t'j'}\}, G_k = \text{Cov}\{Y_{k+1}, Y_1\} \in \mathbf{R}^{d \times d}, t, t' \in \mathbf{Z}, i, j, i', j' \in \{1, \dots, d\}, k, k' \in \{0, 1\}$ . Назовем

$$T_0 = \inf\{T' \in \mathbf{N} : \min_{i,j \in \{1, \dots, d\}, k \in \{0, 1\}} \sum_{t=1}^{T'-k} O_{t+k,i} O_{tj} > 0\}$$

критическим временем наблюдения для заданного шаблона  $\{O_t\}$ . Для  $T \geq T_0$  определим предельные характеристики шаблона ( $\tau \in \mathbf{Z}, i, j, i', j' \in \{1, \dots, d\}, k, k' \in \{0, 1\}$ ):

$$C_{\tau,k,k',i,i',j,j'} = \tilde{\vartheta}_{\tau,k,k',i,i',j,j'} / (\vartheta_{k,i,j} \vartheta_{k',i',j'}),$$

выборочные ковариации  $\hat{G}_k = ((\hat{G}_k)_{ij})$ :

$$(\hat{G}_k)_{ij} = \sum_{t=1}^{T-k} Y_{t+k,i} Y_{tj} O_{t+k,i} O_{tj} / \sum_{t=1}^{T-k} O_{t+k,i} O_{tj}, \tag{2}$$

и при  $|\hat{G}| \neq 0$  статистики, основанные на выборочных ковариациях (2):

$$\hat{B} = \hat{G}_1 \hat{G}_0^{-1}, \hat{\Sigma} = \hat{G}_0 - \hat{G}_1 \hat{G}_0^{-1} \hat{G}_1'. \tag{3}$$

**Состоятельность и асимптотическая нормальность оценок  $\hat{B}, \hat{\Sigma}$**

**Теорема 1.** Для модели (1) статистики (2) являются несмещенными оценками матриц  $G_k, k \in \{0, 1\}$ :  $E\{\hat{G}_k\} = G_k$ . Если к тому же выполнено П1, то при  $T \rightarrow \infty$  оценки (2) состоятельны в среднем квадратическом:  $\hat{G}_k \xrightarrow{L_2} G_k$ , а статистики (3) являются состоятельными (по вероятности) оценками параметров  $B, \Sigma$ :  $\hat{B} \xrightarrow{P} B, \hat{\Sigma} \xrightarrow{P} \Sigma$ .

Пусть последовательность случайных векторов  $\xi_t = (\xi_{it}) \in \mathbf{R}^d$  при  $t \rightarrow \infty$  сходится по распределению к случайному вектору  $\xi \in \mathbf{R}^d$ , имеющему ковариационную матрицу  $\Sigma = (\Sigma_{ij}) = \text{Cov}\{\xi, \xi\}$ . Тогда асимптотическими ковариациями случайного вектора  $\xi_t$  бу-

дем называть ковариации случайного вектора  $\xi$  и обозначать:  $a\text{Cov}\{\xi_{ii}, \xi_{ij}\} = \Sigma_{ij}$ ; аналогично определим асимптотическую дисперсию и математическое ожидание:  $aD\{\xi_{ii}\} = \Sigma_{ii}$ ,  $aE\{\xi_i\} = E\{\xi_i\}$ ,  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ .

**Теорема 2.** Если для модели (1) выполнено П2, то при  $T \rightarrow \infty$  вектор, составленный из элементов матрицы  $\sqrt{T}(\hat{B} - B)$ , распределен асимптотически нормально с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями  $(i, j, i', j' \in \{1, \dots, d\})$ :

$$a\text{Cov}\{\sqrt{T}(\hat{B} - B)_{ij}, \sqrt{T}(\hat{B} - B)_{i'j'}\} = \sum_{k, k'=0}^1 \sum_{n, m, n', m'=1}^d \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+k'} (B^{1-k})_{in} (B^{1-k'})_{i'n'} \times \\ g_{\tau, k, k', n, m, n', m'} C_{\tau, k, k', n, m, n', m'} (G_0^{-1})_{mj} (G_0^{-1})_{m'j'}$$

### Прогнозирование при известных параметрах и его риск

Определим конечное множество  $M = \{(t, i), t \in \mathbf{Z}, i \in \{1, \dots, d\}; O_n = 1\}$ ; элементы этого множества лексикографически упорядочены в возрастающем порядке;  $K = |M|$  – общее число регистрируемых компонент. Определим биекцию  $M \leftrightarrow \{1, \dots, K\}: k = \chi(t, i)$  и обратную функцию  $(t, i) = \bar{\chi}(k)$ . Составим  $K$ -вектор всех наблюдаемых компонент:  $X = (X_1, \dots, X_K)' \in \mathbf{R}^K$ ,  $X_k = Y_{\bar{\chi}(k)}$ ,  $k = 1, \dots, K$ .

Пусть  $Y_{T+\tau} \in \mathbf{R}^d$  – “будущий вектор”, который необходимо предсказать для глубины прогнозирования  $\tau \geq 1$ . Определим  $(d \times d)$ -матричный риск  $R$  и (скалярный) риск  $r$  прогнозирования:  $R = E\left\{(\hat{Y}_{T+\tau} - Y_{T+\tau})(\hat{Y}_{T+\tau} - Y_{T+\tau})'\right\}$ ,  $r = \text{tr}(R) \geq 0$ . Обозначим ковариации:  $F = \text{cov}\{X, X\} \in \mathbf{R}^{K \times K}$ ,  $H = \text{cov}\{X, Y_{T+\tau}\} \in \mathbf{R}^{K \times d}$ ,  $A_0 = A_0(B, \Sigma) = H'F^{-1} \in \mathbf{R}^{d \times K}$ .

**Теорема 3.** Если для модели (1)  $|F| \neq 0$ , то МП-прогноз и его риск имеют вид:

$$\hat{Y}_{T+\tau} = E\{Y_{T+\tau} | X\} = A_0 X, \quad R = G_0 - H'F^{-1}H \geq 0, \quad r = \text{tr}(G_0) - \text{tr}(F^{-1}HH')$$

### Литература

1. Харин Ю.С. Робастность в статистическом распознавании образов. – Минск: “Университетское”, 1992, 225с.
2. Kharin Yu.S. Robustness in Statistical Pattern Recognition. – Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1996, 302p.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – Москва: “Мир”, 1976, 755с.

## ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Доровская Е.П., БелГУТ, Гомель

Значительное распространение трехслойных конструкций во многих отраслях промышленности привело к необходимости разработки методов их расчета. В условиях деформации изгиба они оказываются наиболее рациональными.

Рассмотрена постановка задачи об изгибе несимметричной по толщине трехслойной пластины с жестким наполнителем, лежащей на упругом основании. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине наполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Воздействие основания описывается моделью Винклера. Деформации считаем малыми.



Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью заполнителя. На внешний слой пластины действует распределенная силовая нагрузка  $p(x), q(x)$ , а на нижний - реакция основания  $q_r = -kw$  (рис. 1).

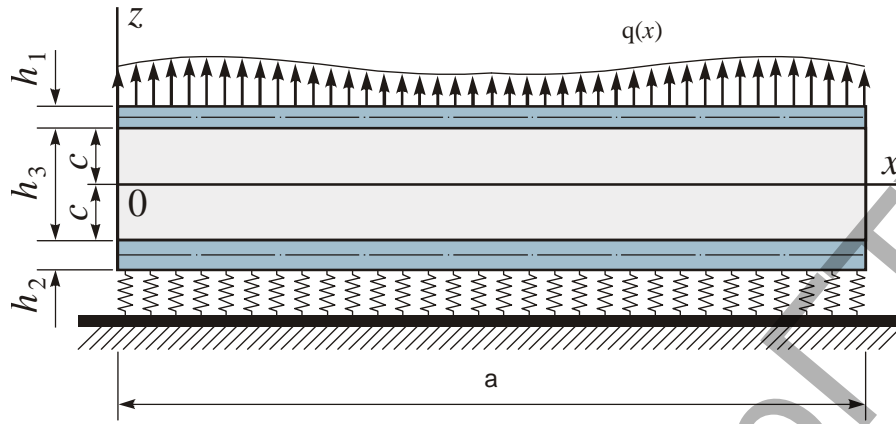


Рис. 1. Трехслойная пластина с жестким заполнителем

Здесь  $k$  - коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели); знак минус указывает на то, что реакция направлена в сторону, противоположную прогибу,  $w$  - прогиб пластины.

Граничные условия соответствуют свободному опиранию пластины по кромкам на неподвижные в пространстве жесткие опоры.

Система из пяти уравнений равновесия и силовые граничные условия получены вариационным методом:

$$\begin{aligned}
 & a_1 u_{x,xx} + a_8 u_{y,yx} + a_2 \psi_{x,xx} + a_9 \psi_{y,yx} - a_3 w_{,xxx} - a_{10} w_{,yyx} + a_{11} (u_{x,yy} + u_{y,xy}) + \\
 & \quad a_{12} (\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}) - a_{13} w_{,xyy} = -p_x, \\
 & a_8 u_{x,xy} + a_1 u_{y,yy} + a_9 \psi_{x,xy} + a_2 \psi_{y,yy} - a_{10} w_{,xxy} - a_3 w_{,yyy} + a_{11} (u_{x,yx} + u_{y,xx}) + \\
 & \quad a_{12} (\psi_{x,yx} + \psi_{y,xx}) - a_{13} w_{,xyx} = -p_y, \\
 & a_2 u_{x,xx} + a_9 u_{y,yx} + a_4 \psi_{x,xx} + a_{18} \psi_{y,yx} - a_5 w_{,xxx} - a_{14} w_{,yyx} + a_{12} (u_{x,yy} + u_{y,xy}) + \\
 & \quad a_{19} (\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}) - a_{16} w_{,xyy} - 2G^{(3)} c \psi_x = 0, \\
 & a_9 u_{x,xy} + a_2 u_{y,yy} + a_{18} \psi_{x,yx} + a_4 \psi_{y,yy} - a_{14} w_{,xxy} - a_5 w_{,yyy} + a_{12} (u_{x,yx} + u_{y,xx}) + \\
 & \quad a_{19} (\psi_{x,yx} + \psi_{y,xx}) - a_{16} w_{,xyx} - 2G^{(3)} c \psi_y = 0, \\
 & a_3 i_{x,xxx} + a_{10} u_{y,yxx} + a_5 \psi_{x,xxx} + a_{14} \psi_{y,yxx} - a_6 w_{,xxxx} - a_{15} w_{,yyxx} + a_{10} i_{x,xyy} + \\
 & \quad a_3 i_{y,yyy} + a_4 \psi_{x,xyy} + a_5 \psi_{y,yyy} - a_{15} w_{,xxyy} - a_6 w_{,yyyy} + \\
 & \quad a_{13} (i_{x,yxy} + i_{y,xyx}) + a_{16} (\psi_{x,yxy} + \psi_{y,xyx}) - 2a_{17} w_{,xyxy} = -(q + q_r), \tag{1}
 \end{aligned}$$

Здесь в качестве искоемых функций выступают тангенциальные перемещения срединной плоскости заполнителя  $u_x, u_y$ , прогиб пластины  $w$  и сдвиги в заполнителе  $\psi_x, \psi_y$ .

Решение системы дифференциальных уравнений (1) предполагаем в виде разложения в двойные тригонометрические ряды:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sum_{n,m=1}^{\infty} W_{mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; & i_x &= \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{1mn} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; & i_y &= \sum_{n,m=1}^{\infty} U_{2mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}; \\
 \psi_y &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \Psi_{2mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \cos \frac{\pi m y}{b}; & \psi_x &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \Psi_{1mn} \cos \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}; \tag{2}
 \end{aligned}$$

Нагрузку  $q$  также разложим в ряд синусов:

$$q = \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b}, \quad q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x,y) \sin \frac{\pi n x}{a} \sin \frac{\pi m y}{b} dx dy.$$

После подстановки перемещений и нагрузки в систему (1) получим систему алгебраических уравнений для определения амплитуд перемещений  $W_{mn}, U_{1mn}, U_{2mn}, \Psi_{1mn}, \Psi_{2mn}$ :

$$\begin{cases} b_6 U_{1mn} + b_7 U_{2mn} + b_8 \Psi_{1mn} + b_9 \Psi_{2mn} + b_{10} W_{mn} = 0; \\ b_7 U_{1mn} + b_{11} U_{2mn} + b_9 \Psi_{1mn} + b_{12} \Psi_{2mn} + b_{13} W_{mn} = 0; \\ b_8 U_{1mn} + b_9 U_{2mn} + b_{14} \Psi_{1mn} + b_{15} \Psi_{2mn} + b_{16} W_{mn} = 0; \\ b_9 U_{1mn} + b_{12} U_{2mn} + b_{15} \Psi_{1mn} + b_{17} \Psi_{2mn} + b_{18} W_{mn} = 0; \\ b_1 U_{1mn} + b_2 U_{2mn} + b_3 \Psi_{1mn} + b_4 \Psi_{2mn} + b_5 W_{mn} = q_{mn}. \end{cases} \quad (3)$$

Решение системы (3) можно выписать в определителях

$$U_{1mn} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad U_{2mn} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad \Psi_{1mn} = \frac{\Delta_3}{\Delta}; \quad \Psi_{2mn} = \frac{\Delta_4}{\Delta}; \quad W_{mn} = \frac{\Delta_5}{\Delta}, \quad (4)$$

где

$$\Delta := \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \\ b_7 & b_{11} & b_9 & b_{12} & b_{13} \\ b_8 & b_9 & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_9 & b_{12} & b_{15} & b_{17} & b_{18} \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, \quad \Delta_1 := \begin{pmatrix} 0 & b_7 & b_8 & b_9 & b_{10} \\ 0 & b_{11} & b_9 & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_9 & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ 0 & b_{12} & b_{15} & b_{17} & b_{18} \\ q_{mn} & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, \quad \Delta_2 := \begin{pmatrix} b_6 & 0 & b_8 & b_9 & b_{10} \\ b_7 & 0 & b_9 & b_{12} & b_{13} \\ b_8 & 0 & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_9 & 0 & b_{15} & b_{17} & b_{18} \\ b_1 & q_{mn} & b_3 & b_4 & b_5 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_3 := \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & 0 & b_9 & b_{10} \\ b_7 & b_{11} & 0 & b_{12} & b_{13} \\ b_8 & b_9 & 0 & b_{15} & b_{16} \\ b_9 & b_{12} & 0 & b_{17} & b_{18} \\ b_1 & b_2 & q_{mn} & b_4 & b_5 \end{pmatrix}, \quad \Delta_4 := \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 & 0 & b_{10} \\ b_7 & b_{11} & b_9 & 0 & b_{13} \\ b_8 & b_9 & b_{14} & 0 & b_{16} \\ b_9 & b_{12} & b_{15} & 0 & b_{18} \\ b_1 & b_2 & b_3 & q_{mn} & b_5 \end{pmatrix}, \quad \Delta_5 := \begin{pmatrix} b_6 & b_7 & b_8 & b_9 & 0 \\ b_7 & b_{11} & b_9 & b_{12} & 0 \\ b_8 & b_9 & b_{14} & b_{15} & 0 \\ b_9 & b_{12} & b_{15} & b_{17} & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & q_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вычисляя определители в (4) любым из стандартных методов, получим амплитуды  $U_{1mn}, U_{2mn}, \Psi_{1mn}, \Psi_{2mn}, W_{mn}$ . Далее по формулам (2) вычисляются искомые функции.

Численный счёт производился для трехслойной пластины, пакет которой составлен из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т.

### Литература

1. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.- 576с.
2. Старовойтов Э.И., Яровая А.В., Леоненко Д.В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003.- 367с.

## РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ АНАЛИЗА УПРАВЛЯЕМОСТИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Карпенко Ю. В., ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно

Задачи, описываемые реальными физическими процессами и протекающие различным образом в зависимости от конкретного воздействия на них управляющей стороны, рассматриваются в теории управления. Желанием выяснить, можно ли управлять конкретной системой для достижения заданных целей, если да, то какие усилия для этого потребуются, является проблема управляемости.

Пусть имеем стационарную систему вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

где

$$x \in R^n, u \in R^r, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times r}$$

*Определение.* Система (1) называется управляемой на отрезке  $T = [t_0, t_1]$ ,  $t_1 > t_0$ , если для любых векторов  $x_0, x_1 \in R^n$  найдется такое управление  $u(t)$ , при котором существует решение системы (1). [1]

Хорошо известны ранговые критерии управляемости Калмана, Хаутуса для управляемости линейных стационарных систем. В нашей работе мы будем пользоваться критерием Калмана [1]:

*Для управляемости системы необходимо и достаточно, чтобы  $\text{rank } K = n$ , где  $K = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ .*

В работе рассматривается проблема управляемости сингулярно возмущенной стационарной системы

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \quad (2)$$

$$\mu^* \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u$$

где

$$x_1 \in R^{n_1}, x_2 \in R^{n_2}, u \in R^r, A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}, A_{12} \in R^{n_1 \times n_2}, A_{21} \in R^{n_2 \times n_1}, A_{22} \in R^{n_2 \times n_2}, B_1 \in R^{n_1 \times r}, B_2 \in R^{n_2 \times r}, 0 < \mu < 1$$

Характерной особенностью сингулярно возмущенных систем (СВС) является то, что они описывают процессы, в которых присутствует так называемое явление «жесткости». Это явление состоит в том, что для описания процесса на интервале наблюдения надо использовать функции двух типов: на некоторых малых отрезках – быстро меняющиеся функции с большими производными (быстрые движения на участке погранслоя), а на остальной части – функции с малыми производными (медленные движения на области регулярного решения) [1].

Приведем систему (2) к виду

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{A_{21}}{\mu} x_1 + \frac{A_{22}}{\mu} x_2 + \frac{B_2}{\mu} u$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{A_{21}}{\mu} & \frac{A_{22}}{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{B_2}{\mu} \end{pmatrix} u$$

Тогда критерий управляемости (2) примет вид

$$\left[ \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{B_2}{\mu} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{A_{21}}{\mu} & \frac{A_{22}}{\mu} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{B_2}{\mu} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{A_{21}}{\mu} & \frac{A_{22}}{\mu} \end{pmatrix}^{n-1} * \begin{pmatrix} B_1 \\ \frac{B_2}{\mu} \end{pmatrix} \right] \quad (3)$$

Элементы матрицы  $A$  могут различаться порядком, этой же особенностью могут обладать и элементы матрицы  $B$ . При составлении матрицы управляемости (3) в процессе умножения элементов будет накапливаться погрешность. И при вычислении ранга может возникнуть ошибка. Тогда непосредственно применять критерий Калмана для анализа управляемости может быть затруднительно.

Целью работы является разработка программных средств анализа управляемости сингулярно возмущенных систем.

Пусть у нас есть невырожденные матрицы, имеющие структуру

$$lev = diag\left(\frac{1}{\mu} E_{n_1} \quad E_{n_2}\right) \text{ и } prav = diag(\mu E_m, \mu^2 E_m, \dots, \mu^n E_m) \quad \text{причем}$$

$lev \in R_{n \times n}$ ,  $prav \in R_{nr \times nr}$ ,  $E_k$  – единичная матрица размерности  $k \times k$ . Умножим матрицу управляемости на матрицу  $lev$  слева и на матрицу  $prav$  справа. В результате получим матрицу

$$K' = K_0 + \mu K_1 + \dots + \mu^{n-1} K_{n-1}, \quad (4)$$

где  $K_0, K_1, \dots, K_{n-1}$  матрицы, полученные из матриц  $A$  и  $B$  и не содержащие параметра  $\mu$ .

Из теории матриц известно, что если матрицы  $A \in R_{n \times n}$ ,  $B \in R_{n \times m}$ ,  $C \in R_{m \times m}$  невырожденные, то  $\text{rank } AB = \text{rank } B = \text{rank } BC = \text{rank } ABC$ . В силу этого  $\text{rank } K = \text{rank } K'$ . Поэтому справедливо утверждение.

*Для управляемости системы (2) необходимо и достаточно, чтобы  $\text{rank } K_0 + \mu K_1 + \dots + \mu^{n-1} K_{n-1} = n$ .*

Если система (1) управляема, то при незначительных изменениях элементов системы она останется полностью управляемой. С другой стороны, если система (1) не является полностью управляемой, то всегда можно незначительно изменить ее элементы так, чтобы она стала управляемой [2].

*Из предыдущего утверждения следует достаточное условие управляемости:*

*Если  $\text{rank } K_0 = n$ , то при достаточно малых  $\mu \in (0, \mu^0)$  система будет управляемой.*

В последнем утверждении фраза *при достаточно малых  $\mu \in (0, \mu^0)$*  имеет скорее качественный, чем количественный характер, поскольку словосочетание «достаточно малый» не имеет численного выражения. А нам важно знать, каким же малым должно быть возмущение, чтобы возмущенная система оставалась управляемой.

**Определение.** Мерой управляемости  $\mu(A, B)$  системы (1) назовем наименьшее сингулярное число матрицы  $K$ .

Такой выбор меры обусловлен тем, что минимальное сингулярное число – это наименьшее возмущение сингулярных чисел (что непосредственно связано с возмущением матрицы), которое превращает невырожденную матрицу в вырожденную. В нашем случае

для матрицы управляемости  $K$  это минимальное возмущение, которое может превратить ранг в неполный. Значит, можно говорить о том, что чем больше значение  $\mu(A, B)$ , тем более система управляема.

Если система (1) управляема, то при незначительных изменениях элементов системы она останется полностью управляемой. С другой стороны, если система (1) не является полностью управляемой, то всегда можно незначительно изменить ее элементы так, чтобы она стала управляемой [2].

В работе реализованы алгоритмы нахождения максимального значения  $\mu^0$ , достаточного для управляемости системы (2), в среде MATLAB, т. к. именно в этой среде лучше работать с матрицами.

### Литература

1. Афанасьев, Калмановский, Носов. Математическая теория конструирования систем управления – М.:Высш. шк., 1998. – 574с.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления / перевод с англ. Л. Л. Леонтьевой изд. - М.:Наука., 1972. - 576с.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛЯСКИ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛЭП

*Климкович П. И., Дерюгина Е. А., БНТУ, Минск*

Пляска – низкочастотный вид колебаний проводов, характеризующихся значительными амплитудами. Наиболее опасными являются однополуволновые пляски проводов, при которых амплитуды их колебаний и тяжения максимальны. Расчетной моделью провода является абсолютно гибкая, упругая, сопротивляющаяся кручению нить. Для проводов ЛЭП, имеющих относительную стрелу провеса менее 5 %, изменением тяжения вдоль пролета можно пренебречь [1]. Фактором, обуславливающим возбуждение и поддержание пляски проводов, является асимметричный гололедный осадок на них. Основные уравнения движения и кручения проводов с асимметричным гололедным осадком, могут быть получены с использованием принципа Даламбера [2]:

$$\frac{\partial^2 y_c}{\partial t^2} + \frac{\delta}{\rho} \cdot \frac{\partial y_c}{\partial t} - h \sin \theta_G \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - h \cos \theta_G \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{\rho} \left( T \frac{\partial^2 y_c}{\partial s^2} + P_y \right);$$

$$\frac{\partial^2 z_c}{\partial t^2} + \frac{\delta}{\rho} \cdot \frac{\partial z_c}{\partial t} + h \cos \theta_G \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - h \sin \theta_G \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{\rho} \left( T \frac{\partial^2 z_c}{\partial s^2} + P_z \right); \quad (1)$$

$$(I_c + \rho h^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} + \rho h \left[ \cos \theta_G \frac{\partial^2 z_c}{\partial t^2} - \sin \theta_G \frac{\partial^2 y_c}{\partial t^2} \right] + f_c \frac{\partial \theta}{\partial t} = GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} + M_a + M_p,$$

где  $y_c, z_c$  – проекции радиуса-вектора положения оси жесткости провода;  $\theta$  – угол кручения провода;  $\delta$  – коэффициент демпфирования колебаний;  $\rho$  – масса единицы длины провода после растяжения;  $h[h_y, h_z]$  – эксцентриситет провода;  $\theta_G = \theta_0 + \theta$  ( $\theta_0$  – начальный угол оледенения провода);  $\bar{P}$  – интенсивность внешней нагрузки на единицу длины провода;  $M_a$  – аэродинамический момент (АДМ) на единицу длины провода;  $T$  – мо-

дугль тяжения провода;  $I_c$  – момент инерции кручения провода, покрытого гололедом;  $f_c$  – коэффициент трения кручения провода;  $GJ$  – крутильная жесткость провода.

Система дифференциальных уравнений (ДУ) (1) пригодна для расчета поперечных и крутильных колебаний проводов при их произвольном пространственном расположении. Она описывает динамику гибкого провода с неравномерным крыловидным осадком при воздействии внешних распределенных сил и моментов. При пляске проводов изменения аэродинамических сил (АДС) и АДМ обусловлены изменением угла атаки. АДС и АДМ определяются в функции скорости  $V_r$  [2]. При построении математической модели используются аэродинамические характеристики (АДХ), полученные опытным путем для различных сечений проводов и характерных форм гололедного осадка [3, 4].

Математическая модель пляски проводов включает уравнения динамики проводов, поддерживающих гирлянд изоляторов в промежуточном и натяжных (анкерном) пролетах. При совместном решении уравнений математической модели краевые условия для проводов определяются из уравнения движения установленных по концам пролета гирлянд. Для нахождения начального положения провода используются уравнения статики, полученные из уравнений их динамики исключением производных по времени. Для численного решения системы ДУ второго порядка в частных производных гиперболического типа с переменными коэффициентами (1) используются разности. При этом система ДУ заменяется системой конечно-разностных уравнений:

$$\frac{\left(\hat{y}_i - 2y_i + \check{y}_i\right)}{\tau^2} - k_{yi} \frac{\left(\hat{\theta}_i - 2\theta_i + \check{\theta}_i\right)}{\tau^2} = D_{yi};$$

$$\frac{\left(\hat{z}_i - 2z_i + \check{z}_i\right)}{\tau^2} + k_{zi} \frac{\left(\hat{\theta}_i - 2\theta_i + \check{\theta}_i\right)}{\tau^2} = D_{zi};$$

(2)

$$\frac{\left(\hat{x}_i - 2x_i + \check{x}_i\right)}{\tau^2} = D_{xi};$$

$$\frac{\left(\hat{\theta}_i - 2\theta_i + \check{\theta}_i\right)}{\tau^2} - \frac{k_{yi}\rho_0}{I_c} \frac{\left(\hat{y}_i - 2y_i + \check{y}_i\right)}{\tau^2} + \frac{k_{zi}\rho_0}{I_c} \frac{\left(\hat{z}_i - 2z_i + \check{z}_i\right)}{\tau^2} = D_{\theta},$$

где

$$k_{yi} = h \sin \theta_i; \quad k_{zi} = h \cos \theta_i;$$

$$D_{xi} = \left(\lambda_i^2 + b_i^2 x_{Si}^2\right) x_{SSi} + b_i^2 x_{Si} y_{Si} y_{SSi} + b_i^2 x_{Si} z_{Si} z_{SSi} - d \cdot x_{ii} + F_{xi}^*;$$

$$D_{yi} = b_i^2 x_{Si} y_{Si} x_{SSi} + b_i^2 y_{Si} z_{Si} y_{SSi} + \left(\lambda_i^2 + b_i^2 z_{Si}^2\right) z_{SSi} - d \cdot y_{ii} + F_{yi}^* + k_{yi} \theta_{ii}^2;$$

$$D_{zi} = b_i^2 x_{Si} z_{Si} x_{SSi} + b_i^2 y_{Si} z_{Si} y_{SSi} + \left(\lambda_i^2 + b_i^2 z_{Si}^2\right) z_{SSi} - d \cdot z_{ii} + F_{zi}^* + k_{zi} \theta_{ii}^2;$$

$$D_{ai} = c^2 \theta_{ssi} + \frac{1}{l_c} \left( M_{ai} - M_{\rho} - f_T \theta_{ti} \right);$$

$\overline{F}_i^*$  – вектор суммарного усилия на единицу массы провода в  $i$ -ом узле.

Схема (2) явная и позволяет выразить  $\hat{R}_i$  и  $\hat{\theta}_i$  через  $\overline{R}_i$  и  $\check{R}_i$ ,  $\theta_i$  и  $\check{\theta}_i$  с двух предыдущих слоев. Поэтому, начиная со второго слоя, разностное решение вычисляется по указанной схеме. Решение на первом слое определяется по начальным данным с использованием разложения  $\overline{R}_i$  и  $\theta_i$  в ряд Тейлора [1].

Вычислительный эксперимент проводился по разработанной компьютерной программе (КП), в которой реализован численный метод расчета пляски проводов на основе уравнений (1). Она позволяет найти амплитуды колебаний проводов при пляске, максимальные и минимальные тяжения, а также определить характер процесса: развитие автоколебаний или их затухание. Достоверность расчетов по КП подтверждена сравнением их с опытными данными [5]. Таким образом, математическая модель и КП могут быть применены для оценки динамических характеристик пляски проводов воздушных ЛЭП.

### Литература

1. Сергей И. И., Стрелюк М. И. Динамика проводов электроустановок энергосистем при коротких замыканиях: Теория и вычислительный эксперимент. – Минск: ВУЗ-ЮНИТИ, 1999. – 252 с.
2. Стрелюк М. И., Сергей И. И. Расчет пляски расщепленных проводов с большим числом составляющих // Повышение эффективности сетей 110–1150 кВ: Сб. ст. / Науч.-исслед. ин-т по передаче электр. энергии постоян. током высокого напряжения (НИИПТ). – Ленинград: Энергоатомиздат, Ленингр. отд-ние, 1990. – С. 113–126.
3. Kazuo Goto, Toihiro Koike. A Numerical Calculation Method for Galloping and Prevention of it // Trans IEE. Japan. – 1977. – B97, № 7. – P. 405–412.
4. Masary Yamaoka. A Numerical Calculation Method for Galloping Oscillation of a Bundle Conductor Transmission Line // Trans. IEE Japan. – 1979. – B99, № 9. – P. 569–576.
5. The Simulation Method of Galloping of Overhead Transmission Line. – Technical Laboratory of the Hokkaido Electric Power Co. Ltd. – Joint Meeting of UNIPED, CORECH – Galloping, 1983, Kyoto, Japan.

## ВОЗДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ НАГРУЗКИ НА ВЯЗКОУПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Кузнецова А.А., БНТУ, Минск

Рассматривается движение с постоянной скоростью нормальной нагрузки по вязкоупругой балке, лежащей на вязкоупругом полупространстве. По балке, лежащей на вязкоупругом полупространстве, движется сосредоточенная нагрузка интенсивности  $P$  с постоянной скоростью  $c$ .

Дифференциальное уравнение изгиба балки, лежащей на упругом основании, записывается, как известно, следующим образом:

$$B \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(x, t), \quad (1)$$

где  $w(x,t)$  - нормальное перемещение оси балки,  $B=EI$  - ее изгибная жесткость,  $\rho(x,t)$  - интенсивность нагрузки, приложенной к балке,  $\rho$  - плотность материала балки.

В неподвижной системе координат вектор перемещения в упругом полупространстве удовлетворяет уравнению ([3])

$$\mu\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla\text{div}\vec{u} = \rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где  $\vec{u}(u_x, u_y, u_z)$  - вектор перемещения,  $\lambda, \mu, \rho$  - константы материала основания. Принято, что между балкой и поверхностью полупространства силы трения не возникают, то есть

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (3)$$

Кроме того, нормальные оси перемещения оси балки и вязкоупругого полупространства под ней совпадают, то есть

$$w(x,t) = u_z(x,0,0,t) \quad (4)$$

Далее, как и предыдущие исследователи, будем считать, что нагрузка передается на основание равномерно по ширине опорной полосы.

Введем подвижную систему координат, связанную с нагрузкой, так как в подвижной системе (вместо  $x$  рассматриваем  $x - ct$ ), в которой нагрузка приложена в начале координат, задачу можно считать стационарной. При этом уравнения (1) и (2) примут вид:

$$B\frac{d^4w}{dx^4} + \rho c^2\frac{d^2w}{dx^2} = P(x), \quad (5)$$

$$\mu\Delta\vec{U} + (\lambda + \mu)\nabla\text{div}\vec{U} = \rho c^2\frac{\partial^2\vec{U}}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где  $\vec{U}(U_x, U_y, U_z)$  - вектор перемещения в полупространстве в подвижной системе координат.

Предположим, что как материал балки, так и основание наделены вязкоупругими свойствами. Добавление вязкости приводит к необходимости учитывать воздействие почти периодического возмущения в течение достаточно долгого времени. В задачах, не связанных с интегро-дифференциальными уравнениями, указанная периодичность учитывается добавлением сомножителей вида  $\exp(i\omega x)$ , а также введению так называемого комплексного модуля упругости  $E = E' + iE''$ . Однако представление комплекснозначных функций действительного переменного в показательной форме не совсем удобно с точки зрения дифференцирования и разделения действительной и мнимой частей. Поэтому для учета вязкости представим  $\lambda, \mu, \vec{U}$  в виде комплексных чисел и функций соответственно в алгебраической форме.

Таким образом, мы введем следующие обозначения  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ ,  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ ,  $\vec{U} = \vec{U}_1 + i\vec{U}_2$  и подставим в уравнение (6). Исходя из свойств аддитивности операторов Лапласа и Гамильтона, мы получим уравнение:

$$\begin{aligned} (\mu_1 + i\mu_2)(\Delta\vec{U}_1 + i\Delta\vec{U}_2) + ((\lambda_1 + \mu_1) + i(\lambda_2 + \mu_2))(\nabla\text{div}\vec{U}_1 + i\nabla\text{div}\vec{U}_2) = \\ = \rho c^2\left(\frac{\partial^2\vec{U}_1}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2\vec{U}_2}{\partial x^2}\right) \end{aligned} \quad (7)$$



Разделив в уравнении (7) действительную и мнимую части, получим систему

$$\begin{cases} \Delta(\mu_1 \vec{U}_1 - \mu_2 \vec{U}_2) + \nabla \operatorname{div}(\mu_1 \vec{U}_1 - \mu_2 \vec{U}_2) + \nabla \operatorname{div}(\lambda_1 \vec{U}_1 - \lambda_2 \vec{U}_2) = \rho c^2 \frac{\partial^2 \vec{U}_1}{\partial x^2} \\ \Delta(\mu_2 \vec{U}_1 + \mu_1 \vec{U}_2) + \nabla \operatorname{div}(\mu_2 \vec{U}_1 + \mu_1 \vec{U}_2) + \nabla \operatorname{div}(\lambda_1 \vec{U}_1 + \lambda_2 \vec{U}_2) = \rho c^2 \frac{\partial^2 \vec{U}_2}{\partial x^2} \end{cases} \quad (8)$$

Разложив, следуя [1], поле перемещений на потенциальную и соленоидальную составляющие ( $\vec{U} = \nabla \Phi + \vec{U}'$ ), можно получить следующие системы уравнений:

$$\begin{cases} \left( \Delta - h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi_1 - \left( \Delta - h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi_2 = 0 \\ \left( \Delta - h_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi_1 + \left( \Delta - h_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi_2 = 0 \end{cases}, \quad (9)$$

$$\begin{cases} \left( \Delta - k_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vec{U}'_1 - \left( \Delta - k_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vec{U}'_2 = 0 \\ \left( \Delta - k_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vec{U}'_1 + \left( \Delta - k_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \vec{U}'_2 = 0 \end{cases}, \quad (10)$$

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{U}'_1 = 0 \\ \operatorname{div} \vec{U}'_2 = 0 \end{cases}, \quad (11)$$

где  $h_j = \frac{c}{c_j}$ ,  $k_j = \frac{c}{c_{(j+2)}}$ ,  $c_j = \sqrt{\frac{2\mu_j + \lambda_{j1}}{\rho}}$ ,  $c_{(j+2)} = \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho}}$ , ( $j = 1, 2$ ).

Для решения систем (9) - (11) можно применить методы (преобразований Фурье), аналогичные методам решения задачи в упругой постановке [1]. С учетом симметрии относительно оси  $Oy$ , воспользуемся представлением неизвестных функций в виде двумерных интегралов Фурье ( $k = 1, 2$ ):

$$U'_{kx} = \int_0^{\infty} \int [A_{kx}(\alpha, \beta) \cos \alpha x + C_{kx}(\alpha, \beta) \sin \alpha x] \exp[-\gamma_{(2k)} z] \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta,$$

$$U'_{ky} = \int_0^{\infty} \int [A_{ky}(\alpha, \beta) \cos \alpha x + C_{ky}(\alpha, \beta) \sin \alpha x] \exp[-\gamma_{(2k)} z] \sin \beta y \, d\alpha \, d\beta,$$

$$U'_{kz} = \int_0^{\infty} \int [A_{kz}(\alpha, \beta) \cos \alpha x + C_{kz}(\alpha, \beta) \sin \alpha x] \exp[-\gamma_{(2k)} z] \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta,$$

$$\Phi_k = \int_0^{\infty} \int [A_{k\phi}(\alpha, \beta) \cos \alpha x + C_{k\phi}(\alpha, \beta) \sin \alpha x] \exp[-\gamma_{(2k-1)} z] \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta.$$

Подставим выражения для потенциальных составляющих в систему (9):

$$\begin{cases} ((1 - h_1^2) \alpha^2 + \beta^2 - \gamma_1^2) \Phi_1 - ((1 - h_2^2) \alpha^2 + \beta^2 - \gamma_3^2) \Phi_2 = 0 \\ ((1 - h_2^2) \alpha^2 + \beta^2 - \gamma_3^2) \Phi_1 - ((1 - h_1^2) \alpha^2 + \beta^2 - \gamma_1^2) \Phi_2 = 0 \end{cases}.$$

Последняя система имеет нетривиальное решение, когда ее определитель равен нулю:  $((1 - h_1^2) \alpha^2 + \beta^2 - \gamma_1^2)^2 + ((1 - h_2^2) \alpha^2 + \beta^2 - \gamma_3^2)^2 = 0$ . Отсюда следует, что  $(1 - h_1^2) \alpha^2 + \beta^2 - \gamma_1^2 = 0$ ,  $(1 - h_2^2) \alpha^2 + \beta^2 - \gamma_3^2 = 0$ . Другими словами, система (9) распадается на два независимых уравнения:

$$\left( \Delta - h_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Phi_k = 0, \quad (k = 1, 2).$$

Аналогично, система (10) распадается на два независимых (векторных) уравнения  $\left(\Delta - k_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \overline{U}_k' = 0$ , ( $k = 1, 2$ ). Что касается системы (точнее, пары уравнений) (11), то она ничем не отличается от случая упругой постановки.

Используя формулы [2], запишем выражения для действительной и мнимой части нормального перемещения поверхности упругого подпространства под движущейся нагрузкой

$$U_{1z} = \frac{4P(1-\nu)}{\pi^2 b} \int_0^\infty \frac{S_1(u) du}{E'u + \varepsilon_1 u^2 (u^2 - \delta^2) S_1(u)}, \quad \text{где } S_1(u) = \frac{k^2}{1-\nu} \int_0^\infty \frac{D_1 \sin(u\tau) d\tau}{\tau [4D_2(D_1 - D_2)D_0^2 - k^4]},$$

$$D_0 = \sqrt{1 + \tau^2}, \quad D_1 = \sqrt{1 + \tau^2 - h_1^2}, \quad D_2 = \sqrt{1 + \tau^2 - k_1^2}, \quad \varepsilon_1 = \frac{32(1-\nu^2)B}{\pi b^4}, \quad \delta = \frac{bc\sqrt{\rho_b}}{2\sqrt{B}}.$$

Таким образом, задача в наследственно-упругой постановке распалась на пару независимых задач, по виду совпадающих с задачей в упругой постановке. Поэтому формулы для перемещений, деформаций и напряжений, полученные в монографии [1], с некоторыми уточнениями применимы в нашем случае.

### Литература

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.
2. Чигарев А.В., Липень Б.И. Воздействие сосредоточенной нагрузки при движении на упругое полупространство при движении по его поверхности. – Мн.: Машиностроение, 1999, стр. 69-74.
3. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высш. Школа, 1976. – 272 с.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА БЕЗЫНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

*Леоненко Д. В., БелГУТ, Гомель*

В монографии [1] исследованы нагружения трехслойных стержней, пластин и оболочек при локальных воздействиях. Здесь рассматриваются поперечные колебания несимметричного по толщине трехслойного стержня со сжимаемым наполнителем, расположенного на упругом основании.

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком наполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты  $z$ . На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в наполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью наполнителя. К внешней поверхности первого несущего слоя приложена динамическая поверхностная нагрузка  $q(x, t)$ . На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания  $q_k(x, t)$  (рисунок 1). Через  $w_k(x, t)$  и  $u_k(x, t)$  обозначены прогибы и продольные перемещения срединных линий несущих слоёв. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к его длине  $l$ .

Перемещения в слоях  $u^{(k)}(x, z)$  и  $w^{(k)}(x, z)$  выражаются через четыре искомые функции  $w_1(x)$ ,  $u_1(x)$ ,  $w_2(x)$  и  $u_2(x)$ :

$$u^{(1)} = u_1 - \left( z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x}; \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1);$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left( z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x}; \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

$$u^{(3)} = \left( 1 + \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left( 1 - \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right);$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c).$$

Здесь  $z$  – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

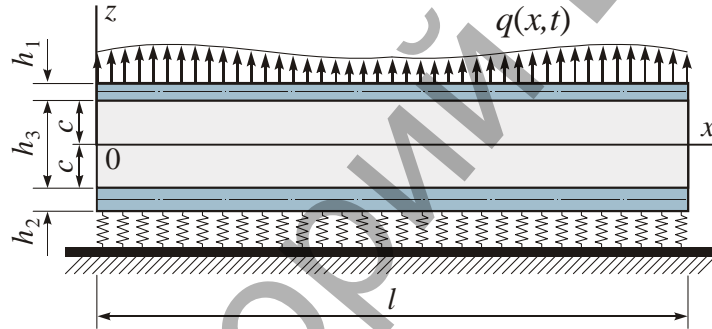


Рисунок 1. Трехслойный стержень со сжимаемым заполнителем

Уравнения движения рассматриваемого трехслойного стержня получим, используя вариационный принцип Лагранжа с учетом работы сил инерции

$$\delta A - \delta W = \delta A_I \quad (1)$$

где  $\delta A$  – вариация работы внешних сил;  $\delta W$  – вариация работы внутренних сил упругости;  $\delta A_I$  – вариация работы сил инерции.

После подстановки значений вариаций работ в (1) получим систему дифференциальных уравнений движения в частных производных:

$$\begin{aligned} a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 &= 0; \\ -a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + & \\ 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 &= 0; \\ -a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + & \\ + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \ddot{w}_1 - m_3 \ddot{w}_1,_{xx} &= q; \\ -a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - & \\ -a_{16} w_{1,xxx} + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 + m_2 \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_2,_{xx} &= -q_r. \end{aligned} \quad (2)$$

В качестве основания примем модель Винклера (Winkler E.) [2]. Учитывая, что стержень прикреплен к основанию, величина давления со стороны основания будет иметь вид

$$q_r = \kappa_0 w_2 .$$

Решение начально-краевой задачи (5) проводится методом Бубнова – Галеркина. Для этого искомые перемещения  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$ ,  $w_1(x, t)$ ,  $w_2(x, t)$  и нагрузка  $q(x, t)$  представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m1}(t); & u_2(x, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m2}(t); \\ w_1(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m3}(t); & w_2(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m4}(t); \\ q(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} q_m(t), & q_m(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l q(x, t) \sin \frac{\pi m x}{l} dx. \end{aligned}$$

В этом случае выполняются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные жесткие опоры.

Функции  $T_{mk}(t)$  представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^4 \delta_{mki} \zeta_{mi} \quad \left( \sum_{i=1}^4 \delta_{mik}^2 = 1 \right),$$

где  $\delta_{mki}$  – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Выражение для функций  $\zeta_{mi}(t)$  принимаются в виде

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi} t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi} t) + \frac{1}{\omega_{mi}} \int_0^t \sin(\omega_{mi} (t - \tau)) \tilde{q}_{mi}(\tau) d\tau,$$

где  $\omega_{mi}$  – частоты собственных колебаний стержня,  $A_{mi}$ ,  $B_{mi}$  – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

Таким образом, построена математическая модель и решена задача о колебании трехслойного стержня на упругом безынерционном винклеровском основании.

### Литература

1. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 491 с.

## ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

*Лигоцкий А. Л., БелГУТ, Гомель*

В работе [1] исследован изгиб круглой изотропной трёхслойной пластины, деформирование прямоугольной изотропной пластины при различных граничных условиях. В [2] рассмотрено деформирование трёхслойного стержня с несжимаемым наполнителем при локальных нагрузках.

В данной работе рассмотрена несимметричная по толщине упругая трёхслойная ортотропная прямоугольная пластина с жестким наполнителем. Систему координат  $x, y, z$

связем со срединной плоскостью заполнителя. Для описания кинематики пакета будем использовать гипотезу «ломаной» нормали: в тонких несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi$ ,  $\psi_x(x, y)$ ,  $\psi_y(x, y)$  – проекции этого угла на плоскости YOZ и XOZ соответственно. Деформации считаем малыми.

На внешний слой стержня действует распределенная силовая нагрузка  $p_x(x, y)$ ,  $p_y(x, y)$ ,  $q(x, y)$ . Через  $w(x, y)$  и  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$  обозначим прогиб и продольное перемещение средней плоскости заполнителя. Так как материалы всех слоев несжимаемы в поперечном направлении, то прогиб в остальных точках стержня совпадает с  $w(x, y)$ . По контуру предполагаем наличие жестких диафрагм, препятствующих относительно сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости.

Используя геометрические гипотезы, продольные перемещения в слоях выразим через пять искомых функций  $w(x, y)$  и  $u_x(x, y)$ ,  $u_y(x, y)$ ,  $\psi_x(x, y)$ ,  $\psi_y(x, y)$ .

Уравнения равновесия трёхслойной пластины в усилиях получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta W = \delta A, \quad (1)$$

где  $\delta W$ ,  $\delta A$  – вариации работ внутренних напряжений и внешних сил.

При определении работы внешних сил считаем, что к срединной поверхности заполнителя приложены произвольные распределённые нагрузки, а по контуру пластины – распределённые по длинам сторон силы и моменты. Вариация работы внешней поверхностной нагрузки представима в виде ( $dS = dx dy$ ):

$$\delta A_1 = \iint_S (p_x \delta u_x + p_y \delta u_y + q \delta w) dS$$

Вариация работы внешних сил и моментов по контуру:

$$\begin{aligned} \delta A_2 = & - \int_y (N_x^0 \delta u_x + Q_{xy}^0 \delta u_y - M_{xx}^0 \delta w_{,x} - M_{xy}^0 \delta w_{,y} + Q_{xx}^0 \delta w) dy + \\ & + \int_x (N_y^0 \delta u_y + Q_{xy}^0 \delta u_x - M_{yy}^0 \delta w_{,y} - M_{xy}^0 \delta w_{,x} + Q_{yy}^0 \delta w) dx + \\ & + \int_y (N_x^l \delta u_x + Q_{xy}^l \delta u_y - M_{xx}^l \delta w_{,x} - M_{xy}^l \delta w_{,y} + Q_{xx}^l \delta w) dy + \\ & + \int_x (N_y^l \delta u_y + Q_{xy}^l \delta u_x - M_{yy}^l \delta w_{,y} - M_{xy}^l \delta w_{,x} + Q_{yy}^l \delta w) dx, \end{aligned}$$

где  $N_i^0, Q_{ij}^0, M_{ij}^0, N_i^l, Q_{ij}^l, M_{ij}^l$  ( $i, j = x, y$ ) – заданные силы и моменты, действующие по контуру пластины ( $x = 0, x = l, y = 0, y = l$ ).

Таким образом, вариация работы суммарной приложенной нагрузки

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2.$$

Вариация сил упругости будет следующей:

$$\begin{aligned} \delta W = & \sum_{k=1}^3 \iiint_V \sigma_{ij}^{(k)} \delta \epsilon_{ij}^{(k)} dV = \iint_S \sum_{k=1}^3 \left( \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta \epsilon_{xx}^{(k)} dz + \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)} \delta \epsilon_{yy}^{(k)} dz + \right. \\ & \left. + 2 \int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)} \delta \epsilon_{xy}^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \epsilon_{xz}^{(3)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)} \delta \epsilon_{yz}^{(3)} dz \right) dS \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений равновесия трёхслойной пластины в усилиях имеет вид:

$$\begin{cases} N_{x,x} + Q_{xy,y} + p_x = 0; \\ N_{y,y} + Q_{xy,x} + p_y = 0; \\ M_{xx,xx} + M_{yy,yy} + 2M_{xy,xy} + q = 0; \\ H_{xx,x} + H_{xy,y} - Q_{xx} = 0; \\ H_{yy,y} + H_{xy,x} - Q_{yy} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

И силовые граничные условия:

$$x=0: N_y = N_y^0; Q_{xy} = Q_{xy}^0; Q_{yy} = Q_{yy}^0; M_{yy} = M_{yy}^0;$$

$$M_{xy} = M_{xy}^0; H_{yy} = 0; H_{xy} = 0;$$

$$x=l_x: N_y = N_y^l; Q_{xy} = Q_{xy}^l; Q_{yy} = Q_{yy}^l; M_{yy} = M_{yy}^l;$$

$$M_{xy} = M_{xy}^l; H_{yy} = 0; H_{xy} = 0;$$

$$y=0: N_x = N_x^0; Q_{xy} = Q_{xy}^0; Q_{xx} = Q_{xx}^0; M_{xx} = M_{xx}^0;$$

$$M_{xy} = M_{xy}^0; H_{xx} = 0; H_{xy} = 0;$$

$$y=l_y: N_x = N_x^l; Q_{xy} = Q_{xy}^l; Q_{xx} = Q_{xx}^l; M_{xx} = M_{xx}^l;$$

$$M_{xy} = M_{xy}^l; H_{xx} = 0; H_{xy} = 0.$$

Система дифференциальных уравнений равновесия трехслойной ортотропной прямоугольной пластины в перемещениях получается путём использования закона Гука и уравнений (1):

$$\begin{aligned} a_1 u_{x,yy} + a_2 u_{y,xy} + a_3 u_{x,xx} + a_4 \psi_{x,yy} + a_5 \psi_{y,xy} + a_6 \psi_{x,xx} - a_7 w_{,xxx} - a_8 w_{,xyy} + p_x &= 0, \\ a_1 u_{y,xx} + a_9 u_{x,xy} + a_{10} u_{y,yy} + a_4 \psi_{y,xx} + a_{11} \psi_{x,xy} + a_{12} \psi_{y,yy} - a_{13} w_{,yyy} - a_{14} w_{,xyy} + p_y &= 0, \\ a_7 u_{x,xxx} + a_{13} u_{y,yyy} + a_{15} u_{x,xyy} + a_{16} u_{y,xyx} + a_{17} \psi_{x,xxx} + a_{18} \psi_{y,yyy} + a_{19} \psi_{x,xyy} + a_{20} \psi_{y,xyx} - \\ - a_{21} w_{,xxx} - a_{22} w_{,yyy} - a_{23} w_{,xyy} + q &= 0, \\ a_6 u_{x,xx} + a_5 u_{y,xy} + a_4 u_{x,yy} + a_{24} \psi_{x,xx} + a_{25} \psi_{y,xy} + \\ + a_{30} \psi_{x,yy} - a_{26} w_{,xyy} - a_{27} w_{,xxx} - G_{xz}^{(3)} c \psi_x &= 0, \\ a_{12} u_{y,yy} + a_{11} u_{x,xy} + a_4 u_{y,xx} + a_{28} \psi_{y,yy} + \\ + a_{29} \psi_{x,xy} + a_{30} \psi_{y,xx} - a_{31} w_{,yxx} - a_{32} w_{,yyy} - G_{yz}^{(3)} c \psi_y &= 0, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $a_k$  определяются геометрическими параметрами пластины и упругими параметрами материалов несущих слоёв. Таким образом, добавив к уравнениям (5) граничные условия в перемещения, замкнём задачу об изгибе трёхслойной ортотропной пластины.

### Литература

1. Старовойтов Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. – Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.
2. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагрузки трёхслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.

## СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СМЕСИТЕЛЬНОГО БАКА

Марфин А. В., Калашников А. П., БГТУ, Минск

Рассмотрим смесительный бак с площадью поперечного сечения  $A_c$ . Горячий входной поток характеризуется температурой  $T_H$  и регулируемым расходом  $F_H$ ; холодный входной поток -  $T_c$  и  $F_c$ ; возмущением является поток, поступающий из другого аппарата и характеризуемый переменными температурой  $T_d$  и расходом  $F_d$ . В баке происходит полное перемешивание; выход зависит от высоты жидкости в баке:  $F(h) = K\sqrt{h}$ .

Зададимся следующими численными значениями:

$$A_c = 50 \text{ м}^2, T_H = 363 \text{ К}, F_H = 0.4 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}, T_c = 283 \text{ К}, F_c = 0.4 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}, T_d = 293 \text{ К}, F_d = 0.2 \frac{\text{м}^3}{\text{с}}, K = 2$$

Модель процесса получается из уравнений материального и энергетического балансов в дифференциальной форме [1]:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{1}{A_c} \cdot (F_H + F_c + F_d - F(h)), \\ \frac{d(hT)}{dt} &= \frac{1}{A_c} \cdot (F_H \cdot T_H + F_c \cdot T_c + F_d \cdot T_d - F(h) \cdot T) \end{aligned} \quad (1)$$

Эта модель нелинейная, но её можно линеаризовать в окрестности желаемого режима [1] и линеаризованная модель будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{1}{A_c} \cdot \left[ u_1(t) + u_2(t) + d_1(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{F(h_s)}{h_s} \cdot x_1(t) \right], \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{1}{A_c h_s} \cdot \left[ (T_H - T_s)u_1(t) + (T_c - T_s)u_2(t) + (T_{ds} - T_s)d_1(t) + F_{ds}d_2(t) - F(h_s)x_2(t) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Если ввести теперь векторы:  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ ,  $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

и матрицы:  $A = \begin{pmatrix} -0.00667 & 0 \\ 0 & -0.013 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.02 \\ 0.181 & 0.002889 \end{pmatrix}$ ,  $\Gamma = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ -0.04 & 0.0003 \end{bmatrix}$

систему (2) можно записать в векторно-матричной форме

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \Gamma d(t), t \geq t_0, x(t) \in R_2, u(t) \in R_2, d(t) \in R_2, x(t_0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t), y(t) \in R_2, \end{aligned}$$

### Компенсация возмущающих воздействий

Введем компенсирующее устройство.

$$u^*(t) = u(t) - K \cdot d(t),$$

где  $K$  матрица компенсатора, тогда уравнение

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u^*(t) + \Gamma \cdot d(t), \text{ примет следующий вид:}$$

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) - B \cdot K \cdot d(t) + \Gamma \cdot d(t)$$

Для того, чтобы исключить влияние  $d(t)$ , нужно чтобы

$$K = \begin{bmatrix} -0.241 & 0.001688 \\ 1.241 & -0.001668 \end{bmatrix} \quad (3)$$

получаем:

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t). \quad (4)$$

### Нахождение закона управления

Линейная система называется *управляемой в момент времени*  $t_1$ , если каждое событие  $(t_0, x_0)$ , где  $t_0$  фиксировано, может быть переведено с помощью управления  $u(t)$  в любое наперед заданное состояние  $x_1 \in X$ .

Проверим условие полной управляемости системы (4), для чего найдем матрицу управляемости [2]  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.02 & -0.0001333 & -0.0001333 \\ 0.181 & 0.002889 & -0.0002409 & -0.00003852 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы  $P$  равен 2, значит система является управляемой.

Найдём для нашей системы закон управления, который переводит систему из состояния  $x_0$  при  $t = t_0$  в состояние  $x_1$ , при  $t = t_1 \geq t_0$ . Где  $x_0 = \begin{bmatrix} h_0 \\ T_0 \end{bmatrix}$ ,  $x_1 = \begin{bmatrix} h_1 \\ T_1 \end{bmatrix}$ ,  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 283 \end{bmatrix}$ ,  $x_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 323 \end{bmatrix}$ ,  $h_0$  - начальная высота жидкости в баке,  $T_0$  - начальная температура жидкости в баке (окружающей среды),  $h_1$  - конечная (желаемая) высота жидкости в баке,  $T_1$  - конечная температура жидкости в баке.

Управление будем искать по формуле: [2]

$$U(t) = -B'(t) \cdot \Phi'(t_0, t) \cdot x_*, \quad (5)$$

где  $x_*$  удовлетворяет равенству:

$$W(t_0, t_1) \cdot x_* = x_0 - \Phi(t_0, t_1) \cdot x_1; \quad (6)$$

откуда

$$x_* = W(t_0, t_1)^{-1} \cdot (x_0 - \Phi(t_0, t_1) \cdot x_1) \quad (7)$$

$B(t)$  - матрица управления;  $\Phi(t_0, t)$  - фундаментальная матрица системы,

$$W(t_0, t_1) = \int_0^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) B'(t) \Phi(t_0, t) dt - \text{область значений линейного преобразования,}$$

которой принадлежит вектор  $x_0 - \Phi(t_0, t_1) x_1$  [2].

В конечном виде закон управления примет вид [2]:

$$U(t) = -B' \cdot \Phi'(t_0, t) \cdot W^{-1}(t_0, t_1) \cdot [x_0 - \Phi(t_0, t_1) \cdot x_1] \quad (8)$$

Используя вычисление фундаментальной матрицы и ее обращение в среде Matlab, была составлена программа расчета программного управления. В частности, было получено управление по двум каналам

$$U_1(t) = -3.31 \cdot e^{0.00667t} + 1.4644 \cdot e^{0.0133t},$$

$$U_2(t) = -3.31 \cdot e^{0.00667t} + 0.0234 \cdot e^{0.0133t} \quad \text{соответственно.}$$

Проверка показала, что система попадает в заданное конечное состояние.

### Литература

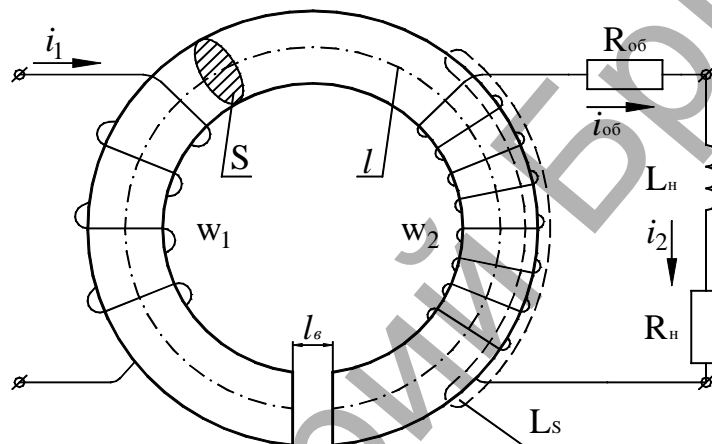
1. Рей У., Методы управления технологическими процессами: Пер. с англ. - М.: Мир, 1983.-386 с., ил.
2. Андреев Ю.Н., Управление конечномерными линейными объектами. - М.: Наука, 1976, 424 стр.
3. Дьяконов В.П., MATLAB 6/6.1/6.5+SIMULINK4/5 в математике и моделировании. Полное руководство пользователя. - М.: СОЛОН-Пресс. – 2003.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. -М.: «Наука», 1972.
5. Филипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001 – 616 с.: ил.



## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОДИНОЧНОГО ТРАНСФОРМАТОРА ТОКА

Недабой М. А., БНТУ, г. Минск

Электромагнитные трансформаторы тока (ТТ) обычного исполнения широко используются в энергосистемах в качестве преобразователей тока для питания измерительных цепей устройств релейной защиты (РЗ). В зависимости от режима работы ТТ и необходимой точности результата исследования процессов в ТТ и токовых цепях устройств РЗ могут быть выполнены расчетными методами и методами моделирования. К первым относятся: аналитические, графические и графоаналитические методы. Ко вторым – физическое и математическое моделирование. Достоинство метода математического моделирования состоит в том, что он позволяет описать реально существующие физические процессы в ТТ и токовых цепях устройств РЗ.



Исходными данными для математической модели являются конструктивные параметры ТТ: сечение стали сердечника ( $S$ ) и его длина ( $l$ ), марка стали сердечника, наличие в сердечнике немагнитного зазора ( $l_B$ ), количество витков и сопротивления первичной ( $w_1$ ) и вторичной ( $w_2$ ,  $R_{об}$ ) обмоток, параметры вторичной нагрузки ( $R_H$ ,  $L_H$ ) и закон изменения первичного тока.

Математическое описание ТТ [1] включает зависимость первичного тока  $i_1$  от времени  $t$  (1), дифференциальное уравнение равновесия между э.д.с. вторичной обмотки и падениями напряжения в замкнутом контуре вторичной обмотки (2), уравнение м.д.с. в магнитопроводе ТТ (3) и уравнение, аппроксимирующее характеристику намагничивания сердечника (4).

Приведенную модель одиночного ТТ можно использовать в процессе наладки, профилактического контроля и восстановления устройств РЗ посредством испытательной установки реле-томограф; для получения моделей трехфазных групп ТТ, соединенных по различным схемам; оценки погрешности работы ТТ в переходных режимах КЗ; как составную часть комплекса программных средств для выявления короткозамкнутых витков ТТ, посредством снятия его вольтамперной характеристики [2].

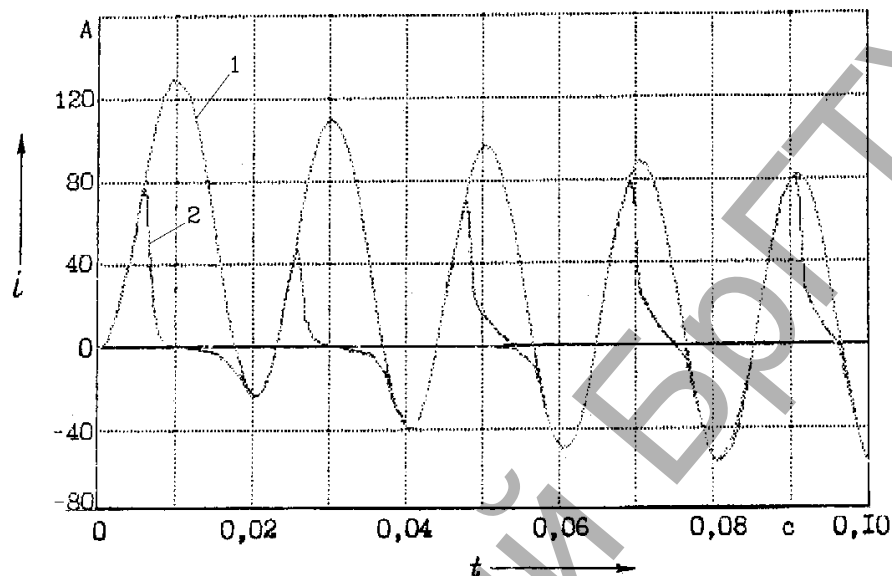
$$i_1 = \sqrt{2}I_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + I e^{-\frac{t}{T}} + \sqrt{2}I_n \sin(n\omega t + \alpha_n) e^{-\frac{t}{T_n}} \quad (1)$$

$$w_2 S \frac{dB}{dt} = R_{об} i_{об} + L_S \frac{di_{об}}{dt} + R_H i_2 + L_H \frac{di_2}{dt}, \quad i_{об} = i_2 \quad (2)$$

$$w_1 i_1 - w_2 i_{об} = IH + \frac{l_B}{\mu_0} B \quad (3)$$

$$H = f(B) \quad (4)$$

Одним из недостатков рассмотренной модели является наличие в ней индуктивности рассеяния ( $L_s$ ), учитывающей неравномерность намотки обмотки на магнитопровод [3]. Лишь в случае тороидального сердечника эту величину можно считать близкой к нулю. В остальных случаях величину этого параметра определить достаточно трудоемко. Актуальным является вопрос построения математической модели ТТ без использования индуктивности рассеяния.



Результаты расчетов (1 – приведенный первичный ток; 2 – вычисленный вторичный ток: активная нагрузка, сталь Э-310, кусочно-параболическая аппроксимация) в значительной степени зависят от качества аппроксимации характеристики намагничивания стали магнитопровода [4]. Желательно применять приближение, учитывающее гистерезис характеристики намагничивания.

### Литература

1. Сопьяник В. Х. Расчет и анализ переходных и установившихся процессов в трансформаторах тока и токовых цепях устройств релейной защиты. – Мн.: БГУ, 2000. – 143 с.: ил.
2. Власов А. И., Глушенок Е. А., Радюк В. Л., Сопьяник В. Х. Методика снятия и расчета вольт-амперных характеристик намагничивания трансформаторов тока на основе цифровых технологий // Энергетика... (Изв. ВУЗов). – 2003. – №5. – С. 5–10.
3. Зихерман М. Х. Об электромагнитном рассеянии обмоток трансформатора // Электричество. – 1983. – №9. – С. 60–63.
4. Жук Е. М., Сопьяник В. Х. Расчет и анализ на ПЭВМ процессов в трансформаторах тока с учетом их характеристик намагничивания и вторичных нагрузок // Энергетика... (Изв. ВУЗов). – 2001. – №5. – С. 23–29.

## ПРОБЛЕМЫ РЕШЕТОЧНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВНЕРЕШЕТОЧНОЙ МОДЕЛИ ПОЛИДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЫ

*Разумейчик В.С., Дереченник А.С., БГТУ, Брест*

Одной из важных задач вычислительного материаловедения является адекватное модельное представление структуры многокомпонентных материалов (композитных, дисперсных, поликристаллических и т.п.). Так, например, исследование процессов гидратации цементной смеси (растворения дисперсных компонентов, диффузии вещества в

дисперсной среде, химических реакций с образованием новых веществ и пор) и эволюции ее микроструктуры, а также оценка разнообразных структурно-топологических характеристик такой полидисперсной системы требуют создания соответствующих программных средств генерации ее сложной трехмерной структуры. Для этой цели наиболее выгодным является применение внерешеточного метода моделирования, т.е. размещения составляющих систему элементов без использования какой-либо пространственной сетки. Такая модель оказалась вполне эффективной, с точки зрения достигаемой плотности упаковки и времени моделирования, для генерации размещения сферических частиц дисперсной фазы в дисперсионной среде [1].

Для моделирования реальных физических и физико-химических процессов, происходящих в таких системах, представляется целесообразным использование метода конечных разностей. Метод конечных элементов в данном случае потребует для каждого из процессов независимого (самостоятельного) разбиения на ячейки, а большое количество расчетных параметров в ходе моделирования процессов в многофазной трехмерной системе приведет к резкому увеличению вычислительной сложности модели.

Таким образом, возникает задача перехода от внерешеточной модели полидисперсной системы к решеточному ее представлению. Так как полидисперсная система – это сложная гетерогенная система, состоящая из различных по химическому составу и размеру частиц, поставленная задача не является тривиальной. Немаловажным здесь является выбор расчетной сетки для представления трехмерной полидисперсной системы в процессе ее эволюции, а также метода преобразования из внерешеточной модели системы в решеточную.

Для простоты и удобства область моделирования была разбита на равные кубические ячейки (одинаковый шаг сетки по каждой из трех осей координат). Далее, необходимо определить объемы всех фаз, попавших в каждую ячейку. В частности, возникает задача определения объема части сферы, решение которой с применением интегрирования приводит к росту вычислительной сложности модели из-за появления нелинейных вычислительных операций. Тем не менее, к настоящему времени разработаны методы приближенного численного интегрирования (простейшими из них являются формулы трапеций и Симпсона). Но и они в случае достаточного (для обеспечения требуемой точности) количества узлов интегрирования и кратного интеграла весьма трудоемки даже для современных ЭВМ.

Для вычисления объема фигуры (части сферы), заключенной в куб, можно также использовать сеточное приближение, заключающееся в разбиении куба на ячейки меньшего размера и определении принадлежности сферы каждой из ячеек куба. Но и данный алгоритм либо является неточным (вследствие большого шага сетки), либо требует значительного процессорного времени (уменьшение шага сетки в  $n$  раз приводит к увеличению числа ячеек в  $n^3$  раз).

Наиболее оптимальным оказалось применение приближенного вычисления объема фигуры методом Монте-Карло (метод статистических испытаний). С помощью генератора случайных чисел получали набор точек, равномерно распределенных внутри куба. Каждую точку проверяли на принадлежность какой-либо фазе. Если принять сферическое приближение зерен дисперсной фазы, то процедура такой проверки заключается лишь в нахождении расстояния от данной точки до центра зерна и сравнения его с радиусом зерна. Таким образом, легко определить концентрацию любой фазы в каждой

ячейке моделируемой системы - как отношение количества точек, принадлежащих дисперсной фазе, к общему количеству пробных точек, а, следовательно, и ее общий объем.

Для получения статистически значимых результатов выполнялись серии вычислительных экспериментов при различном количестве пробных точек, при этом задавались следующие параметры: шаг сетки – 1 мкм, область моделирования -  $100 \times 100 \times 10$  мкм<sup>3</sup>. В каждом эксперименте вычислялся общий объем дисперсной фазы, сравнивался с действительным ее объемом, и определялась ошибка. Полученные ошибки усреднялись по всем экспериментам серии, вычислялся также размах ошибки как разница между наибольшим и наименьшим ее значением. Полученные результаты были сведены в таблицу.

Таблица. Зависимость ошибки определения общего объема по методу Монте-Карло от количества пробных точек

Количество пробных точек	Средняя ошибка	Наибольшая ошибка	Наименьшая ошибка	Размах ошибки
10	0,001547	0,00264	0,00009	0,00255
50	0,001508	0,00215	0,00116	0,00099
100	0,001474	0,00190	0,00129	0,00061
500	0,001497	0,00159	0,00141	0,00018
1000	0,001497	0,00159	0,00141	0,00018
2000	0,001497	0,00156	0,00144	0,00012
3000	0,001473	0,00153	0,00144	0,00009

Из таблицы видно, что средняя ошибка определения общего объема дисперсной фазы во всей системе при увеличении числа пробных точек в десятки раз меняется незначительно и всегда остается менее 0.2% даже в случае, когда количество пробных точек менее 10. Поэтому для выбора количества точек воспользовались другой характеристикой – размахом ошибки. Тестирование программного модуля решеточного представления, при числе пробных точек равном 2000, дало отличный результат в оценке не только общего объема, но и объема части зерна дисперсной фазы, попавшей в одну клетку объемом 1 мкм<sup>3</sup>.

Полученные оценки точности метода согласуются с теоретическими выкладками относительно достигаемой по методу Монте-Карло точности вычисления объема произвольной формы [2]. Это, в числе прочего, подтверждает корректность реализованных алгоритмов. Представляет интерес также и предполагаемая взаимосвязь ошибки модельного представления в отдельных ячейках с коэффициентом их заполнения.

Таким образом, успешно решена задача решеточного (сеточного) представления внерешеточных моделей полидисперсных систем, что позволяет применять для дальнейшего моделирования эволюции их структуры подходы, основанные на методе конечных разностей.

### Литература

1. С. Дереченник, В. Разумейчик, В. Тур. Внерешеточные модели дисперсных фаз в исследованиях структуры цементных композитов / Материалы III Международной НТК "Строительство на основе оптимизированного энергетического потенциала" (20-21.10.2005, г. Ченстохова, Польша).
2. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. – М.: Гардарики, 1998.

## TO A QUESTION ON STATEMENT OF A PROBLEM ON MODELLING PROCESSES OF STRUCTURIZATION OF FOAM CONCRETES

*Sidorenko J.V.*

*Samara State University of Architecture & Civil Engineering, Samara, Russia*

Economic conditions in our country define the new approach to a choice of effective building materials for housing construction. One of perspective directions is work on perfection of manufacturing of such materials as porous concretes (and foam concretes, in particular), which differ by durability, rather simple technology of manufacturing, etc. The modelling of porous systems allows to consider influence of technology factors on synthesis of their structure and building-technical characteristics. Also this direction of researches is one of the most urgent questions of modern building materialogy. Processes of structurization are important by way of creation of strong and easy compositions. However it is necessary to note, that opportunities of mathematical modelling and engineering calculation are rather limited, that is connected with thermodynamic instability of investigated systems.

The analysis of scientific papers on structurization of foam concretes shows, that the majority of the developed methods have experimental character and are connected with stabilization of foam due to introduction of polymeric stabilizers, thickeners, the additives promoting formation of insoluble deposits on border between liquid and gaseous phases, etc.

It is meanwhile obvious, that formation of porous system is defined not only the superficial phenomena, but also hydrodynamical factors on different technological repartitions. According to existing technologies it is possible to allocate following hydrodynamical conditions which essentially differ both structure of cooperating phases, and processes of formation of a gas phase, such as:

- a mode of preparation of foam in the high-speed hashing amalgamator;
- a mode of preparation of a foam-concrete mix, which is realized by various methods (i.e. injection, cavitas process, etc.);
- a mode of transportation of a mix;
- a mode of casting of a mix in the form.

For example, in conditions of high-speed hashing we consider a biphas environment (i.e. gas and liquid), and in conditions of mixture of a cement-sandy composition with foam - the three-phase environment in which under action of inertial forces there are complex phenomena. Wrong selection of technological parameters in practice leads to loss of stability of a multicomponent mix in the form of stratifications of phases.

On stability of foams it is necessary to carry to fundamental scientific works first of all V.V. Krotov, K.B. Kann, V.K. Tikhomirov's researches.

The lead analysis of works has shown, that available methods of modelling can be applied only to special cases of biphas systems.

The processes occuring in three-phase systems, essentially differ such parameters, as:

- interaction of firm and gas phases results both in crushing a gas phase, and its mineralization and hardening;
- constraint of phases;
- influence of superficial factors;
- essential influence of hydrodynamical fields on formation of structure of a porous composite.

There are no precise approaches and principles of formation of mathematical models for different technological repartitions. It speaks difficulty of the description of processes of cooperating phases as it is necessary to consider structure of streams of mixing up phases and an interphase exchange of impulses. Proceeding from the above-stated, we undertake attempt to plan approaches to modelling of porous mixes on the basis of mechanics of interpenetrating environments.

In a basis of the description of investigated system there are equations of indissolubility, an impulse, energy, and the conditions which have been written down for elementary volume, for each of phases.

The equations of indissolubility of phases have a following appearance:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\varphi_i \cdot \mathbf{V}_i) = \sum_{i,j=1}^3 J_{ij}, \quad i = 1 \dots 3 \quad (1)$$

So,  $\varphi_i$  is the volumetric maintenance of phases. As a continuous phase it is considered liquid phase ( $i=1$ ), and as disperse - firm ( $i=2$ ) and gaseous phases ( $i=3$ ).

The right part of the equation (1) characterizes transitions of one phase in to another.

The equations of preservation of an impulse for each of phases have a following appearance:

$$\rho_i \cdot \varphi_i \frac{d\mathbf{V}_i}{d\tau} = \rho_i \cdot \varphi_i \cdot (\pm g_i) + \varphi_i \cdot (\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_j) \cdot f_{ij} + \varphi_i \cdot \nabla P + \nabla \sigma_i \quad (2)$$

In the left part of  $\frac{d\mathbf{V}_i}{d\tau} = \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial \tau} + \mathbf{V}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{V}_i}{\partial x_k}$  - is a full derivative of phase's speed.

In the right part of the equation (2) there are following data:

- the first composed is an impulse of mass forces;
- the second composed characterizes an interphase exchange of impulses;
- the third composed is an impulse from a gradient of pressure in the continuous environment;
- the fourth composed is an internal pressure in the disperse phases, caused by superficial pressure.

The model should be added by the equations of indissolubility in space of the sizes on available disperse phases. So, for a gas phase (according to V.V. Kafarov), the equation has a following appearance:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f_3(r) + \operatorname{div}(f_3(r) \cdot \mathbf{V}_3) + \frac{\partial}{\partial r} f_3(r) \cdot \eta_3 = \sum K(r, \mu_i) \cdot f_3(r) \cdot f(\mu_i) d\mu_i \quad (3)$$

In above resulted equation (3) there are following data:

- $f_3(r)$  is a density of distribution of gas bubbles in the sizes, that is dispersiveness of a gas phase, and  $f(\mu)$  is for a  $\mu$ -phase;
- $\eta_3$  is a growth rate of gas inclusions, for example, due to chemical processes or diffusion;
- $K(r, \mu)$  is a probability of a meeting of gas inclusions, particles with the  $r$  and  $\mu$  sizes.

The first member of the left part characterizes change of number of particles due to the non-stationary processes, the second member - due to convection processes, and the third - due to phase carry. The right part characterizes speeds of formation and disappearance of particles of a gas phase.

Let's note, that complexity of the given work consists that the process of aggregation occurring between the same and heteronymic phases is studied.

The result of interaction of a firm particle with a gas bubble depends both on kinetic energy of interaction, and from a condition of a surface of a bubble. Questions of probability of collision of particles were considered in N.B. Urev, V.V. Kafarov, J.B. Rubinshtejn's scientific works, etc.

A number of difficulties at realization of the above-stated model (namely: multiphasal nature and complexity of dynamics of interaction of phases, complex of hydrodynamical conditions in volume with presence of a turbulent mode, nonlinearity of process, etc.) lead to necessity of simplification of model and consideration of special cases. In researches often replace a three-phase continuum on biphasic, that allows to exclude, for example, interaction of firm and gas phases.

Thus, we accept a number of the assumptions simplifying formation of mathematical model, in particular: we exclude a pulsation of phases, i.e. average characteristics of phases are considered; we consider an isothermal mode; we exclude inertial forces as they are insignificant in comparison with mass forces in processes of formation of a product (but in a case of intensive hashing of phases this factor cannot be neglected); we accept a stationary mode, believing, that time of the induction period is much more than time of interaction between phases; we assume, that the grain of a firm phase is inert during the induction period, i.e. we neglect interphase effects of the physical and chemical nature (such as adsorption, wettability, electrokinetic phenomena, etc.); we consider an one-dimensional problem, etc.

After the entered simplifications of the equation of impulses for each of phases will accept such kind as:

$$\varphi_1 \cdot \rho_1 \cdot g - \sum_{i=2}^3 \gamma_i \cdot (V_1 - V_i) - \varphi_1 \cdot \frac{\partial P}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\varphi_2 \cdot \rho_2 \cdot g + \gamma_2 \cdot (V_1 - V_2) - \varphi_2 \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

$$-\varphi \cdot \rho_3 \cdot g + \gamma_3 \cdot (V_1 - V_3) - \varphi_3 \cdot \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \sigma_3}{\partial z} = 0, \quad (6)$$

In formulas (4 - 6) there are following parameters: the first composed are the mass forces acting on phases, the second composed are the forces arising from interaction of interphase borders, the third composed are the forces acting on a phase due to a gradient of pressure in the bearing phase, the fourth composed are pressure in firm and gas phases.

From the resulted equations of indissolubility and impulses a number of special cases after carrying out of the further simplifications can be received. In particular, it is possible to receive model of infiltration of a liquid phase on capillary-porous system. On the mechanism offered by us, process of water-branch of a liquid can be explained within the limits of the theory of self-organizing. In this case under action of gravitational forces there is a formation of infinite cluster on a liquid component.

Thus, some approaches to statement of a problem of mathematical modelling process of structurization of foam concretes are considered.

The received results of work will allow to predict behaviour of foam concretes on technological repartitions and will serve for adjustment of a parametrical mode of preparation mixes in industrial conditions.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ЛОКАЛЬНЫХ СИЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Старовойтов С. А., БелГУТ, Гомель

В современных отраслях промышленности и строительстве широкое применение находят трехслойные элементы конструкций, что вызывает необходимость разработки методов их расчета. Изгиб трехслойных стержней на упругом основании под действием равномерно распределенной по всей длине стержня нагрузки исследовался в работах [1–3]. Здесь рассматривается деформирование подобного стержня при действии локальных нагрузок.

Постановка задачи и ее решение проводится в декартовой системе координат, связанной со срединной плоскостью заполнителя. Для описания кинематики пакета принята гипотеза «ломаной нормали»: в тонких внешних несущих слоях 1, 2 справедливы гипотезы Бернулли, в более толстом заполнителе 3 нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол  $\psi(x)$ . На границах склейки слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы слоев несжимаемы в поперечных направлениях. На торцах стержня предполагается наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости. Все перемещения и линейные размеры отнесены к длине стержня  $l$ . Деформации малые.

Действие упругого основания на стержень описывается моделью Винклера: реакция основания  $q_f(x)$  пропорциональна прогибу стержня  $w(x)$ .

На внешние слои стержня действует внешняя вертикальная распределенная нагрузка  $q(x)$  и реакция упругого основания  $q_f(x)$ . В качестве искоемых величин приняты: прогиб  $w(x)$ , дополнительный угол поворота  $\psi(x)$  и продольное перемещение срединной плоскости заполнителя  $u(x)$ .

Уравнения равновесия трехслойного стержня на упругом основании получены из вариационного принципа Лагранжа. В перемещениях они имеют вид:

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} &= 0; & a_2 u_{,xx} + a_4 \psi_{,xx} - a_6 w_{,xxx} - a_5 \psi &= 0; \\ a_3 u_{,xxx} + a_6 \psi_{,xxx} - a_7 w_{,xxxx} + \kappa w &= q, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $a_1, \dots, a_7$  – параметры, зависящие от механических свойств материалов и геометрических характеристик слоев стержня; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Система (1) сведена к неоднородному дифференциальному уравнению шестого порядка относительно прогиба стержня:

$$w_{,xxxxxx} + \alpha_1 w_{,xxxx} + \alpha_2 w_{,xx} + \alpha_3 w = \alpha_4 q + \alpha_5 q_{,xx}, \quad (2)$$

где  $\alpha_1, \dots, \alpha_5$  – коэффициенты, определяемые через параметры  $a_1, \dots, a_7$ .

Решение уравнения (2) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения  $w_0(x)$  и частного решения неоднородного уравнения  $w_p(x)$ . Для реальных физико-механических параметров материалов слоев, геометрических размеров стержня, жесткости упругого основания, при которых остаются справедли-



ливыми приняты гипотезы, необходимо рассматривать три решения уравнения (2): для оснований малой (I), средней (II) и высокой жесткости (III):

$$\begin{aligned}
 w_{I,III}(x) &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{\beta_1 x} \cos(\beta_2 x) + C_4 e^{\beta_1 x} \sin(\beta_2 x) + \\
 &\quad + C_5 e^{-\beta_1 x} \cos(\beta_2 x) - C_6 e^{-\beta_1 x} \sin(\beta_2 x) + w_p(x); \\
 w_{II}(x) &= C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{-\lambda_1 x} + C_3 e^{\lambda_3 x} + C_4 e^{-\lambda_3 x} + C_5 e^{\lambda_5 x} + C_6 e^{-\lambda_5 x} + w_p(x). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Частные решения  $w_p(x)$  строятся при помощи ядра Коши  $K(x, s)$  для каждого типа основания и вида внешней нагрузки:

$$w_p(x) = \int_0^x K(x, s) (\alpha_4 q(s) + \alpha_5 q_{,xx}(s)) ds. \quad (4)$$

1. Пусть на стержень действует поверхностная нагрузка, равномерно распределенная внутри отрезка  $[b; a]$ . Тогда внешняя нагрузка  $q(x)$  представима в виде

$$q(x) = q_0 (H_0(a - x) - H_0(b - x)), \quad (5)$$

где  $H_0(x)$  – функция Хевисайда нулевого порядка:  $H_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Функции прогибов стержня для каждого типа основания получим, подставив (5) в (4), а результат в (3).

2. Действие сосредоточенной силы. Пусть распределенная поверхностная нагрузка  $q(x)$  действует в некоторой малой окрестности точки с координатой  $x = a$ . Обозначив радиус этой окрестности через  $\xi$ , распределенную нагрузку  $q(x)$  можно записать следующим образом:

$$q(x) = \frac{Q}{2\xi} (H_0(a + \xi - x) - H_0(a - \xi - x)); \quad (6)$$

где  $Q = 2q_0\xi$ .

Подставив (6) в (4) и устремив величину  $\xi$  к нулю, оставляя величину  $Q$  постоянной, получим частное решение  $w_p(x)$  уравнения (2). Прогиб стержня найдем, подставив  $w_p(x)$  в (3).

Искомые перемещения  $\psi(x)$  и  $u(x)$  выражаются через функции прогиба  $w(x)$  из уравнений (1). Константы интегрирования определяются из условий закрепления стержня:

– при шарнирном опирании обоих концов стержня:

$$\text{при } x = 0, 1 \quad w(x) = \psi(x) = u(x) = M(x) = 0;$$

– для стержня, свободно лежащего на упругом основании

$$\text{при } x = 0, 1 \quad Q(x) = H(x) = u(x) = M(x) = 0,$$

где  $M(x)$ ,  $H(x)$ ,  $Q(x)$  – суммарные внутренние моменты и сила в поперечном сечении стержня.

Численная реализация полученных аналитических решений проведена для трехслойного стержня с материалами слоев Д16Т – фторопласт – Д16Т. Построены кривые изменения перемещений и напряжений при действии указанных видов внешних нагрузок

в зависимости от жесткости упругого основания, геометрических и механических параметров слоев стержня.

Таким образом, полученные решения позволяют описывать напряженно-деформированное состояние упругого трехслойного стержня с жестким наполнителем, покоящимся на упругом основании, при действии локальных поверхностных нагрузок и сосредоточенных сил.

### Литература

1. Яровая А. В., Старовойтов С. А. Трехслойный стрежень на упругом основании // Материалы, технологии, инструменты.– 2003.– Т. 8, № 2.– С. 9–11.
2. Старовойтов С. А. Напряженно-деформированное состояние трехслойного стержня на упругом основании // Вестник БелГУТа.– 2004.– № 1(8).– С. 25–28.
3. Старовойтов С. А. Моделирование поведения трехслойного стержня на упругом основании // Сборник трудов молодых ученых Национальной академии наук Беларуси.– 2004.– Т. 4.– С. 134–137.

## О ПРИНЦИПАХ ВЫПОЛНЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАЩИТЫ ТРАНСФОРМАТОРА

Томкевич А. П., БНТУ, Минск

Существующие дифференциальные защиты трансформаторов анализируют разность приведенных токов со стороны высшего и низшего напряжений и в случае превышения величины уставки, обусловленной различного рода небалансами, выдают сигнал на отключение трансформатора. Традиционно выполняется общая защита для всех обмоток, требующая учета схем соединения обмоток, отстройки от аномальных режимов и работы устройства РПН, что приводит к увеличению тока срабатывания. Такой подход позволяет независимо решать вопросы проектирования трансформатора и его релейной защиты.

Теоретически возможна реализация дифференциальной защиты индивидуально для каждой из обмоток. Это техническое решение требует изменений в конструкции трансформатора – установку дополнительных трансформаторов тока (ТТ), а также большего числа измерительных органов, что приводит к его экономической неэффективности.

Основным аномальным режимом, обуславливающим значительный коэффициент отстройки при расчете тока срабатывания, является бросок тока намагничивания (БТН), возникающий при включении трансформатора или при устранении внешнего короткого замыкания и превышающий номинальный ток трансформатора ( $I_{ном}$ ) в 6 – 8 раз [1].

Разработанные способы отстройки от БТН и сверхтоков внешних КЗ [1, 2] с использованием быстронасыщающихся трансформаторов (реле РНТ-56х) и торможением от токов плеч (реле ДЗТ-11) обеспечивают ток срабатывания защиты порядка  $(1 - 1.2) I_{ном}$ . В случае применения реле, дополнительно реализующих принципы распознавания сигналов (ДЗТ-21 или устройства ЯРЭ-2201 на микроэлектронной базе), удается достичь тока срабатывания в пределах  $(0.3 - 0.7) I_{ном}$ .

В современных цифровых защитах трансформаторов получило развитие второе направление. Фактически переход на новую элементную базу позволил адаптивно выбирать плечо торможения, улучшить характеристики фильтрации сигнала и осуществлять контроль по следующим критериям: процентное содержание второй гармоники в пер-

вичном токе и характерной форме кривой тока при БТН, что привело к снижению тока срабатывания защиты до  $(0.15 - 0.4) I_{ном}$ . Как и предшественники, цифровые защиты не всегда реагируют на витковые замыкания обмоток – для ликвидации таких режимов предусмотрена газовая защита. Нечувствительность к таким повреждениям обусловлена использованием дифференциальной защиты с торможением токами плеч (87Т). Цифровая защита (например, Т60, RET-316, Р631), выполненная на этом принципе, способна уверенно защищать лишь  $(70 - 75)\%$  обмотки, соединенной в звезду, считая от ввода [3]. Вопрос защиты оставшейся части обмотки ведущие фирмы-производители решают по-разному. В частности, компания GE предлагает использовать специальную дифференциальную защиту от замыканий на землю, включаемую на токи нулевой последовательности. Добиться удовлетворительной чувствительности к витковым замыканиям удалось лишь для определенного вида повышающих трансформаторов [2].

В настоящее время основными задачами исследований в области совершенствования дифференциальных защит трансформатора являются уменьшение тока срабатывания защиты до величин  $(0.03 - 0.1) I_{ном}$  и обеспечение 100%-ной защитоспособности объекта.

Цифровая элементная база открывает перед разработчиками новые возможности – использование математических моделей не только для исследований режимов работы оборудования, но и для построения на их базе непосредственно устройств релейной защиты. Это преимущество уже используется для реализации тепловых защит двигателей, генераторов, трансформаторов и др. оборудования. Решение тепловой модели объекта позволяет отказаться от применения тепловых датчиков, контролировать температуру в труднодоступных местах. Используемые математические модели характеризуются относительной простотой, а существенная инертность процессов позволяет не учитывать влияние импульсных помех и не требует значительных вычислений.

Разрабатываемый алгоритм функционирования устройства релейной защиты трансформатора от внутренних повреждений, выполненного на основе математической модели, сохраняет дифференциальный принцип. Основопологающим отличием от существующих защит является сравнение (вычитание) трансформированных реальных первичных токов и вычисленных «модельных» токов трансформатора. Такой подход не требует отстройки от аномальных режимов, т. к. они воспроизводятся математической моделью.

Ключевые задачи, возникающие при реализации описанной защиты, состоят в следующем: модель трансформатора должна гарантированно решаться в реальном времени (за  $(0.2 - 0.5)$  мс) и содержать в себе наименьшую погрешность; необходимость использования моделей ТТ, позволяющих уточнить вторичные токи ТТ при их насыщении; необходимость использования цепей напряжения для получения сведений о текущем режиме энергосистемы (исходные данные для модели трансформатора); наличие адекватных и простых аппроксимаций кривых намагничивания, а также конструктивных параметров силового трансформатора и трансформаторов тока.

### Литература

1. Федосеев А. М., Федосеев М. А. Релейная защита электроэнергетических систем. –М.: Энергоатомиздат, 1992. –528 с.: ил.
2. Засыпкин А. С. Релейная защита трансформаторов. –М.: Энергоатомиздат, 1989. –240 с.
3. Инструкция по эксплуатации защиты трансформатора Т60. Версия 4.8.

## РАЗДЕЛ IV. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

### РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ТРАНСФОРМАТОРНОЙ ПОДСТАНЦИИ В СИСТЕМЕ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ SIMULINK MATLAB

Артюх А.Е., Дунешенко Я.И., Шумра А.П., Новаш И.В., БНТУ, Минск

Вычислительная система MATLAB [1] предназначена для выполнения сложных инженерных, научно-технических расчетов практически в любой области науки и техники, особенно для расчетов в области электротехники, радиотехники, автоматики. Наибольший интерес представляет использование системы MATLAB в режиме динамического моделирования. Для этого используется пакет моделирования динамических систем SIMULINK [2]. При исследовании электрических режимов не требуется разработки математического описания исследуемой системы. Модель системы составляется на основе структурной схемы из функциональных блоков, имеющих в соответствующих библиотеках системы SIMULINK-MATLAB.

Для исследования рабочих и аварийных режимов трансформаторной подстанции, схема которой приведена на рисунке 1 [3], была составлена в системе SIMULINK динамическая модель (рисунок 2), состоящая из библиотечных блоков трехфазной питающей системы, линии электропередачи, системы шин 10,5 кВ с присоединенной трехфазной нагрузкой, трехфазного силового трансформатора, системы шин 0,4 кВ с присоединенными потребителями. На стороне 0,4 кВ были сформированы модели трех нагрузочных трехфазных линий: линии с нагрузкой, в которой возникает КЗ, линии с нагрузкой, в которой производится оценка влияния КЗ, возникшего на соседней линии, и линии с суммарной нагрузкой оставшихся нагрузок трансформаторной подстанции. Режимы различных замыканий имитировались однофазными выключателями в структурной схеме модели, у которых можно задавать момент замыкания или размыкания контактов.

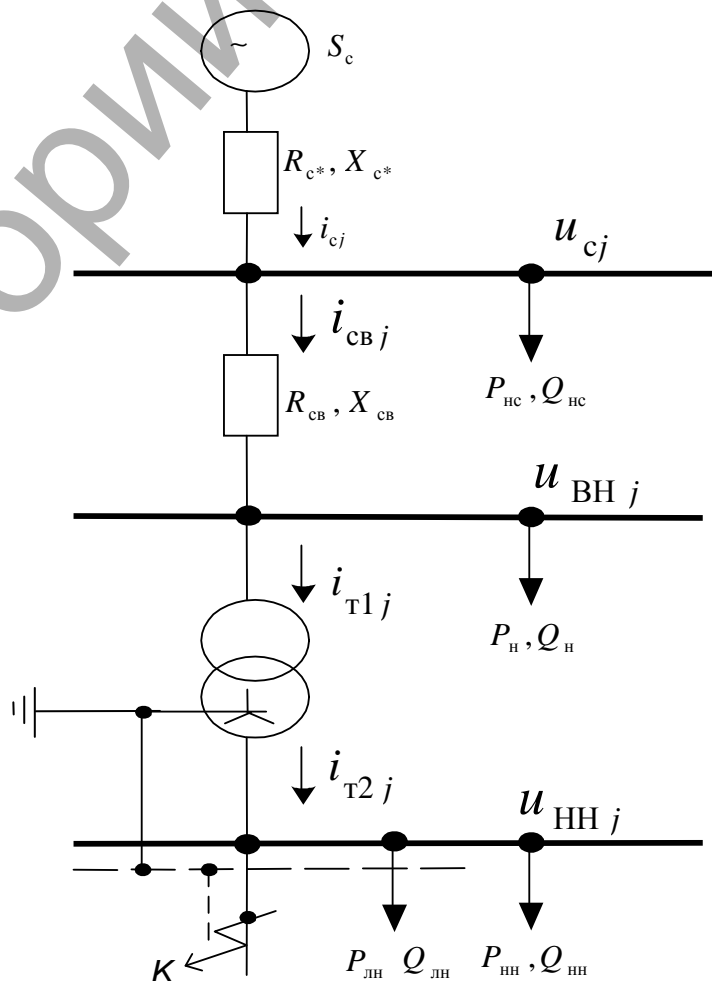


Рисунок 1.

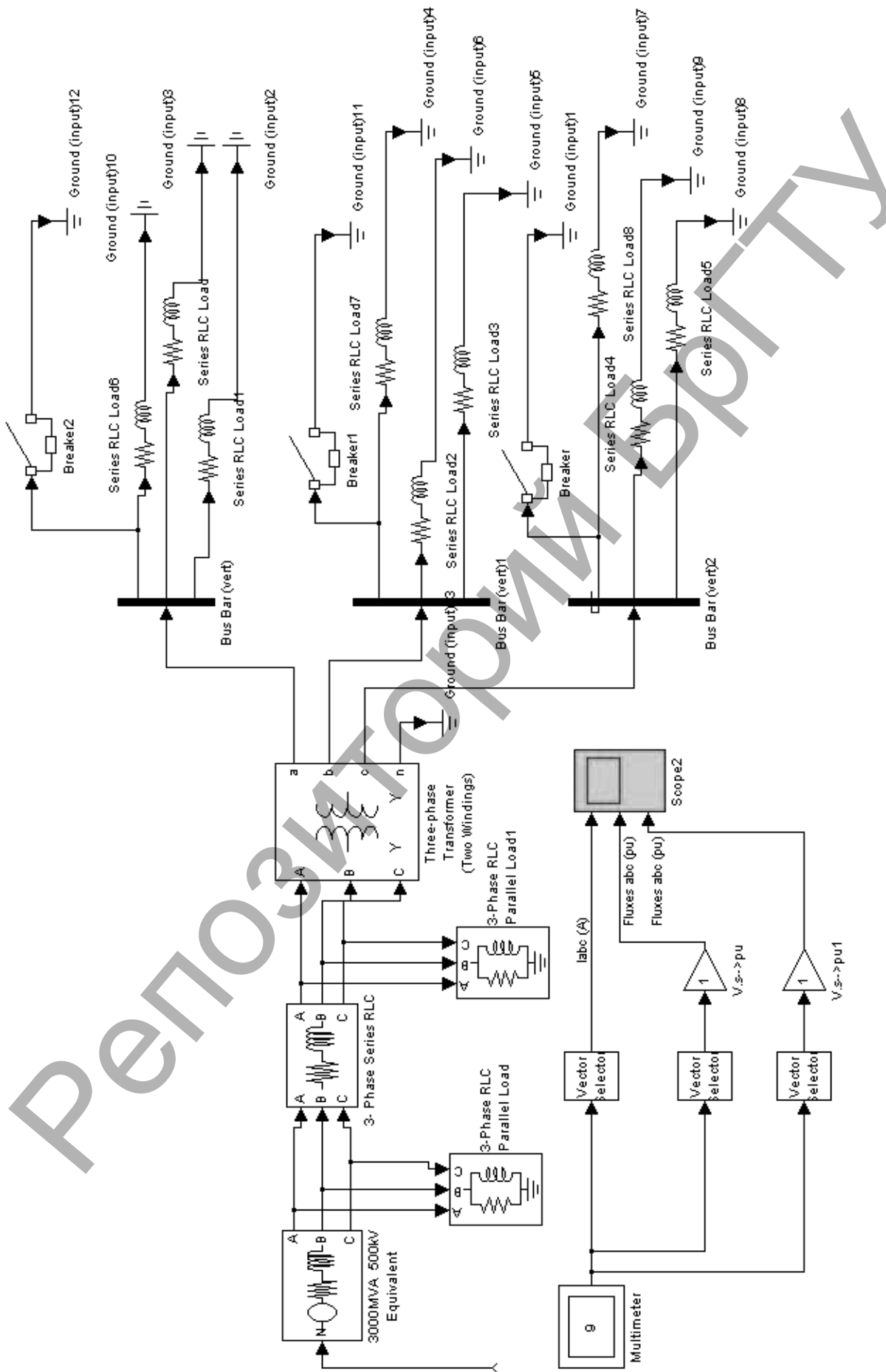


Рисунок 2.



Рисунок 3.

Результаты расчетов исследуемых режимов для соответствующих участков цепи выводятся на монитор ПЭВМ в виде осциллограмм токов и напряжений, получаемых с помощью виртуальных осциллографов системы SIMULINK.

На рисунке 3 приведены результаты расчета при замыкании фаз А и В на землю в момент времени  $t=0,04$  с.

Исследования показали, что расчеты переходных процессов при КЗ получаются в среде MatLab только при достаточно больших значениях индуктивностей элементов электрической цепи. При малых значениях индуктивностей возникают проблемы получения устойчивого процесса решения, из-за проявления «жесткости» в дифференциальных уравнениях модели.

### Литература

1. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003, - 736 с.: ил.
2. Дьяконов В. Simulink 4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, - 528 с.: ил.
3. Новаш И.В. Математические модели для исследования коммутационных режимов силовых трансформаторов. Вестник БНТУ, 2002, №6, с. 73-78.

## РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ТРЕХФАЗНОГО ТИРИСТОРНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ В СИСТЕМЕ ДИНАМИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ SIMULINK MATLAB

*Барбук Е.А., Ефремов П.В., Сазонов И.Е., Сурус И.А., Новаш И.В.,  
БНТУ, Минск*

Для исследования режимов работы электронных устройств, в том числе и преобразовательной техники, хорошо зарекомендовали себя прикладные пакеты, в основе которых используется пакет Pspice. На кафедре «Электротехника и электроника» в учебном процессе используется достаточно эффективный для анализа электронных схем пакет Workbench, который по существу представляет собой виртуальную лабораторию с достаточно широкими возможностями. Однако представление трехфазных объектов в пакете Workbench требует моделирование каждой фазы в отдельности.

Наиболее удобным и эффективным инструментом для исследования нормальных и аварийных режимов трехфазных систем является система Matlab, в состав которой входит пакет моделирования динамических систем SIMULINK [1]. Задачи исследования работы трехфазных полупроводниковых преобразователей с достаточной точностью могут быть решены в режиме динамического моделирования с помощью пакета Simulink-4 Matlab-6.0 [2]. Полная комплектация пакета SIMULINK содержит около 30 различных библиотек, в том числе и библиотеку моделей трехфазных компонентов (электрических машин и трансформаторов, полупроводниковых преобразователей, линий электропередачи, нагрузок и др.). Очень важным достоинством пакета Simulink-4 Matlab-6.0 является возможность его дополнения моделями пользователя. Пользователь может самостоятельно разработать модель исследуемого объекта и записать ее в библиотеку пакета в виде пользовательского файла.

В данной работе была разработана модель трехфазного мостового тиристорного преобразователя с системой импульсно-фазового управления работой тиристорov и автоматическим ПИД-регулятором тока нагрузки. Модель системы в виде структурной схемы из функциональных блоков, имеющих в соответствующих библиотеках пакета SIMULINK-MATLAB, представлена на рисунке 1. Результаты расчета режима работы преобразователя на активно-индуктивную нагрузку с начальным значением тока нагрузки 800 А и переходом на нагрузочный режим с током 400 А представлены на рисунке 2. В библиотеках пакета SIMULINK-MATLAB имеются блоки для моделирования нагрузок с нелинейными вольт-амперными характеристиками. Определенный интерес представляет исследование режимов работы тиристорного преобразователя на электродугую нагрузку с падающей вольт-амперной характеристикой. С помощью разработанной модели можно в процессе вычислительного эксперимента подобрать минимальную индуктивность сглаживающего дросселя в цепи дуги для обеспечения устойчивости режима работы электродуговой установки, а также выбрать закон управления и параметры регулятора.

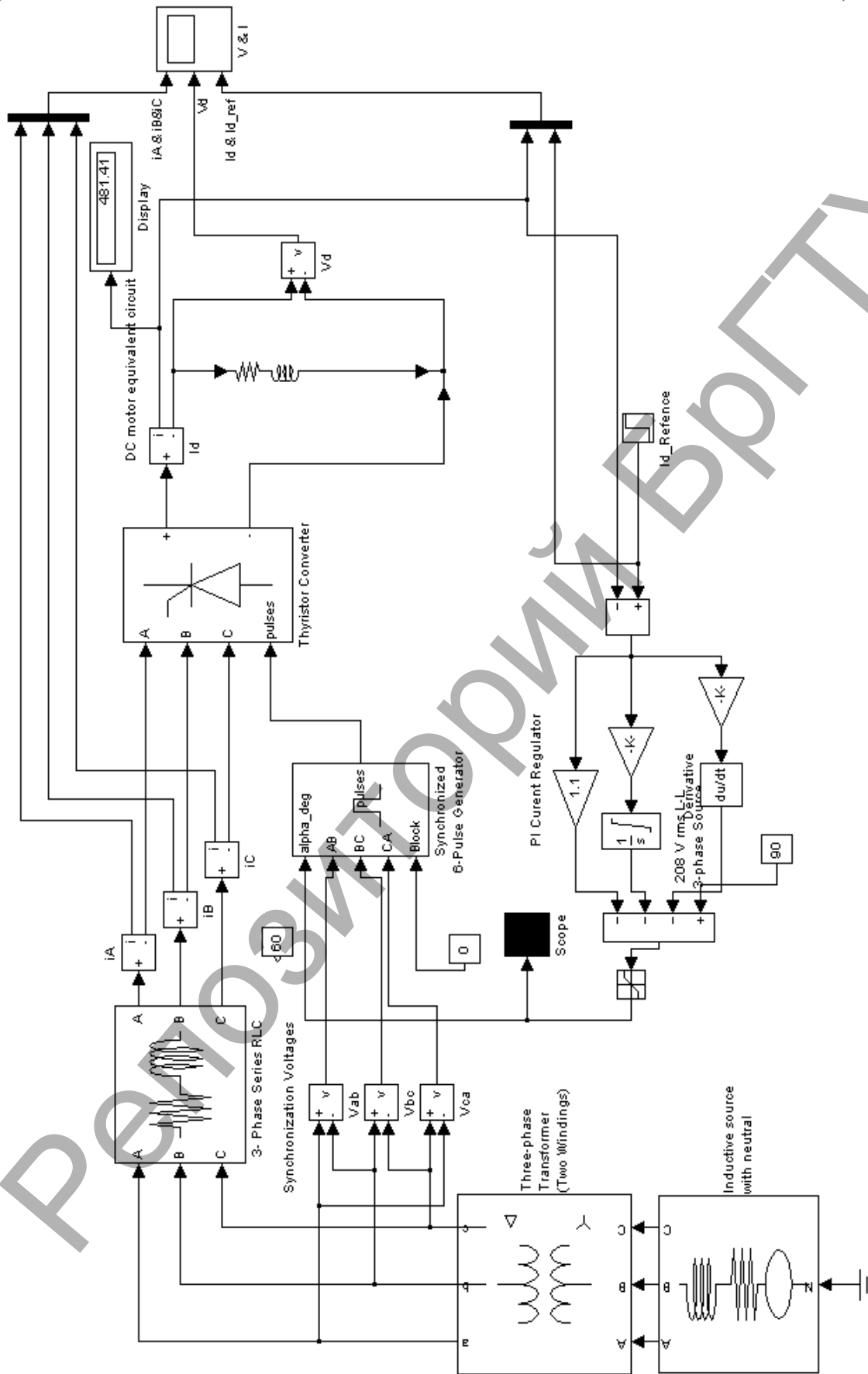


Рисунок 1.



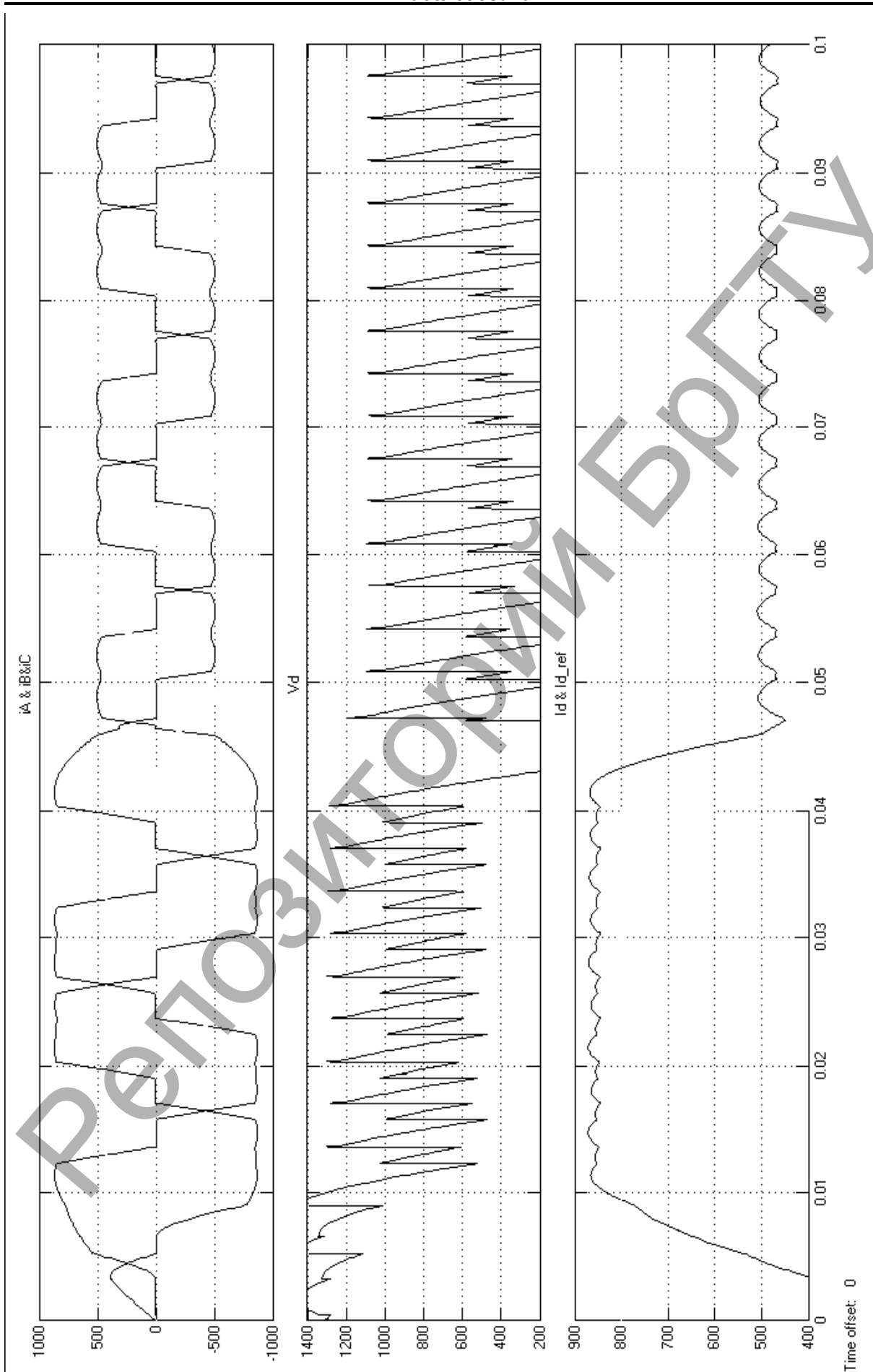


Рисунок 2.

Проведенные исследования для различных законов управления автоматического регулятора и полученные результаты свидетельствуют о том, что пакет SIMULINK-MATLAB может успешно применяться в учебном процессе и для научных исследований, проводимых методом вычислительного эксперимента, применительно к задачам электротехники, электроники и теории автоматического управления.

### Литература

1. Дьяконов В. Simulink 4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, - 528 с.: ил.
2. Герман-Галкин С.Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MATLAB 6.0: Учебное пособие. – СПб.: КОРОНА принт, 2001, - 320 с.: ил.
3. Климович Г.С., Новаш И.В. и др. Лабораторные работы по курсу «Сильноточная электроника электроэнергетических установок» для студентов специальностей 10.01, 10.02, 10.04. – Минск: ротапринт БПИ, 1991, - 62 с.: ил.

## КЛАСТЕРНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ БИКВАДРАТНОЙ ЗАДАЧИ О РАЗМЕЩЕНИИ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

*Вельгас С. В., БГТУ, Брест.*

Биквадратная задача о размещении производственных предприятий является одной из классических задач комбинаторной оптимизации и является одной из наиболее сложных задач этого класса. Она относится к неполиномиально сложным задачам, то есть при получении решения точными методами, незначительное увеличение входных данных задачи ведет к возрастанию количества повторяющихся действий в степенной зависимости.

Пусть дано множество  $N = \{1, 2, \dots, n\}$  (множество городов), и матрицы  $n \times n$   $F = \{f_{ij}\}$  (матрица предприятий) и  $D = \{d_{ij}\}$  (матрица расстояний). Тогда задача будет формулироваться так: найти такую перестановку  $P$ , чтобы минимизировать

$$z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{ij} \cdot d_{P(i)P(j)}, \quad (1)$$

где  $F$  – матрица потоков груза между предприятиями,

$D$  – матрица расстояний между городами,

$z$  – стоимость перестановки.

То есть задача состоит в том, чтобы минимизировать стоимость перевозок продукции между предприятиями, если в каждом городе можно разместить по одному предприятию.

Для нахождения приближенного решения квадратичной задачи размещения предлагается кластерный алгоритм с запретами.

Кластерный алгоритм с применением запретов использует список запретов  $Tabu(i_k)$ . Он позволяет алгоритму не останавливаться в точке локального оптимума, как это предписано в стандартном алгоритме локального спуска, а путешествовать от одного локального оптимума к другому, в надежде найти среди них глобальный оптимум. Список запретов строится по предыстории поиска, то есть по нескольким предшествующим решениям  $i_k, i_{k-1}, \dots, i_{k-1+1}$ , и запрещает часть окрестности текущего решения  $N(i_k)$ . Список запретов  $Tabu(i_k) \subset N(i_k)$  запрещает использование тех "фрагментов" решения (ребер

графа), которые менялись на последних  $l$  шагах алгоритма. Константа  $l \geq 0$  задает длину списка запретов. При  $l=0$  получаем стандартный локальный спуск.

Общая схема кластерного алгоритма с запретами может быть представлена следующим образом:

1. Множества заводов и городов представляются в виде графов, вершины которых – заводы и города соответственно, а ребра – потоки грузов и пути между ними.

2. Осуществляется параллельная пошаговая резка полученных графов на сильно связанные области (кластеры). Резка производится до получения кластеров размера 1, 2, или 3 вершины.

2.1. Граф городов разрезается на 2 кластера по итерационному методу. Параллельно на 2 кластера разрезается граф заводов.

2.2. Вершины большего кластера заводов ассоциируются с большим кластером городов, вершины меньшего кластера заводов – с меньшим кластером городов. Таким образом, получаем две новые пары графов для дальнейшей резки.

2.3. Если кластер заводов больше кластера городов, то производится дальнейшая резка кластера заводов с передачей отрезанных 1 – областей другому кластеру, пока кластер заводов не сравняется в размерах с кластером городов.

2.4. Резка производится до получения кластеров размера 2, или 3 вершины. При получении 2-3-кластера осуществляется оптимизация расположения ассоциированных с ним заводов. Заводы в кластере располагаются таким образом, чтобы сумма стоимостей транспортировок была минимальна. Полученный 2-3 кластер городов и связанный с ним кластер заводов исключаются из дальнейшей резки.

2.5. Когда нет более кластеров, доступных для резки, алгоритм завершает работу.

3. Производится оптимизация полученного решения методом 3-оптимизации.

4. Последние  $l$  шагов решения заносятся в список запретов Tabu.

5. Если полученное решение является оптимальным на текущий момент, то оно сохраняется как текущий оптимум.

6. Если не израсходовано время, отведенное на решение, то переходим на шаг 2, иначе принимаем за конечное решение текущий оптимум и завершаем работу алгоритма.

7. Полученный план размещения и является приближенным решением квадратичной задачи о назначении кластерным методом с запретами.

Кластерный алгоритм с запретами получил точное решение 107 из 135 задач библиотеки “QAPLIB - A Quadratic Assignment Problem Library” [4], и дал погрешность менее чем в 1% на остальных 28 задачах.

Достоинствами алгоритма являются точность, невысокая сложность (стремится к логарифмической), легкая приспособляемость для работы в параллельных системах.

### Литература

1. Гимади Э. Х., Глебов Н. И., Перепелица В. А., Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации, Сб// Управляемые системы, Новосибирск, вып. 11, 1974, 35-41.
2. Мелихов А. Н., Бернштейн Л. С., Курейчик В. М. Применение графов для проектирования дискретных устройств. – М.: Наука, 1974.
3. Романовский И. В. Дискретный анализ. – СПб.: Невский диалект; БХВ-Петербург, 2003.
4. Burkard R.E., Çela E., Karisch S.E., Rendl F. QAPLIB - A Quadratic Assignment Problem Library. – <http://fmatbhp1.tu-graz.ac.at/~karisch/qaplib/>.

## АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ФОРМ ДВУХ- И ТРЕХМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Волков Е.Г., Раткевич А.В., БГТУ, г. Брест

### Введение

В цифровой обработке изображений применяется достаточно много алгоритмов, анализирующих метрические и/или топологические свойства двумерных изображений объектов. На основании этого анализа можно вычислять любые метрические и топологические характеристики изображенного объекта. Развитие компьютерного моделирования разнообразных физических объектов и процессов обуславливает необходимость анализировать не только двумерные, но и трехмерные объекты. Одной из таких задач является моделирование роста кластеров, образующихся по механизму ограниченной диффузией агрегации (ОДА) [1]. Образующиеся кластеры структурно достаточно сложны, а при попытке приведения их к двумерному виду с последующим двумерным анализом теряется часть информации о закономерностях их роста. Использование алгоритмов, полученных из стандартных (двухмерных), путем добавления новой плоскости, в ряде случаев оказывается неэффективным и дающим ошибочные результаты. Объясняется это резко возрастающим количеством конфигураций получаемых структур, некоторые из которых приводят к сбою работы алгоритмов. Так, например, даже минимальную задачу нахождения площади поверхности объекта и важнейшей топологической характеристики – числа Эйлера нецелесообразно решать путем модификации алгоритмов, предназначенных для обработки двумерных изображений. Поэтому возникла необходимость создания алгоритмов нахождения площади и числа Эйлера, которые, во-первых, были бы универсальными, то есть применимыми как к двумерным, так и к трехмерным объектам произвольной связности, и, во-вторых, давали бы максимальную точность вычислений.

### Нахождение площади поверхности трехмерных объектов

Нам известны два способа нахождения периметра двумерных объектов, описанные в [2]. Они основаны на вычислении количества встречающихся в массиве, описывающем объект, всех возможных масок  $2 \times 2$  или  $2 \times 1$  и  $1 \times 2$  элемента, с последующим сложением этих значений, умноженных на коэффициенты. При попытке модифицировать эти алгоритмы для трехмерных массивов, возникли сразу несколько проблем:

- значительно большее количество возможных масок  $2 \times 2 \times 2$  элемента,
- определение эффективных коэффициентов в формуле, которая будет рассчитывать площадь,
- чем более сложен объект, тем большая будет неточность вычислений.

Поэтому предлагается оригинальный алгоритм, который обладает универсальностью и дает абсолютную точность вычисления периметра для двумерного или площади поверхности для трехмерного объекта.

Алгоритм основан на анализе каждого элемента массива (двух- или трехмерной матрицы), описывающего объект. Если элемент пуст (имеет значение “нуль”), а хотя бы один из его соседей имеет значение “единица”, то к переменной, хранящей значение периметра для двумерного или площади поверхности для трехмерного объекта, добавляется единица. Универсальность алгоритма достигается путем изменения числа проверяемых соседних элементов: для двумерного объекта (4 или 8 соседей), для трехмерного (6 или 26 соседей).

Точность вычислений достигается за счет того, что каждый элемент массива проверяется только один раз и при этом однозначно определяется его причастность к границе (периметру или поверхности) объекта.

### Нахождение числа Эйлера

Для нахождения числа Эйлера, нам необходимо определить, сколько в массиве хранится объектов, а также количество дырок в этих объектах. Эти две задачи можно свести к подсчету количества несвязных между собой дырок, т.е. областей, заполненных элементами с одним значением и окруженных элементами с другим значением.

Предложенный оригинальный алгоритм (основанный на волновом алгоритме [2]), является универсальным и точным и также заключается в последовательном анализе каждого элемента массива, описывающего объект.

Алгоритм основан на определении главного свойства дырок – того, что группа элементов с одним значением окружена (в смысле заданной связности) элементами с другим значением.

Как только мы будем находить элемент со значением нуль, мы присвоим ему некоторое значение  $X$ , равное двум, запомнив координаты всех его соседей со значением нуль. На следующем шаге мы присвоим значение  $X$  всем этим соседям, запомнив координаты их соседей и т.д. до тех пор, пока не останется ни одного соседа со значением нуль. Затем, прибавив к  $X$  единицу, будем искать следующую область элементов, имеющих значение нуль.

Таким образом, каждую из дырок заполним своим значением, а в  $X$  будем хранить количество дырок, увеличенное на три (так как начальное значение переменной  $X$  равно двум, так как внешнее пространство вокруг объектов не является дыркой).

Количество объектов находим тем же алгоритмом, только лишь будем искать области, заполненные значениями единицы. На основании полученных двух значений вычислим число Эйлера, вычтя из количества объектов количество дырок.

Достоинства алгоритма:

- универсальность; в зависимости от мерности пространства и от задаваемой связности, изменяется лишь количество проверяемых соседей;
- точность; каждый из элементов, имеющих значение нуль, будет принадлежать только одной из дырок;
- возможность последующего определения метрических свойств форм дырок, рассматривая каждую из них как объект, описанный элементами со значением от 1 до  $n$ , где  $n$ -количество дырок.

### Заключение

Предложены алгоритмы по нахождению периметра двумерных объектов, площади трехмерных объектов и расчета числа Эйлера для двух- и трехмерных объектов. Алгоритмы опробованы на сгенерированных моделях тонкопленочных кластеров поликристаллического материала ([1]), а также на тестовых конфигурациях. В ходе анализа выяснено, что разработанные алгоритмы отличаются точностью расчета и универсальностью в сравнении с существующими стандартными методами.

### Литература

1. Дереченник С.С., Раткевич А.В. Применение фрактальных методов в экспериментальных и теоретических исследованиях тонкопленочных структур. – Вестник БГТУ. Серия: Машиностроение, автоматизация, ЭВМ. – Брест, БГТУ. – 2003, №4 (22). – С. 39-43.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. – М.: Мир, 1982. – Кн.2. – 480с.

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИКЛАДНЫХ БИБЛИОТЕК В САПР

Горелик С.Г., Михнюк В.Н., БАТУ, Минск  
Семенченко А. В., БГУ, Минск

### Введение

Автоматизация проектных работ является необходимым условием повышения эффективности производства в условиях рыночной экономики. Практически любые современные конструкторские разработки осуществляются в среде систем автоматизированного проектирования (САПР).

Структурирование проектных данных, создание баз типовых графических объектов, автоматизация рутинных операций реализуются встроенными инструментами адаптации САПР. Для повышения производительности труда проектировщика наиболее серьезным и эффективным инструментарием, на наш взгляд, являются средства, позволяющие формировать прикладные библиотеки.

В качестве учебной задачи нами была реализована библиотека, организующая трехмерные сборочные единицы (по Боголюбову) в падающее меню с наименованиями и слайдами и подгружающая выбранную сборку или разнесенную сборку в среду КОМПАС-ГРАФИК. Это позволит наглядно продемонстрировать формы изображаемых сборочных единиц и существенно поможет студенту в создании детализировок.

### Инструменты создания прикладных библиотек

Одной из динамично развивающихся отечественных САПР является система КОМПАС-ГРАФИК.

Первоначально КОМПАС-ГРАФИК был ориентирован на автоматизацию подготовки двумерных чертежей и создание трехмерных моделей в машиностроении, но многообразие задач привело к необходимости расширения направлений использования пакета. С этой проблемой можно было бы справиться введением новых модулей и добавлением функций, но это значительно увеличило бы объем продукта. Поэтому были разработаны инструменты создания дополнительных модулей, которые можно подключать к основному интерфейсу программы. Прикладной программист получил возможность создавать дополнительные модули на своем любимом языке программирования, что обеспечило гибкость использования САПР.

В КОМПАС-ГРАФИК реализован программный интерфейс (API) КОМПАС-МАСТЕР. Этот комплекс инструментальных средств разработки дополнительных модулей (прикладных библиотек и приложений). КОМПАС-МАСТЕР предназначен для организации вызова функции КОМПАС-ГРАФИК из программ на языках C++, Pascal, Delphi и др. Удобно оформлять прикладные библиотеки в виде динамических библиотек (dll), которые пользователи могут без труда подключать из основного интерфейса САПР КОМПАС-ГРАФИК и применять для создания проектов. В динамических библиотеках имеется около 300 функций, которые доступны пользователю при подключении \*.dll.

Усложнение программных продуктов выявило недостатки использования динамических библиотек. Одной из сложностей стало обновление библиотек. В КОМПАС-МАСТЕР были добавлены средства поддержки технологии COM (Component Object Model-модель компонентных объектов).

Технология COM описывает, каким образом программные продукты в среде ОС Windows могут предоставлять доступ к своим функциям из внешних программ, написанных на различных языках программирования. Эти функции группируются в «объекты COM», доступные из любых языков программирования, поддерживающих технологию COM. Общие стандарты привели к улучшению взаимодействия различных программных продуктов.

### Разработка прикладной библиотеки

Создание библиотеки мы проводили на языке программирования C++ VisualStudio 6.0.

Работа проходила по следующим этапам:

1. Установка КОМПАС-Мастер и SDK, создание рабочего каталога
2. Создание динамической RTW-библиотеки с помощью стандартных средств VC++ 6.0 для сборки
3. Задание списка команд RTW-библиотеки

Первый этап включал в себя:

- Установку КОМПАС-Мастер, SDK устанавливается по умолчанию
- Создание в корневом каталоге жесткого диска папки RTWExamples для хранения файлов.

- Подключение к справочной системе VC++6.0 файлов справки КОМПАС-Мастер.

Второй этап включал в себя:

- Вызов в VC++6.0 из меню File команды New - MFC AppWizard (dll) на вкладке Projects и задание имени проекта. Значения остальных опций выбиралось по умолчанию. Таким образом, был создан новый проект для построения пользовательской библиотеки.

- Изменение ряда параметров проекта командой Project=>Settings.
- Создание проекта RTW-библиотеки.
- Отладка проекта.
- Реализацию нескольких функций с заранее оговоренным интерфейсом и создание точки входа в библиотеку, а так же функции, возвращающей имя библиотеки, для отображения в меню Сервис КОМПАС-График.

```
char * WINAPI LIBRARYNAME()  
{  
return "Библиотека форматов Боголюбова";  
}
```

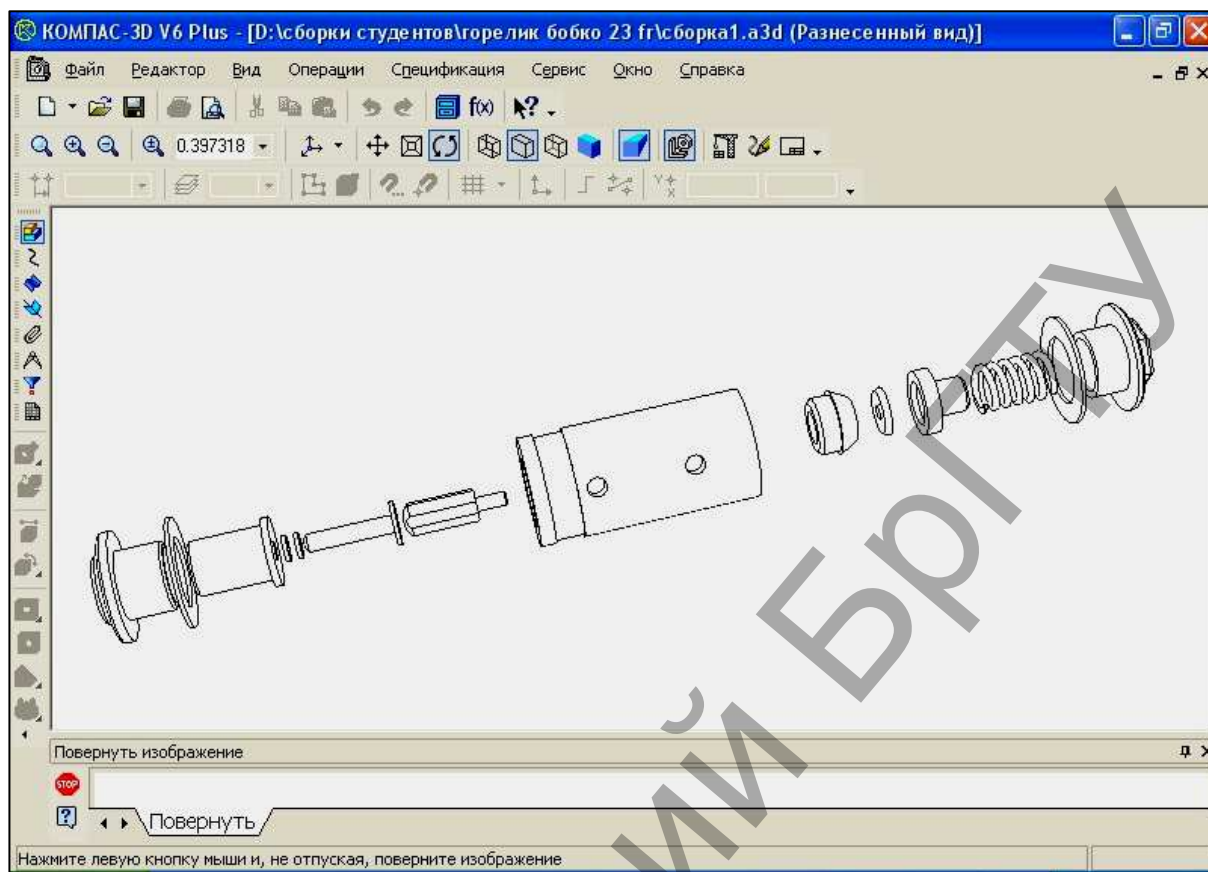
Создание содержания в точке входа.

Создание ряда функций для работы со слайдами

```
void TestShowSlide () {  
AFX_MANAGE_STATE(AfxGetStaticModuleState());  
kompas.ksEnableTaskAccess( 0 ); // закрыть доступ к компасу  
WriteSlide( ksDocument3D& doc );  
Kompas.ksEnableTaskAccess( 1 ); // открыть доступ к компасу  
....
```

Третий этап включал в себя:

- Расширение каркаса RTW-библиотеки так, чтобы эта библиотека имитировала поддержку шести команд рисования различных деталей.



### Литература

1. А. Богуславский. С++ и компьютерная графика. Лекции и практикум по программированию на С++. – М.: Компьютерпресс, 2003.
2. Зуев С.А., Полецук Н.Н. САПР на базе AutoCAD – как это делается. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.

## РАЗРАБОТКА РАСЧЕТНЫХ ПРОГРАММ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ И УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В СРЕДЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ MATLAB

*Григореня А.А., Ковалев В.В., Филипенко К.М., Новаш И.В., БНТУ, Минск*

Система MatLab является одним из эффективнейших средств выполнения научно-технических расчетов, визуализации их результатов, обработки экспериментальных данных и математического моделирования [1].

Среда программирования MatLab имеет свой, относительно простой язык, напоминающий BASIC, отличающийся малым количеством операторов. Незначительное количество операторов упрощает процесс программирования и одновременно позволяет создавать полноценные программы воспроизведения процессов в сложных системах благодаря большому количеству стандартных процедур и функций. Работа в программном режиме используется для сложных расчетов, позволяет реализовать предварительно разработанные алгоритмы, повторять вычисления при других исходных данных. Программа, составленная на языке MatLab, содержит все команды и операторы, обеспечивающие ввод исходных данных, организацию и выполнение вычислений, вывод ре-



зультатов на экран и, при необходимости, во внешний файл. В программном режиме пользователю также доступны все вычислительные возможности системы, все виды графической информации для наглядного представления результатов. Использование библиотек стандартных графических процедур для визуализации результатов расчета, математических выражений, связывающих векторные или матричные объекты, позволяет решать вычислительные задачи «разового» пользования значительно эффективнее, чем с помощью программ, написанных на «скалярных» языках типа FORTRAN или BASIC.

Для практического освоения программной среды MatLab и демонстрации возможностей визуализации результатов расчета была составлена расчетная программа для задания курсовой работы по информатике, которую студенты энергетического факультета выполняют при изучении алгоритмического языка FORTRAN. Разработанная расчетная программа выгодно отличается от программы на Фортране компактностью, использованием расчетных операторов, близких по виду к традиционным формулам, построением осциллограмм расчетных токов и напряжений с помощью стандартных команд построения двумерных графиков.

Полученный опыт работы с системой MatLab показывает необходимость использования студентами данной программной среды для решения вычислительных задач электротехнического характера. Кроме режимов программирования и научного калькулятора, система MatLab может использоваться для проведения исследований сложных электрических систем методом вычислительного эксперимента в режиме динамического моделирования [2,4]. Исходным материалом для подобных исследований является схема системы, составленная из функциональных блоков, имеющих в соответствующих библиотеках системы Simulink-4 MatLab -6.0 [3].

### Литература

1. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003, - 736 с.: ил.
2. Новгородцев А.Б. Расчет электрических цепей в MATLAB: Учебный курс – СПб.: Питер, 2004, - 250 с.: ил.
3. Дьяконов В. Simulink 4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, - 528 с.: ил.
4. Герман-Галкин С.Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MATLAB 6.0: Учебное пособие. – СПб.: КОРОНА принт, 2001, - 320 с.: ил.

## РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ И ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРА МАТРИЦЫ

*Добранова Т. В., ГрГУ им. Янки Купалы, Гродно*

Проблема нахождения собственных значений находит широкое применение в различных прикладных исследованиях. Она используется в теории систем управления (например, изучение устойчивости линейных стационарных систем сводится к изучению расположения собственных значений); связана с различного рода колебаниями (например, с помощью собственных значений можно определять по спектру компоненты газа или других веществ, собственные частоты здания должны лежать вне полосы частот, возбуждаемых землетрясением). Различия в таких задачах исчезают, когда дается достаточно абстрактная формулировка, и все проблемы сводятся к одной и той же задаче вычисления собственных чисел квадратной матрицы с действительными или комплексными элементами.

Вычисление спектра матрицы можно производить с использованием алгоритмов QR (QL), алгоритмов Якоби, Данилевского, Леверье и других. QR (QL) алгоритмы применяются для вычисления собственных значений квадратной симметричной трехдиагональной матрицы. Алгоритм Якоби – самый неэффективный, но самый простой и основан на применении техники определения матриц вращения для случая матрицы  $A \in C^{n \times n}$  посредством плоских вращений. Алгоритмы Данилевского и Леверье – это методы нахождения коэффициентов характеристического полинома матрицы  $A \in C^{n \times n}$ , с помощью которого можно вычислить сами собственные значения, решив алгебраическое уравнение степени  $n$ .

В данной работе реализуется метод вычисления собственных значений симметричной квадратной матрицы, основанный на преобразовании заданной матрицы к трехдиагональному виду (преобразование Хаусхолдера) и QR(QL) алгоритмах со сдвигами. Алгоритмы реализованы в среде DELPHI 7.

Необходимо отметить, что, вычисляя спектр матрицы с помощью вышеперечисленных методов, мы получаем приближенное значение. Отсюда следует возможность замены в некоторых случаях задачи вычисления спектра матрицы задачей оценки собственных значений, т.е. нахождения области локализации собственных значений матрицы.

Для этого можно использовать различные теоремы об областях локализации собственных значений: теоремы Гершгорина, Островского, Бенедиксона, Гирша, Брауна, Брауэра, Бруалди [2].

*Теорема Гершгорина (строчная).* [2] Все собственные значения матрицы  $A$  заключены в объединении  $n$  кругов

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\} \equiv G(A). \quad (1)$$

Кроме того, если объединение  $k$  из этих кругов есть связная область, не пересекающаяся с остальными  $n - k$  кругами, то в ней находится ровно  $k$  собственных значений матрицы  $A$ .

Ранее [1] автором в рамках электронного учебного пособия по курсу «матричный анализ» в среде DELPHI 7 было реализовано применение теоремы Гершгорина и Островского для построения и визуализации областей локализации. Программа строит области локализации собственных значений (круги Гершгорина и Островского) для произвольной матрицы. Она позволяет обучаемому, во-первых, самостоятельно проанализировать результат применения данных теорем, во-вторых, проверить правильность построения областей локализации собственных значений, выполняемые вручную. Ниже (рис.1) приведен пример отображения матрицы в программе и пример построения для нее областей локализации Гершгорина.

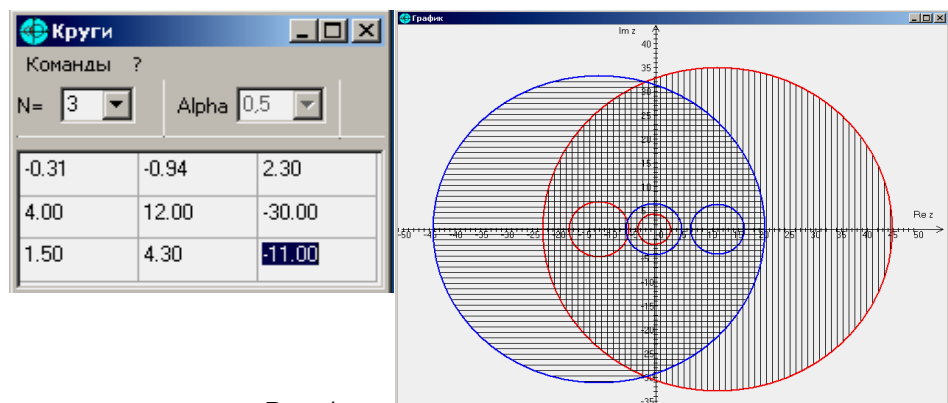


Рис. 1

В работе для уточнения оценок собственных значений (уменьшения области локализации) используется подход, основанный на следующих соображениях. Во-первых, спектр матрицы не меняется при преобразовании подобия, т.е. для любой обратимой матрицы  $S$  матрица  $S^{-1}AS$  имеет те же собственные значения, что и  $A$ . Выбирая подходящим образом  $S$  и применяя теорему Гершгорина к  $S^{-1}AS$ , будем получать различные области локализации. Так как собственные значения матрицы  $A$  принадлежат всем полученным областям локализации одновременно, то они принадлежат их пересечению.

В данной работе реализуется следующий алгоритм оценки собственных значений матрицы на основе невырожденных преобразований.

*Схема алгоритма:*

Введем следующую систему обозначений:

$L_i$  - область локализации, полученная на  $i$ -том шаге алгоритма;

$\sigma(A)$  – спектр матрицы;

$\rho(A)$  – спектральный радиус.

На входе подается матрица  $A \in C^{n \times n}$ , и одно из условий, подлежащих проверке, например принадлежность нуля спектру матрицы ( $0 \notin \sigma(A)$ ).

**Шаг 1.** Строится  $L_0$  - область локализации  $\sigma(A)$ , построенная с помощью теоремы Гершгорина.

**Шаг 2.** Генерируется случайная матрица  $S_i$  и вычисляется число обусловленности матрицы  $S_i$  по формуле:

$$\text{cond } S_i = \begin{cases} \|S_i^{-1}\| \|S_i\|, & \det(S_i) \neq 0 \\ \infty, & \det(S_i) = 0 \end{cases}$$

Если  $\text{cond } S_i \gg 10$ , то работаем дальше, иначе – выход.

**Шаг 3.** Находим  $S_i^{-1}$ , вычисляем  $S_i^{-1}AS_i = B_i$  и строим круги Гершгорина для  $B_i$ . Область локализации  $G_i$  будет равна  $G_i = G(B_i) \cap G(B_i^T)$ .

**Шаг 4.** Находим пересечение  $L_i = L_{i-1} \cap G_i$  и оцениваем для  $L_i$  выполнение входного условия. Если оно выполняется, то выход, если нет – то продолжаем выполнение алгоритма до предельного числа итераций.

Отметим, что современные компьютерные технологии также позволяют вычислять спектр матрицы, однако все результаты, полученные таким способом, приближенные. Например, в пакете Mathematica для вычисления собственных значений используется функция  $\text{Eigenvalues}[m]$ , где  $m$  – квадратная матрица.

Целью данной работы является сравнение эффективности различных методов нахождения и оценки спектра матрицы.

### Литература

1. Добранова Т.В., Цехан О.Б. Разработка учебно-методического комплекса по курсу «Матричный анализ»: Материалы Международной математической конференции «Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры», Брест 2005.
2. Хорн Роджер, Джонсон Чарльз Матричный анализ \ под ред. Х.Д. Икрамова- М. : Мир, 1989. - 655с

## О ЗАДАЧЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЛИЯНИЯ ОКРУГЛЕНИЙ ЧИСЕЛ С ПЛАВАЮЩЕЙ ТОЧКОЙ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ИТЕРАЦИОННЫХ РАСЧЕТОВ

*Комар А. В., БНТУ, г. Минск*

Режим электроэнергетической системы (ЭЭС) описывается нелинейной системой уравнений с комплексными коэффициентами, решение которой до настоящего времени возможно лишь итерационными методами, требующими значительных вычислительных затрат. Метод простой итерации и метод Гаусса-Зейделя не создают проблем с хранением и обработкой промежуточной информации, но плохо сходятся в тяжелых режимах. Еще один недостаток – невозможность получения решения для схем, содержащих большие емкостные проводимости, устройства продольной емкостной компенсации и сильно отличающиеся по величине последовательные сопротивления [1].

Решение нелинейной системы уравнений итерационным методом влечет накопление ошибки округления. Естественно, величина ошибки связана с количеством операций, производимых над числами, то есть зависит от размерности системы. Числа с плавающей точкой тем точнее, чем больше значащих цифр (Digits) используется при их записи. Современные языки программирования используют конечное число значащих цифр. Можно предположить, что при определенной размерности задачи числа значащих цифр не будет хватать для ее решения с заданной точностью. Поэтому актуально определить условия, налагаемые на задачу расчета установившегося режима, при которых итерационный процесс решения системы нелинейных уравнений не будет сходиться именно из-за накопления ошибки округления.

Метод Ньютона–Рафсона и его модификации обладают лучшей сходимостью, однако требуют большего объема вычислений для решения систем линейных уравнений на каждом шаге [1, 2]. С целью преодоления этих трудностей были разработаны алгоритмы и программы решения линейных уравнений с учетом слабой заполненности матрицы Якоби [2]. К сожалению, вычисления на ЭВМ выполняются с погрешностью, обусловленной округлением чисел с плавающей точкой до конечного числа разрядов. При расчете тяжелых режимов, требующих большого числа итераций, алгоритм Ньютона может расходиться, в том числе из-за накопления погрешности вычислений.

Таким образом, можно определить задачу исследования влияния погрешности округлений чисел с плавающей точкой на погрешность решения численным методом, например, задачи расчета установившегося режима ЭЭС.

Для решения поставленной задачи можно использовать следующие определения:

Объект исследования – система нелинейных алгебраических уравнений, описывающая установившийся режим ЭЭС (исследуются конкретные схемы с 13, 26, 52 104 узлами).

Предмет исследования – вычислительная погрешность результата расчета установившегося режима ЭЭС в зависимости от заданной точности расчета ( $\epsilon$ ), представления чисел в ЭВМ: разрядности (Digits) и числа уравнений системы  $n$ .

Метод исследования – вычислительный эксперимент со следующими условиями (ограничениями):

1) исследуемая система уравнений решается итерационным методом Ньютона-Рафсона без дополнительных алгоритмов улучшения сходимости (без учета разреженности матрицы проводимостей);

2) ввиду получения стохастических результатов принимаем, что если за 10 расчетов заведомо сходящийся режим не сошелся ни разу – то при данных  $\epsilon$ , недостаточно Digits для решения задачи размера  $n$ ;

3) если сходящийся режим не сходится за 100 итераций, то считаем, что решение с заданным  $\epsilon$  никогда не достижимо при данном Digits для системы размерности  $n$ .

Целью исследования является получение эмпирической зависимости –  $\text{Digits} = f(\epsilon, n)$ ; оценка методической погрешности с помощью двух критериев: метрологической оценки ( $\epsilon_{\text{метр}}$ ) и вычислительной оценки ( $\epsilon_{\text{выч}}$ ).

Предполагаемые результаты исследования сводятся к следующим условиям: если  $\epsilon_{\text{метр}} > \epsilon_{\text{выч}}$ , то получена уточненная оценка методической погрешности сверху; если  $\epsilon_{\text{метр}} < \epsilon_{\text{выч}}$ , то получен алгоритм оценки методической погрешности вычислений.

Округления чисел в ЭВМ можно избежать, используя аппарат целочисленной арифметики, в основе которого лежат обыкновенные дроби. Однако использование обыкновенных дробей требует значительных вычислительных ресурсов [3] и должно быть обосновано.

Нами произведена серия расчетов установившегося режима энергосистемы, состоящий из трех узлов методом Ньютона–Рафсона. В одном случае вычисления производились с плавающей точкой, в другом – с применением обыкновенных дробей [4]. Результаты расчетов различались в восьмой значащей цифре. Итерационный процесс сходился практически одинаково даже в тяжелых (предельных) режимах. Для систем большей размерности предлагаемый метод исключения погрешности округления пока не исследовался. Тем не менее, анализ полученных результатов показывает, что при расчете установившегося режима энергосистемы с числом узлов больше десяти накапливаемая погрешность при вычислениях с плавающей точкой будет уже значительно влиять на сходимость итерационного процесса.

### Литература

1. Идельчик В.И. Расчеты и оптимизация режимов электрических сетей и систем. – М.: Энергоатомиздат, 1988.– 288 с.: ил.
2. Стратан И.П., Неретин В.И., Спивак В.Л. Расчет и анализ режимов электроэнергетических систем. – Кишинев: Штиинца, 1990.– 140 с.
3. Самарский А. А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1982. – 269 с.
4. Комара А. В. Оценка использования целочисленной арифметики при расчете установившегося режима электроэнергетической системы // В сб. «Актуальные проблемы энергетики» тезисы 60-ой НТК БНТУ. Минск, БНТУ, 2004. С. 26–27.

## АВТОМАТИЗАЦИЯ ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ АКУСТИЧЕСКИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

*Костюк Д.А., Николаюк Л.Н., БГТУ, Брест*

Автоматизация проведения экспериментальных измерений, накопления, первичной обработки, визуализации и систематизации полученных результатов позволяет значительно сократить временные и трудовые затраты исследователя, приближая тем самым практическое внедрение новых технических решений. Использование программного обеспечения в качестве виртуальных средств измерений в сочетании с дополнительной платой-адаптером или внешним модулем позволяет быстро превратить серийный ком-

пьютер в полноценный измерительный комплекс с большим цветным дисплеем, наглядным пользовательским интерфейсом, широкими возможностями измерений, обработки и хранения полученной информации.

Метод акустического спектрального анализа (АСА) позволяет осуществлять диагностику и контроль массивного полупространства, тонкого слоя либо покрытия из материалов с сильной поглощающей способностью акустических колебаний. Отраженные импульсы несут информацию о таких свойствах среды, как поглощение звука, вязкость, а также производных, включая качество сцепления с поверхностью, липкость, влажность и др [1].



Рис. 1. Экспериментальная установка и акустическая измерительная ячейка

Измерительная установка АСА [1, 2] включает в себя генератор прямоугольных электрических импульсов, осциллограф, способный передавать данные в ПК и собственно персональный компьютер. В состав акустической измерительной ячейки входят ультразвуковой пьезопреобразователь (УЗП), работающий в совмещенном режиме излучения-приема. Используемый импульс имеет частоту основной гармоники 3.5 МГц, длительности не более 2 мкс по уровню 40 дБ. Сигнал вводится в отвердевающую среду нормально к поверхности с помощью алюминиевого волновода диаметром 25 мм.

Кроме регистрации на экране осциллографа установкой предусмотрена передача отраженного акустического сигнала в ПК, на котором для этого должно быть установлено специальное программное обеспечение, поставляемое в комплекте с прибором. Однако оно работает лишь с отдельными осциллограммами, не имеет развитых средств их анализа и не годится для отслеживания динамически изменяющихся сигналов. В результате для преодоления указанных ограничений была разработана программная система (ПС), выполняющая функции обработки, первичной интерпретации данных, а также регистрации динамики диагностируемого процесса.

Из-за совмещенного режима излучения-приема УЗП [3] каждая осциллограмма, кроме отраженного импульса, содержит также излученный сигнал, который должен быть исключен из рассмотрения (рис. 2). Вертикальными линиями на осциллограмме отмечена область информативного сигнала в соответствии с указанными через интерфейс ПС границами времени.

Для решения задачи обработки осциллограмм и интерпретации динамики контролируемого процесса в процессе разработки ПС были выделены следующие функциональные части:

- Блок меню для управления модулями системы, в т.ч. для выделения информационного сигнала путем ввода ограничения временной характеристики, добавления в программу для анализа файлов данных.

- Блок построения осциллограммы по данным, полученным из загруженного файла. Может быть вызван двумя способами: автоматически при выборе файла данных из списка загруженных файлов или при обновлении графика.
- Блок динамики для реализации главной задачи программной системы. При переходе к этому модулю программы происходит вычисление всех необходимых характеристик и построение соответствующих графиков.
- Блок сохранения в буфер обмена графика, находящегося на активной форме.
- Блок справки и информации о программе.

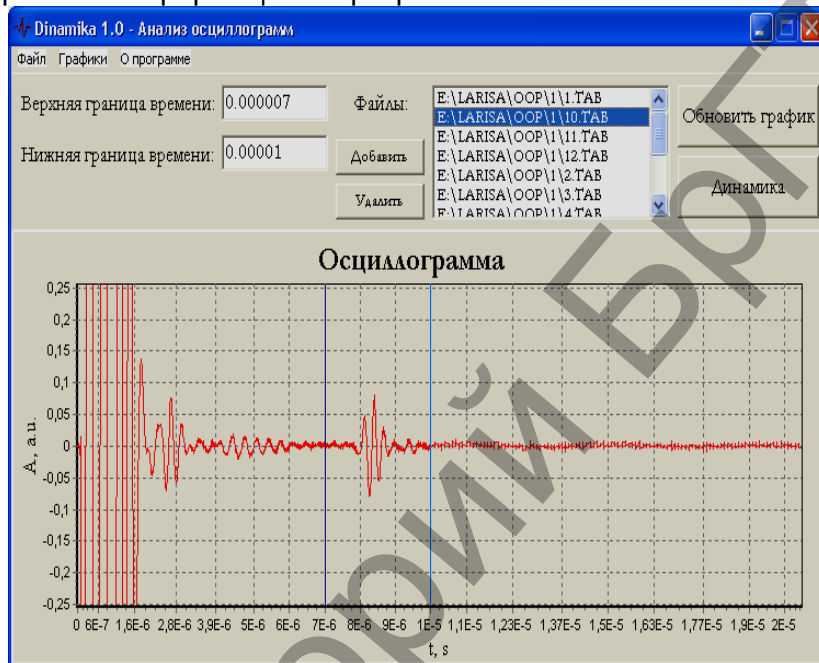
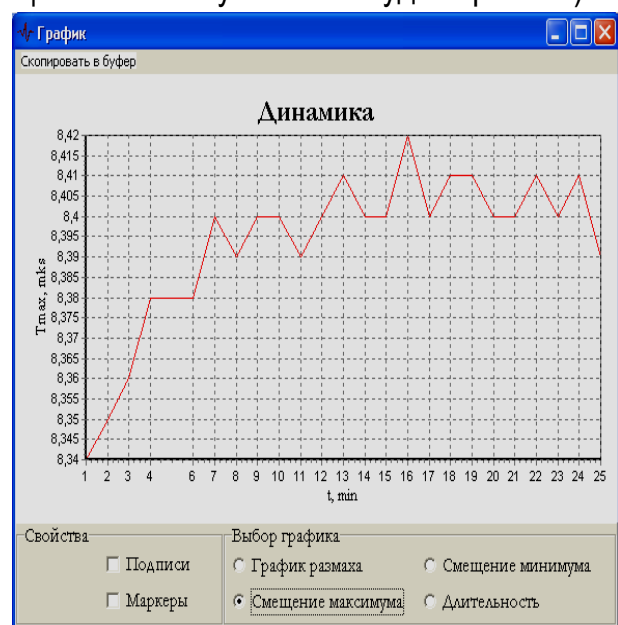


Рис. 2. Построение осциллограммы

В качестве интегральных оценок, использовавшихся для отслеживания динамики изменения осциллограмм, были выбраны размах импульса, смещение импульса по временной оси, длительность импульса. Пример полученной зависимости размаха импульса показан на рис. 3 а), а зависимости смещения максимума амплитуды – рис.3 б).



а)



б)

Рис. 3. Кривые, построенные на основе анализа осциллограмм

Для интеграции в документы при разработке ПО предусмотрена возможность копирования построенных графиков в буфер обмена и встраивание их в документ.

### **Литература**

1. В.П. Данилевский, Д.А. Костюк, Н.В. Кудинов, Ю.А. Кузавко. Акустические спектроскопические методы и средства диагностики материалов и веществ // «Материалы, технологии, инструменты», №3, т. 8, 2003 г. стр. 104-112
2. Д.А.Костюк, Ю.А.Кузавко. Аномальное отражение продольного ультразвука от сильно диссипативной среды // Инженерно-физический журнал, 2004, т. 77, №5, с. 161 – 169
3. Ультразвуковые преобразователи для неразрушающего контроля. / Под ред. И.Н. Ермолова. - М.: Машиностроение, 1986. - 277 с.

## **СОВРЕМЕННАЯ АВТОМАТИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ В СТРОИТЕЛЬНОЙ КОМПАНИИ**

*Куган С.Ф., БГТУ, Брест*

В условиях современной экономики требования к автоматизированной системе управленческого учета меняются достаточно стремительно. Предприятия быстро развиваются, в рамках одной компании появляются несколько видов деятельности, и существующая система автоматизации уже не соответствует требованиям руководителей. В таких условиях необходимо обладать информацией о перспективных направлениях в области управленческого учета.

Управленческий учёт представляет собой отрасль знаний, необходимых для правильного планирования, корректного руководства, контроля и учёта отдельных видов деятельности предприятия. Полноценная информационно-аналитическая поддержка управленческих систем невозможна без применения комплексных информационных систем, дающих возможность правильного видения целостной картины состояния дел на предприятии. Построение системы управленческого учета в организации заключается в формировании набора формализованных процедур, обеспечивающих менеджеров всех уровней информацией, полученной как из внутренних, так из внешних источников, для принятия своевременных и эффективных решений в рамках своей компетенции. Управленческий учет базируется на методиках, тесно связанных с функциональными процессами на предприятии. В отличие от системы подготовки информации для бухгалтерской (финансовой) и налоговой отчетности, ориентированной на внешних пользователей, система управленческого учета и анализа ориентирована на внутренних пользователей в лице высшего руководства организации, а также руководителей и ответственных исполнителей ее подразделений.

В жизни каждой компании наступает момент, когда она перестает справляться с потоком внутренней информации. Тогда появляется необходимость усовершенствовать существующие программные мощности и переходить на тиражное решение, позволяющее объединить проектное управление, бухгалтерский и управленческий учет, а также минимизировать двойной ввод данных. Другие причины интереса к информационным системам управления со стороны строительных компаний - стремление к снижению себестоимости строительства и повышение управляемости. При этом первыми автоматизируются обычно те участки, которые являются инициаторами всех организационных перемен, или же наиболее проблемные области управления. Для крупных компаний и



холдингов, располагающих собственными строительными мощностями, оборудованием, складами материалов и вспомогательными производствами, в какой-то момент встает задача управления ресурсами вообще. Управленческий учет в небольших и средних строительных компаниях часто ведется в программе собственной разработки на основе Excel или Access.

Специфика бизнеса проектных организаций заставляет их внедрять системы проектного планирования, включающие как построение будущих денежных потоков строительных проектов и план-графиков работ, так и функциональный контроль их реализации. Часто эти программы разрабатываются самостоятельно, для чего строительная фирма содержит штат программистов, или же заказываются на стороне - проверенной компьютерной компании. Стоимость таких разработок зачастую превышает стоимость внедрения аналогичных по функциям и нередко более рациональных серийных программ, но внедрять их строители не спешат: перспектива раскрыть тайны своего бизнеса воспринимается отрицательно. При этом связь проектного управления с бухгалтерской системой или не налаживается вовсе, или существует лишь частично. Поэтому большую часть информации приходится вносить дважды. Контроль исполнения проектов в подобных случаях часто затруднен, так как проверить реальное завершение работ при помощи сверки данных проектной системы и бухучета достаточно сложно. Сегодня большинство белорусских строителей используют автоматизированные системы управления в тех областях своей деятельности, где без этого невозможно обойтись: в бухгалтерском учете, сметных расчетах, проектировании. Это можно объяснить желанием качественно и быстро обеспечить безопасность функционирования предприятия: вовремя сдавать налоговую отчетность, вести учет затрат и доходов. Автоматизация касается не только бухгалтерии, но и производственных подразделений, занимающихся подготовкой сметной документации, выпуском ежемесячных отчетных документов: процентов, накопительных ведомостей и других документов строительных организаций. Часто при этом используется принцип "частичной" автоматизации, когда различные задачи решаются разными системами, нередко никак не связанными между собой. Большинство небольших фирм используют программу "1С: Бухгалтерия" и, как дополнение, сметную программу. В интеграции систем пока нет необходимости, так как компания невелика и объем информации, которую приходится вносить в программу, также небольшой. Но при увеличении объемов возникает необходимость в том, чтобы перевести бухгалтерию на специализированную систему для строителей.

Наиболее популярен среди строителей учетный продукт "1С: Бухгалтерия" ведущего российского разработчика компании "1С" или его модификации, предназначенные специально для строительных организаций, - "1С: Подрядчик строительства" (разработчик "ИМПУЛЬС ИВЦ"), "ИКС: Строительство" (разработчик "ИКС Технологии"). Эти программы автоматизируют не только учет и отчетность, но и позволяют проводить плановый и финансовый анализ. Сметное планирование ведется в специализированных программах "Смета", WINABeRC, "Смета Плюс" (всего около 30 систем), большая часть которых разработана также фирмами-франчайзи "1С" и совместима с бухгалтерскими модулями этой системы. Есть отраслевые решения и в модуле управления капитальным строительством в известном и широко распространенном программном продукте "Галактика". Можно не говорить о целом ряде систем управления проектами, автоматизации проек-

ных работ или о геоинформационных системах, предназначенных для решения территориально-распределенных задач. Так что все необходимые строительным компаниям программные продукты уже разработаны, и количество программ в целом соответствует спросу рынка. Бухгалтерская программа параллельно автоматизирует бухгалтерский и управленческий учет, и ее данные используются для контроля реализации проектов в системе проектного управления. Происходит параллельный ввод данных во все системы. Выбор того или иного варианта зависит от масштаба текущей или планируемой деятельности фирмы и, разумеется, объема инвестиций, которые она готова вложить в автоматизацию. Стоимость проекта автоматизации управления складывается из ряда составляющих, в том числе стоимости консалтинга на предварительных стадиях (обследование компании, реинжиниринг бизнес-процессов, постановка управленческого учета, бюджетирования, проектного управления), стоимости программного продукта, доработки и внедрения системы, а также ее последующего сопровождения. Внедрение решения на базе Microsoft Business-Solution Axapta в крупном инвестиционно-строительном холдинге может обойтись в сумму от \$200 тыс.

Автоматизация на базе отечественных разработок, таких как "Галактика" или "1С: Предприятия 8.0", стоит на порядок дешевле. Хотя многие строительные компании нельзя заподозрить в нехватке средств, вкладывая их в автоматизацию они не торопятся. Это можно объяснить менталитетом многих руководителей. Распространено ошибочное мнение, что если компания приносит деньги при существующей системе учета и управления, то и в будущем такая ситуация сохранится. Другая распространенная ошибка, напротив, связана с желанием купить дорогую систему, которая "решит все проблемы". Первый этап автоматизации строительной компании должен включать именно оперативное управление и учет. И лишь когда выстроена система информационного обеспечения оперативной деятельности, стоит задумываться об автоматизации процессов решения стратегических задач: определения стратегии инвестирования, управления маркетингом, инновационного развития и других сфер управления, требующих уже применения более интеллектуальных продуктов.

## **ОПТИМИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЕЙ С ПОМОЩЬЮ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ**

*Куш Д.Д., ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно*

Компьютерные сети (КС), представляющие собой совокупность территориально сосредоточенных ЭВМ, терминалов и средств передачи данных, представляют ряд возможностей как при сборе, хранении и распределении информации, так и при коллективном (распределенном) использовании ЭВМ. Объединение ряда мощных ЭВМ и устройств ввода-вывода в единую сеть позволяет осуществлять обмен информацией и программами между ЭВМ и пользователями сети, создавать доступные многим пользователям распределенные банки данных, перераспределять (в случае необходимости) вычислительные мощности и т.д. [1].

Стохастический характер поступления данных и недетерминированная обработка их в каналах связи и узлах коммутации определяют использование моделей теории МО для анализа и проектирования КС. Однако следует отметить, что исследование КС в целом или отдельных протоколов (например, сквозных) с помощью простейших однофазных или двухфазных моделей МО (концепция «черного ящика») позволяет дать

лишь некоторое качественное представление о характере протекания информационных процессов в КС, так как не учитывает сложного взаимодействия устройств и процессов в КС. В то же время указанные процессы естественно отображаются в моделях сетей МО, которые нашли широкое применение для анализа КС.

При применении теории сетей МО для анализа характеристик КС различные устройства и процессы обычно моделируются четырьмя типами центров обслуживания. В частности, процессоры узлов коммутации и хостов моделируются центрами типа FIFO или PS, а каналы передачи данных – однолинейными или многолинейными центрами FIFO. Для моделирования терминалов и учета задержек, обусловленных временем подтверждения об успешной доставке пакета или временем ожидания time-out, обычно используются центры типа IS. Это позволяет применить для расчета характеристик хорошо разработанные алгоритмы теории сетей МО. Сети МО являются инструментами, позволяющими изучать и анализировать взаимодействие между компонентами сети. Под заявками при этом понимаются, например, команды или запросы, передаваемые в реальной КС от одной ЭВМ другой. Результаты этого анализа могут быть использованы для прогнозирования таких показателей эффективности как: уровень применения ресурсов, производительность, средняя длина очереди заявок, ожидающих обслуживания, среднее время обслуживания и т.д.

Введем некоторые понятия, допущения и условные обозначения для приближения реально существующих КС к их теоретическим моделям в виде СМО и сетей МО.

1. Под СМО сети будем понимать некоторый узел КС, будь то некоторый компьютер (хост), маршрутизатор или простой терминал.

2. В случае разнотипных заявок будем считать, что каждый узел строго «специализирован» на определенной операции. Другими словами, некоторый тип заявки обслуживается заданным образом, т.е. для него задан тип обслуживания с определенными параметрами. Способ обслуживания характеризует сложность «обработки» данного типа заявки для некоторого узла сети.

3. Мощность некоторого узла КС (без учета типа обслуживания) будем условно выражать в виде количества линий обслуживания  $m_i, i = \overline{1, n}$  соответствующей СМО. Однако заметим, что если в некоторой СМО количество линий после агрегирования мощности, например, в 2 раза больше числа линий обслуживания другой СМО, то реально это не означает, что 1-ая СМО в 2 раза производительнее 2-ой.

4. Вероятности переходов заявок между СМО сети получаются путем анализа и наблюдения за реально функционирующей КС. Заметим, что матрица маршрутов  $P = \|P_{icjs}\|$ , где  $P_{icjs}$  - вероятность того, что заявка типа  $s$  после обслуживания в  $i$ -ой СМО перейдет на обслуживание в  $j$ -ую СМО как заявка типа  $s$ , учитывает топологию сети и выбранный способ маршрутизации.

5. Под типом заявки будем понимать некоторую спецификацию заявки. Другими словами каждая заявка в КС представляет некоторый запрос (в простейшем случае чтение-запись), который отправляется одним узлом КС другому для ее дальнейшей обработки.

6. Ограничения на память (буфер процессора), используемую узлами КС (длина очереди в узлах сети МО) не учитываем и полагаем память бесконечной.

Опираясь на модели, можно прогнозировать поведение КС в разных ситуациях, анализировать ее поведение в критических ситуациях. Этот анализ дает возможность ответить на вопрос: не является ли существующая система сдерживающим фактором производства, а также, каким образом можно изменить систему, чтобы она могла удовлетворить предъявляемые к ней требования и на её функционирование уходило минимальное количество ресурсо-часов.

Рассмотрим сеть МО с разнотипными заявками. Введем некоторые обозначения. Пусть  $n$  - число систем обслуживания в сети,  $r$  - количество типов заявок, обслуживаемых в рассматриваемой сети МО,  $N_{ic}$  - среднее число заявок типа  $c$  в  $i$ -ой СМО,  $i = \overline{1, n}, c = \overline{1, r}$ . Для вычисления этих величин можно использовать рекуррентные по числу заявок или по моментам времени методы. Пусть  $c_i$  - затраты на содержание одной линии обслуживания в  $i$ -ой СМО,  $i = \overline{1, n}$ . Обозначим  $q_{ic}$  - потери при простое заявки типа  $c$  в очереди  $i$ -ой СМО,  $i = \overline{1, n}, c = \overline{1, r}$ . Тогда целевую функцию для задачи оптимизации запишем следующим образом:

$$W = W(m_1, m_2, \dots, m_n) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{c=1}^r q_{ic} (N_{ic} - \rho_{ic}) + c_i m_i \right) \rightarrow \min_{m_i, i=1, n}, \quad (1)$$

где  $\rho_{ic}$  - среднее число занятых линий заявками типа  $c$  в  $i$ -ой СМО.

В качестве ограничений для задачи оптимизации (1) могут быть взяты прямые ограничения вида

$$1 \leq m_i \leq a_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2)$$

Последнее неравенство означает, что в  $i$ -ой СМО не может быть более  $a_i$  линий обслуживания,  $i = \overline{1, n}$ . Тогда с учетом прямых ограничений (2) задача оптимизации запишется в виде:

$$\begin{cases} W = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{c=1}^r q_{ic} (N_{ic} - \rho_{ic}) + c_i m_i \right) \rightarrow \min_{m_i, i=1, n}, \\ 1 \leq m_i \leq a_i, i = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (3)$$

При этом величины  $N_{ic} = N_{ic}(m_1, m_2, \dots, m_n)$  имеют довольно громоздкий вид. Задача (3) является задачей условной целочисленной оптимизации. Учитывая этот факт, а также сложность целевой функции, для решения задачи применим метод полного перебора.

### Литература

1. О. И. Авен, Н. Н. Гурин, Я. А. Коган. Оценка качества и оптимизации вычислительных систем. - Москва: Наука, 1982. - 464 с.

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА В МОДЕЛИРОВАНИИ УЧЕБНОГО ПЛАНА

*Левицкий А.А., ГрГУ, Гродно*

В настоящее время процесс составления учебных планов, основанный на опыте и интуиции работников высшей школы, нуждается в серьезном совершенствовании и научном обосновании принимаемых решений. Это особенно актуально в условиях все возрастающих требований к подготовке специалистов, необходимости частого обновления учебных планов.

По сравнению со средней школой, где номенклатура предметов относительно стабильна, в высшей школе вместе с появлением новых отраслей знаний возникают и новые специальные предметы. При составлении учебных планов ВУЗов довольно трудно расположить дисциплины с результирующим максимальным эффектом. Так как время на непосредственную их апробацию в вузах весьма ограничено, то многие специалисты предлагают изучать различные аспекты содержания образования, пользуясь методами моделирования. Попытки моделировать учебный процесс помогают учесть те широкие возможности, которые открывает применение технических средств переработки информации.

При составлении учебного плана возможны ситуации, когда дисциплина А, сведения из которой нужны для изучения некоторой другой дисциплины В, к началу изучения дисциплины В еще не прочитана. Такая ситуация (назовем ее обратной связью между дисциплинами) затрудняет освоение программы студентами. Поставим задачу: расположить дисциплины по семестрам таким образом, чтобы минимизировать число ситуаций непоследовательного расположения дисциплин (число обратных связей). При этом надо учитывать ограничения на бюджет времени в семестре, на количество дисциплин, изучаемых в одном семестре, и другие ограничения.

В работах [1,2,3] предложены некоторые модели, формализующие задачи оптимизации учебных планов в виде задач математического программирования (точнее, булевого). Для решения таких задач часто применяют методы полного или частичного перебора.

В некоторых случаях при решении задач оптимизации, когда точный оптимум не требуется или поиск его сопряжен со слишком большими затратами, решением может считаться любое значение, которое лучше некоторой заданной величины. В этом случае генетические алгоритмы [4] - часто наиболее приемлемый метод для поиска "хороших" значений.

Для решения задачи оптимизации задачи учебного плана в данной работе разработан генетический алгоритм, который реализован с учетом специфики задачи на языке программирования C#.

При разработке программного модуля данный метод адаптируется к условиям задачи для уменьшения времени, затрачиваемого на вычисление оценок некорректных планов: фильтрующие ограничения проверяются уже на этапе генерации особи.

Опишем реализованный алгоритм.

Пусть план является особью, семестры - хромосомами, в каждой хромосоме есть набор генов, при этом каждый из генов соответствует отдельной дисциплине. Ген принимает значение 0 или 1: если ген равен 0, то в данном семестре дисциплина не присутствует, если 1 – присутствует. При этом учитывается, что одна и та же дисциплина может появиться только в одном семестре (модули дисциплин, читающиеся в нескольких семестрах, считаются разными дисциплинами).

В начале каждой эпохи случайным образом генерируется особь. Затем проводится оценка каждой особи по количеству обратных связей. Оценивать довольно просто с использованием заданного в качестве начальной информации списка прямых связей. Если при сравнении хромосом обратная связь появилась в соседних хромосомах, то предыдущее значение оценки увеличиваем на 1, если обратная связь тянется через одну хромосому - то на 2 т.д. Затем особь, которая имеет наименьшую оценку, переходит в следующую эпоху, худшая половина особей отсеивается, а оставшаяся мутирует – то

есть с некоторой вероятностью  $p$  инвертирует гены в хромосоме. И так до тех пор, пока не останется лучшая особь. Эта особь будет являться планом с наименьшим числом обратных связей.

Входными данными являются: список предметов и их длительность, количество семестров, количество часов в семестрах, список прямых связей между предметами. Выходные данные - план с наименьшей оценкой.

Разработанный программный модуль позволяет ускорить процесс составления учебных планов вузов с оптимальной структурой и может применяться для составления учебных планов любых специальностей.

### Литература

1. Леонтьев Л.П., Гохман О.Г. Проблемы управления учебным процессом: математические модели. – Рига: Зинатне, 1984. – 339с.
2. Стока Н.А. Оптимизация междисциплинарных связей // Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях: Материалы VIII Республиканской научной конференции студентов и аспирантов (г. Гомель, 14-16 марта 2005 г.). – Гомель: ГГУ, 2005.
3. Стока Н.А. Об автоматизации разработки учебных планов по специальности «Экономическая кибернетика» // Современные информационные компьютерные технологии в учебном процессе, научных исследованиях и управлении университетом: Материалы открытой научно-практической конференции преподавателей и студентов математического факультета (г. Гродно, 26-27 апреля 2005г.) – Гродно: ГрГУ, 2005.
4. <http://algotlist.manual.ru/ai/ga/ga1.php>

## КОМПЬЮТЕРНЫЕ ПАКЕТЫ АНИМАЦИОННОЙ ГРАФИКИ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ

*Лысюк С.С., Трофимович И.В., Новаш И.В., БНТУ, Минск*

Многие электротехнические дисциплины требуют от студентов мысленного представления различных электромагнитных процессов. Такие понятия, как электрический ток, магнитный поток, вращающееся магнитное поле невозможно увидеть непосредственно глазами или пощупать руками. Электромагнитные процессы описываются математическими формулами на основе физических законов. Представить эти процессы или визуализировать с помощью расчетных результатов, получаемых на основе их математических моделей, - это значит дать возможность студенту более глубоко и правильно понять физический смысл этих достаточно сложных физических явлений и процессов.

Первые успешные попытки представления электромагнитных процессов были сделаны в «докомпьютерную» эпоху создателями учебных фильмов по разделам электротехники. С помощью классической анимации (мультипликации) объяснялись принципы действия электрических машин, представлялись в динамике процессы в электрических и магнитных полях, на экране создавалась пространственная картина вращающегося магнитного поля из совокупности пульсирующих магнитных полей трех отдельных обмоток. В настоящее время учебные фильмы того времени стали практически недоступны для учебного процесса в силу старения пленочных носителей и отсутствия соответствующей кинопроекторной аппаратуры.

Сегодня решить задачи визуализации сложных электромагнитных процессов можно на основе мультимедийных компьютерных технологий. Современный персональный компьютер с мультимедийным оборудованием и соответствующим программным обеспечением позволяет решать подобные задачи практически любой сложности. В данной работе проведена первая попытка привлечь внимание студентов и преподавателей к этой проблеме, и выполнить компьютерную визуализацию вращающегося магнитного поля.

Для решения задачи был проведен анализ компьютерных пакетов, с помощью которых принципиально возможно осуществлять анимацию результатов математических расчетов. Для реализации таких задач можно выделить следующие системы анимационной графики:

- система динамического моделирования Simulink MathLab;
- графический пакет Model Vision;
- пакет пространственной графики 3D-Grapher;
- математический пакет Visual Mathlab;
- пакет для расчетов и визуализации физических процессов ELCUT.

Из перечисленных программных средств хотелось бы особо выделить два последних пакета, как наиболее простых в освоении, наименее ресурсоемких и, что немало важно, бесплатно распространяемых.

В пакете 3D-Grapher вращающееся магнитное поле было представлено в упрощенной структуре неподвижного цилиндра – статора и равномерно вращающегося цилиндра – ротора. Электромагнитное поле представлялось изменяющимися по длине векторами магнитной индукции неподвижных обмоток и суммарным вектором магнитной индукции, вращающимся в плоскости сечения статора.

Задача визуализации также была решена с помощью расчетной программы на языке C++Builder. Разработанная программа представляет вращающееся магнитное поле в виде векторов индукции совместно с синхронизированными с ними графиками фазных токов. Значение амплитуд, частот и начальных фаз трехфазной системы токов можно изменять в выводимом на экран диалоговом окне.

## **ПРИМЕНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ПРИ РАЙОНИРОВАНИИ ТЕРРИТОРИИ БЕЛАРУСИ ПО ХАРАКТЕРУ КОЛЕБАНИЯ ГОДОВОГО СТОКА РЕК**

*Парфомук С.И., БГТУ, Брест*

При нынешней густоте гидрометрической сети определение основных гидрологических характеристик, как правило, осуществляется при отсутствии данных наблюдений. Поэтому выделение районов с генетически однородными условиями формирования стока представляет значительный интерес. Задача заключается в установлении районов с одинаковыми колебаниями во времени той или иной гидрологической величины.

Поля гидрометрических характеристик являются изменчивыми, как в пространстве, так и во времени. Для описания связи между значениями поля в различных точках наиболее употребляемыми являются такие характеристики статистической структуры, как корреляционные, ковариационные и спектральные функции. В настоящей работе предпочтение отдано корреляционным функциям как более точным и универсальным, отличающимся меньшей зависимостью от изменений географического и сезонного характера.

Любую гидрологическую характеристику, образующую поле, можно описать функцией пространственных координат и времени [1]. Если исходная точка  $M_0(x_0; y_0; h_0; t_0)$ , а любая текущая точка  $M_j(x_j; y_j; h_j; t_j)$ , то коэффициент корреляции для этих точек будет иметь вид:

$$r(0; j) = f(x_0; y_0; h_0; t_0; x_j; y_j; h_j; t_j). \quad (1)$$

Для стационарных полей введем переменную  $\tau = t_j - t_0$  и, считая начало координат в полюсе, введем новые координаты  $X = x_j - x_0$ ,  $Y = y_j - y_0$ ,  $H = h_j - h_0$ . Разностью отметок точек для условий Беларуси, вследствие ее малой величины, можно пренебречь. Введя полярные координаты  $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$  и  $\alpha = \arctg\left(\frac{Y}{X}\right)$ , полученную пространственную корреляционную функцию (ПКФ) стационарного поля можно представить следующим образом:

$$r = f(x_0; y_0; \rho; \alpha; \tau). \quad (2)$$

Для однородных стационарных полей ПКФ не зависит от координат полюса и не меняется при параллельных его перемещениях, а зависит только от расстояния между точками, т. е.

$$r = f(\rho; \tau). \quad (3)$$

Зафиксировав  $\tau$  и получив ПКФ как функцию  $r = f(\rho)$ , в поле координат  $(r, \rho)$  строится зависимость парных коэффициентов корреляции годовых расходов воды от расстояний между центрами тяжести водосборов. Проверка нуль-гипотезы  $H_0$  об однородности ПКФ осуществляется с помощью преобразования Фишера [2]:

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2(n-1)}, \quad (4)$$

где  $r$  – парный коэффициент корреляции,  $n$  – количество лет наблюдений.

Далее рассчитывается количество точек, попавших в диапазон  $\pm \sigma_Z$ ,  $\pm 2\sigma_Z$ ,  $\pm 3\sigma_Z$ , где  $\sigma_Z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$ , которое сопоставляется с теоретическими вероятностями для нормального закона распределения. Нуль-гипотеза не опровергается и ПКФ считается однородной, если эмпирические и теоретические вероятности оказываются близкими. В противном случае нулевая гипотеза опровергается, а исходное поле стока уменьшается.

Исходными данными послужили годовые расходы воды по 82 речным створам за период инструментальных наблюдений. В первую очередь ПКФ была рассчитана по 3321 парному коэффициенту корреляции, полученным по всем 82 градациям наблюдений. Среднее число совместных лет наблюдений при расчете парных коэффициентов корреляции составляло не менее 20 лет. Оценка однородности ПКФ годового стока рек Беларуси показала, что рассматриваемая функция неоднородна. Далее исходное поле было разделено на более мелкие районы. Для территории Беларуси выделено четыре однородных района, как показано на рис. 1.



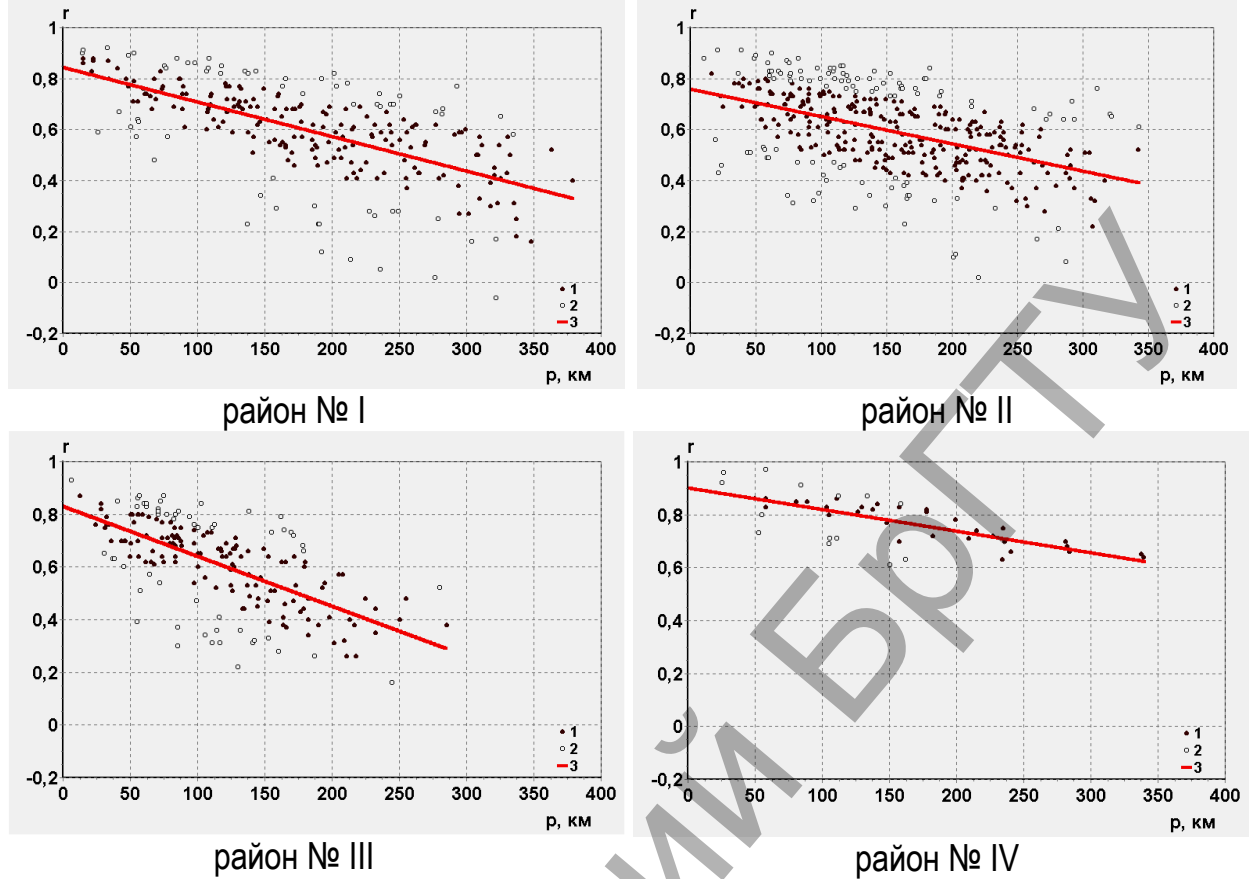


Рис. 1. ПКФ годового стока однородных районов Беларуси (1 – эмпирические коэффициенты парной корреляции в диапазоне  $\pm \sigma_Z$ ; 2 – эмпирические коэффициенты парной корреляции в диапазоне  $\pm 2\sigma_Z$ ; 3 – линия регрессии  $r = f(\rho)$ )

Районирование территории Беларуси в зависимости от характера многолетних колебаний годового речного стока приведено на рис. 2.

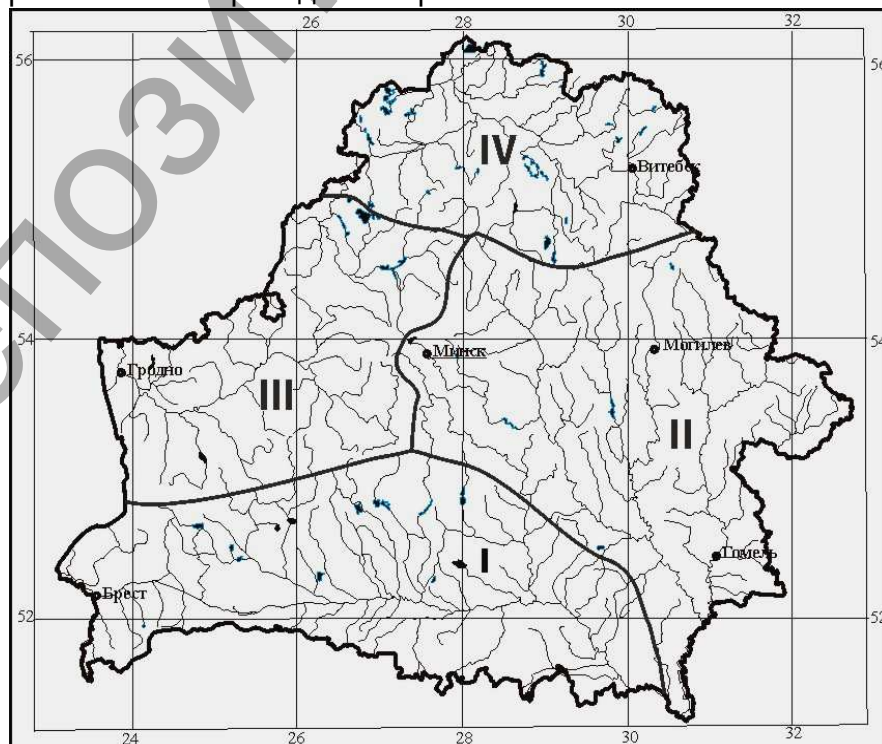


Рис. 2. Однородные районы по многолетним колебаниям годового стока рек Беларуси

Выполнено районирование территории Беларуси по характеру годового колебания стока рек с применением аппарата пространственных корреляционных функций. Установленные различия в структуре многолетних колебаний годового стока рек Беларуси, а также в их пространственной скоррелированности целесообразно учитывать при совершенствовании методов расчета и прогноза речного стока неизученных и слабо изученных рек Беларуси.

### Литература

1. Казакевич Д.И. Основы теории случайных функций и ее применение в гидрометеорологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1977. – 320 с.
2. Рождественский А.В., Чеботарев А.И. Статистические методы в гидрологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974. – 424 с.

## ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УСИЛЕНИЯ

*Пивень М.В., Бладыко Ю.В., БНТУ, Минск*

В расчете электронных устройств необходимо определять коэффициенты усиления по току, напряжению и мощности. При исследовании усилителей это приходится выполнять многократно. Наиболее простой и легко осваиваемой программой моделирования электронных схем является Electronics Workbench [1]. На рис. 1 показан усилительный каскад переменного тока на биполярном транзисторе с измерителем device2, разработанным с целью ускорения анализа.

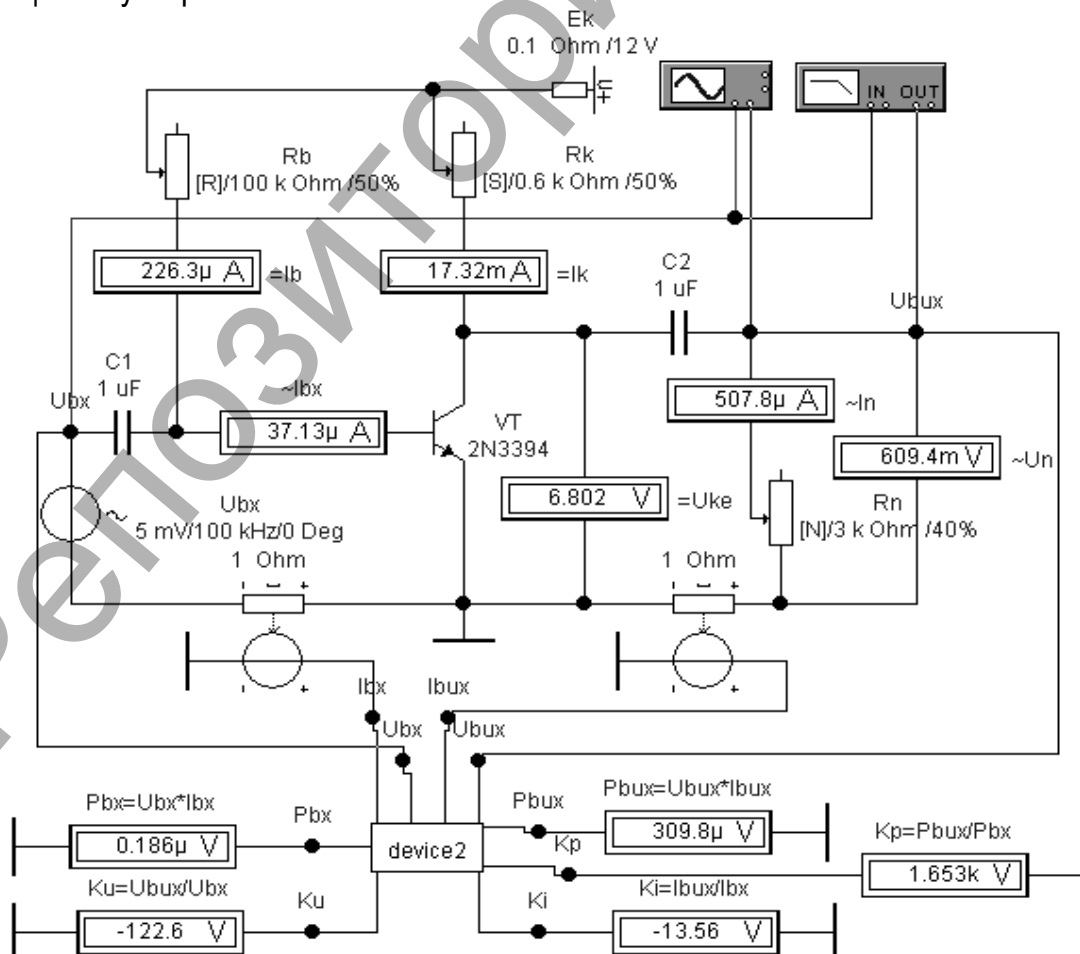


Рис. 1

На вход подцепы измерителя подаются входные и выходные напряжения и токи (рис. 2).

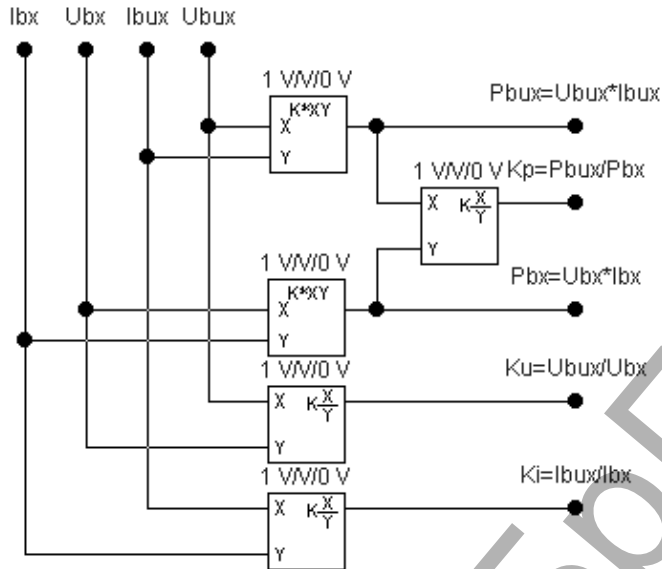


Рис. 2

При синусоидальном законе изменения

$$\begin{aligned} u_{bx} &= U_{bxm} \cdot \sin(\omega t + \psi_{u1}); & u_{bux} &= U_{buxm} \cdot \sin(\omega t + \psi_{u2}); \\ i_{bx} &= I_{bxm} \cdot \sin(\omega t + \psi_{i1}); & i_{bux} &= I_{buxm} \cdot \sin(\omega t + \psi_{i2}). \end{aligned} \quad (1)$$

Благодаря имеющемуся в Electronics Workbench множительному устройству определяются входная и выходная мощности. Мгновенные мощности равны

$$\begin{aligned} p_{bx} &= u_{bx} \cdot i_{bx} = U_{bxm} \cdot I_{bxm} \cdot [\cos(\psi_{u1} - \psi_{i1}) - \cos(2\omega t + \psi_{u1} + \psi_{i1})]/2; \\ p_{bux} &= u_{bux} \cdot i_{bux} = U_{buxm} \cdot I_{buxm} \cdot [\cos(\psi_{u2} - \psi_{i2}) - \cos(2\omega t + \psi_{u2} + \psi_{i2})]/2. \end{aligned} \quad (2)$$

Результаты индицируются на табло подключаемых к выходам вольтметров. Причем последние должны работать в режиме постоянного тока, т.к. активные мощности определяются средними значениями

$$\begin{aligned} P_{bx} &= U_{bxm} \cdot I_{bxm} \cdot \cos(\psi_{u1} - \psi_{i1})/2; \\ P_{bux} &= U_{buxm} \cdot I_{buxm} \cdot \cos(\psi_{u2} - \psi_{i2})/2. \end{aligned} \quad (3)$$

Делительные устройства позволяют определить коэффициенты усиления по току, напряжению и мощности

$$k_i = \frac{i_{bux}}{i_{bx}}; \quad k_u = \frac{u_{bux}}{u_{bx}}; \quad k_p = \frac{p_{bux}}{p_{bx}}, \quad (4)$$

дающие при условиях

$$\psi_{u2} - \psi_{u1} = \pm \pi \cdot k, \quad \psi_{i2} - \psi_{i1} = \pm \pi \cdot k, \quad k=0, 1 \dots n, \quad (5)$$

корректный результат

$$k_i = \frac{I_{buxm}}{I_{bxm}}; \quad k_u = \frac{U_{buxm}}{U_{bxm}}; \quad k_p = \frac{P_{bux}}{P_{bx}}. \quad (6)$$

Это возможно при синусоидальном законе изменения и активной нагрузке.

В результате исследования получены результаты, совпадающие с расчетными.

### Литература

1. Карлащук, В.И. Электронная лаборатория на IBM PC. Лабораторный практикум на базе Electronics Workbench и MATLAB. – М.: СОЛОН-Пресс, 2004.- 800 с.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ МЕТОДОМ РЫЧАГА

Прожерин И.Г., БГТУ, Брест

Задача о назначении и транспортная задача относятся к разделу математического программирования исследования операций. Они получили в настоящее время широкое распространение в теоретических обработках и практическом применении на транспорте и в промышленности.

Пусть задан двудольный граф  $G$  с двумя долями  $A$  и  $B$ , каждое ребро которого имеет какой-то вес. Тогда задача состоит в том, чтобы выбрать в нем максимальное паросочетание с минимальным суммарным весом входящих в него ребер.

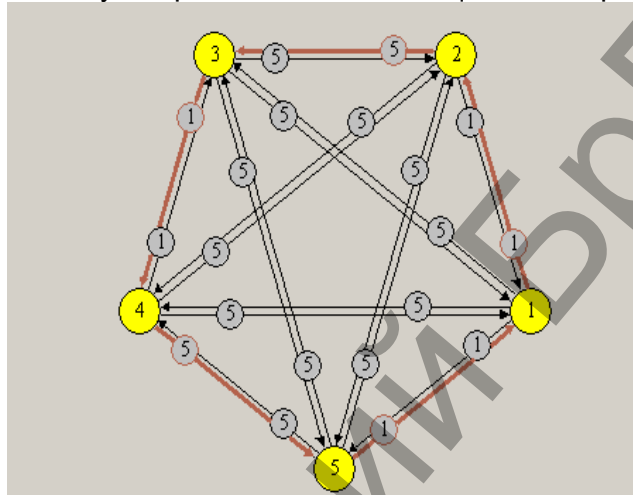


Рис.1. Граф для задачи о назначении

Идея «венгерского метода» была высказана венгерским математиком Эгервари и состоит в следующем. Достоинством венгерского метода является возможность оценивать близость результата каждой из итераций к оптимальному плану перевозок. Это позволяет контролировать процесс вычислений и прекратить его при достижении определенных точностных показателей. Данное свойство существенно для задач большой размерности.[1-3]

При составлении плана перевозок с помощью решения транспортной задачи линейного программирования большое значение имеет время, затраченное на её реализацию. Применение метода двойного предпочтения и метода потенциалов для решения транспортной задачи с 10-15 поставщиками и 15-20 потребителями требует 4-5 часов непрерывных вычислений. Это происходит потому, что существующие методы составления первоначально опорного плана позволяют получить план, далёкий от оптимального. Как показала практика, использование дельта-метода даёт возможность найти оптимальный план в 3-4 раза быстрее, причем, чем больше размеры таблицы, тем ощутимее разница во времени.[2-4]

Рассмотрим алгоритм рычага для решения задачи о назначении. Пусть дана матрица стоимостей работ.

Таблица 1. Матрица стоимостей

$C_{ij}$	1	2	3	4	5
1	5	3	7	2	1
2	4	2	1	8	7
3	1	1	4	1	4
4	7	7	5	8	4
5	4	2	4	6	1

Для построения начального базисного плана воспользуемся методом минимального элемента. Этот метод дает более близкое к оптимальному значению распределение значений, поэтому число итераций решения можно существенно сократить.

Расставим значения начального базисного плана по значениям стоимостей указанных в табл.1., используя метод минимального элемента.

Таблица 2. Начальный базисный план

X <sub>ij</sub>	1	2	3	4	5
1					1
2			2		
3		3			
4				5	
5	4				

Примечание: в табл.2 каждая заполненная клетка, содержащая число большее нуля, показывает порядок расстановки элементов по методу минимального элемента, но на самом деле необходимо подразумевать распределение одной работы, т.е. что

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если в таблице значение больше 0} \\ 0, & \text{если в таблице значение пусто} \end{cases}$$

После построения начального базисного плана видно, что в каждой строке и в каждом столбце будет находиться только лишь одна заполненная клетка.

Алгоритм рычага имеет следующий вид:

1. находим заполненную клетку с максимальным значением коэффициента стоимости  $c_{ij}$ , как правило, это последний поставленный элемент;
2. начинаем перемещать найденную заполненную клетку с координатами  $(i, j)$  вниз или вверх по столбцу  $j$  на строку, отличную от  $i$ , где значение коэффициента стоимости  $c_{ij}$  меньше, чем первоначальное;
3. соответственно значение заполненной клетки в строке  $i1$  со стоимостью  $c_{i1j}$  перемещаем на строку  $i$  с коэффициентом  $c_{ij1}$ , как показано в табл.3

Таблица 3.

X <sub>ij</sub>	1	2	3	4	5
1				5	●
2			2		↓
3		3		●	
4					1
5	4				

4. Пересчитываем значение целевой функции с учетом изменения базисного плана, если значение целевой функции уменьшилось, то переходим к следующему столбцу, иначе перемещаем на другую строку, пока не пройдем с текущим элементом  $(i, j)$  все строки в столбце  $j$ .

5. Решение задачи заканчивается, если нет лучших вариантов для перемещения, иначе переходим к п.2.

Легко заметить, что алгоритм можно выполнять не только сначала по столбцам, а потом по строкам, но и наоборот.

В общем случае при полном переборе всех возможных вариантов может быть  $(n!)^2$ .

**Доказательство.** Имеется  $n$  элементов плана, конкретный элемент может занять  $n^2$  возможных положений. Воспользуемся известным правилом комбинаторики – правилом произведения. Поэтому

$$\underbrace{n^2(n-1)^2(n-2)^2(n-3)^2 \dots 1}_{n \text{ множителей}} = (n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 1)(n(n-1)(n-2)(n-3) \dots 1) = (n!)^2. \quad (1)$$

Для оценки алгоритмов используем такие критерии: трудоемкость и объем памяти, характеристики которых представлены в табл.4.

Таблица 4 Сравнительный анализ алгоритмов решения задачи о назначении

Наименование алгоритма	Трудоёмкость	Память
Венгерский алгоритм	$\sim (n/2)^3$	$\sim n^2$
Дельта-метод	$\sim (n^2/4)$	$\sim n^2$
Метод потенциалов	$\sim (n^2 + 2n)$	$\sim n^2$
Алгоритм рычага	$\sim ((n^2 - n)/4)$	$\sim n^2$

При оценке алгоритмов по взаимоисключающим критериям очевидным является то, что проигрывая в одном, можно выиграть в другом и наоборот.

### Литература

1. Новиков Ф. А., Дискретная математика для программистов. - СПб.: Питер, 2000.–304 с.:ил.
2. Кристофидес Н., "Теория графов. Алгоритмический подход". - М.: Мир, 1978.
3. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. - М.: Мир, 1985.
4. Гэри М., Джонсон Д., "Вычислительные машины и труднорешаемые задачи" :пер. с англ. – М.:Мир, 1982. – 416 с; ил.

## НОВЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ РАСХОДОВ НА УСЛУГИ МОБИЛЬНОЙ СВЯЗИ

*Родич М. Б., БГЭУ, Минск*

На данный момент три оператора сотовой связи, работающие в стандартах GSM и cdma2000, предлагают в общей сложности 22 тарифных плана (ТП). Разобраться в том, какой из них (или их комбинация) самый выгодный, нелегко. Поэтому предпринимаются попытки помочь потребителю определиться с оптимальным для него тарифным планом. Однако всем им присущ анализ только частного случая: просчитываются расходы по каждому тарифному плану и выбирается тот, на котором расходы минимальны.

Впервые предлагается решение данной задачи в общем случае. Графическая модель дает представление об изменении оптимального плана при изменении исходных параметров. При этом самих исходных параметров вводить не нужно, так как модель наглядно отображает все возможные их комбинации. В качестве таких исходных параметров берутся: 1) ежемесячная сумма расходов; 2) доля разговоров внутри сети в общей длительности разговоров. В качестве дополнительных параметров учитывается соотношение между направлениями трафика – на фиксированную сеть и на других сотовых операторов, а также доля звонков на «Любимый номер» в общей длительности разговоров внутри сети. Количество дополнительных параметров в модели, в принципе, не ограничено.

Суть предлагаемого подхода заключается в том, чтобы найти такие сочетания исходных параметров, при которых абонент платит одинаковую сумму в месяц, будучи подключенным на любом из двух конкурирующих тарифных планов. Например, для ТП «Оптима+10» и «Джинс-Классик» эти точки находятся по следующим условиям:

$$\begin{cases} A_{+10} + T_{MTC}^{+10} \cdot MTC + T_{др}^{+10} \cdot Др = A_{Джс} + T_{MTC}^{Джс} \cdot MTC + T_{др}^{Джс} \cdot Др, \\ MTC = (MTC + Др) \cdot \% MTC / 100\%. \end{cases}$$

Откуда после равносильных преобразований находим:

$$\begin{cases} A_{+10} - A_{Джс} = MTC \cdot (T_{MTC}^{Джс} - T_{MTC}^{+10}) + Др \cdot (T_{др}^{Джс} - T_{др}^{+10}), \\ MTC = Др \cdot \frac{\% MTC}{100\% - \% MTC}. \end{cases}$$

Здесь:

- +10 – ТП «Оптима+10»; Дж – ТП «Джинс-Классик», А – абонентская плата;
- Т<sub>мтс</sub> – средневзвешенный тариф на исходящие внутрисетевые звонки;
- Т<sub>др</sub> – средневзвешенный тариф на исходящие звонки за пределы сети;
- МТС – количество исходящих минут внутри сети;
- Др – количество исходящих минут за пределы сети.

Данная простая система линейных уравнений с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений. Это множество можно представить в виде линии на графике. В экономике такие линии известны как кривые безразличия. Построив кривые безразличия для каждой пары конкурирующих тарифов данного оператора, мы получим карту оптимальности. Вся карта разделится на зоны, в каждой из которых оптимален только один тарифный план из предлагаемых оператором. Для каждого оператора (МТС, VELCOM и Dialog) составляется отдельная карта оптимальности (рис. 1 – рис. 3).

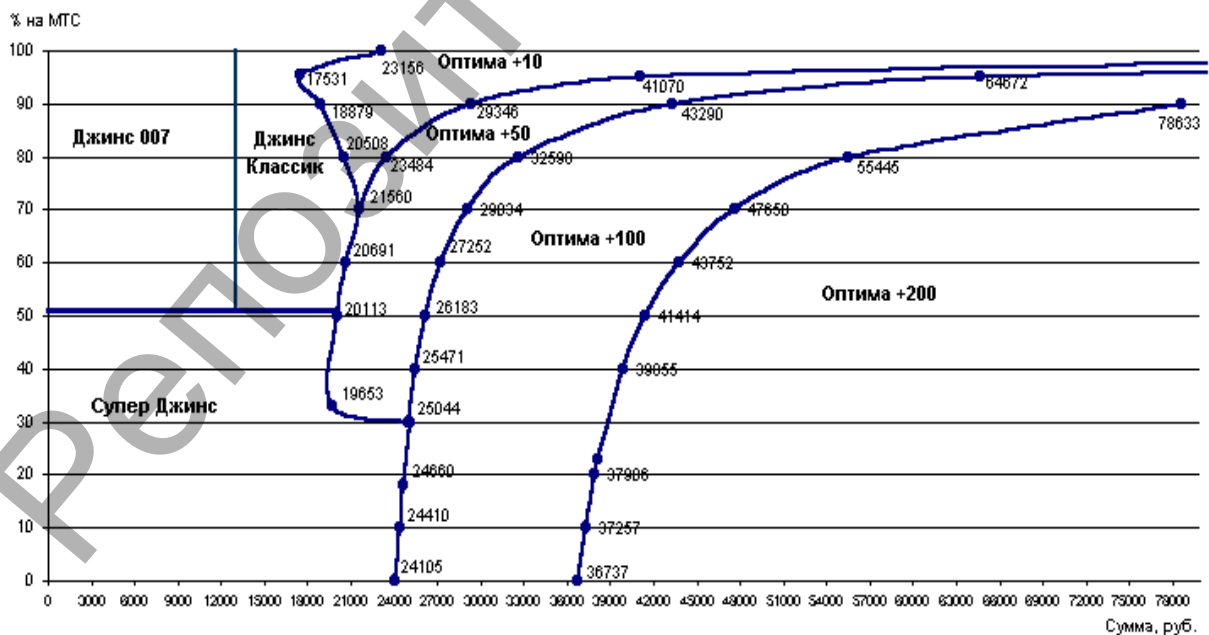


Рис. 1 Карта оптимальности тарифных планов МТС

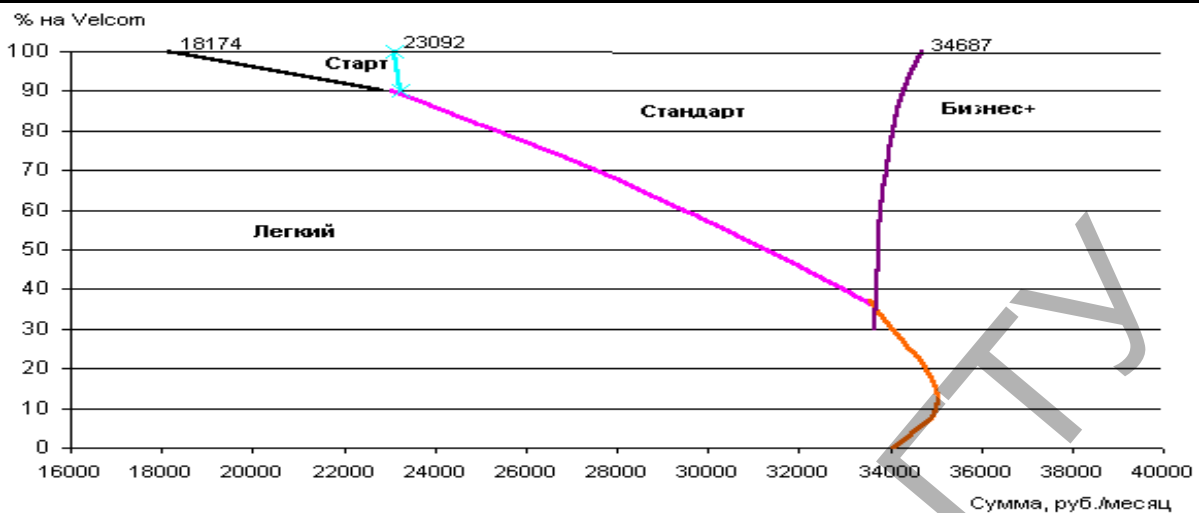


Рис.2 Карта оптимальности тарифных планов VELCOM

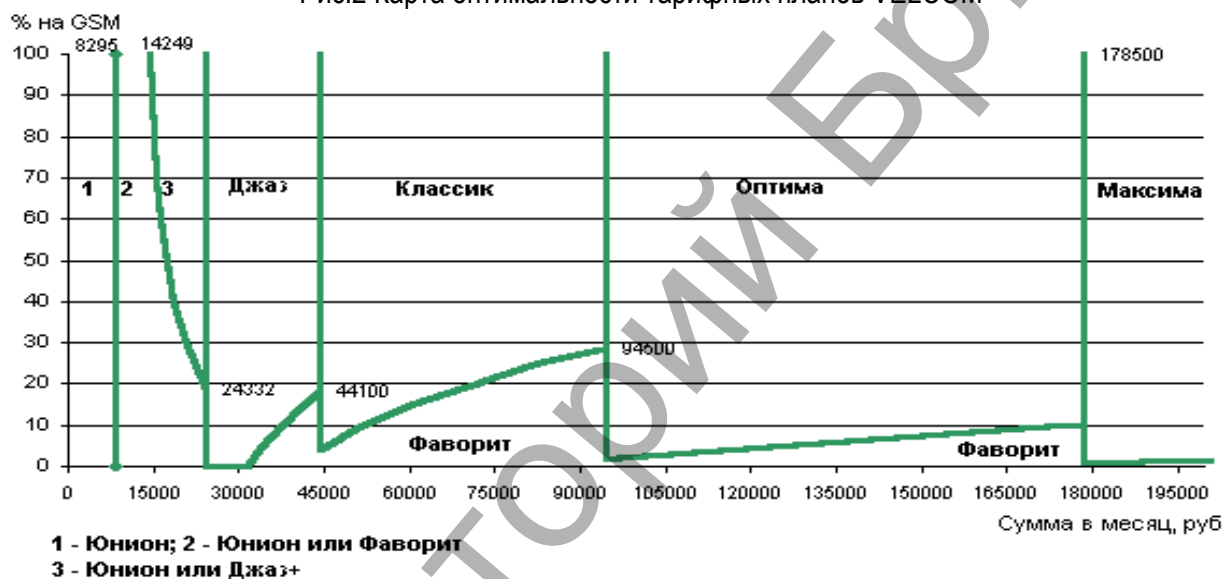


Рис.3 Карта оптимальности тарифных планов Dialog

Актуальной задачей является сравнение операторов GSM между собой. Точки на пограничной кривой (рис. 4) означают одинаковую стоимость услуг МТС и VELCOM. Данный график предусматривает, что объем звонков на фиксированную сеть равен 0, но модель позволяет учесть и это направление при условии, что количество минут для него будет указываться отдельно как константа.

Наконец, представляет интерес проблема оптимальности двойственного подключения, когда абонент одновременно обслуживается в двух сетях. Наиболее востребован случай для операторов МТС и VELCOM. Задача решается построением модели промежуточных выигрышей (проигрышей) в стоимости исходящего трафика на сеть каждого оператора. Сравнив промежуточные выигрыши получим итоговый выигрыш. Вывод заключается в том, что при трафике на VELCOM до 213 мин. выигрыш от подключения к сети VELCOM незначителен, отсутствует или даже наблюдается проигрыш. Так что двойственное подключение (МТС и VELCOM) имеет смысл только при трафике на VELCOM свыше 213 мин. в месяц.



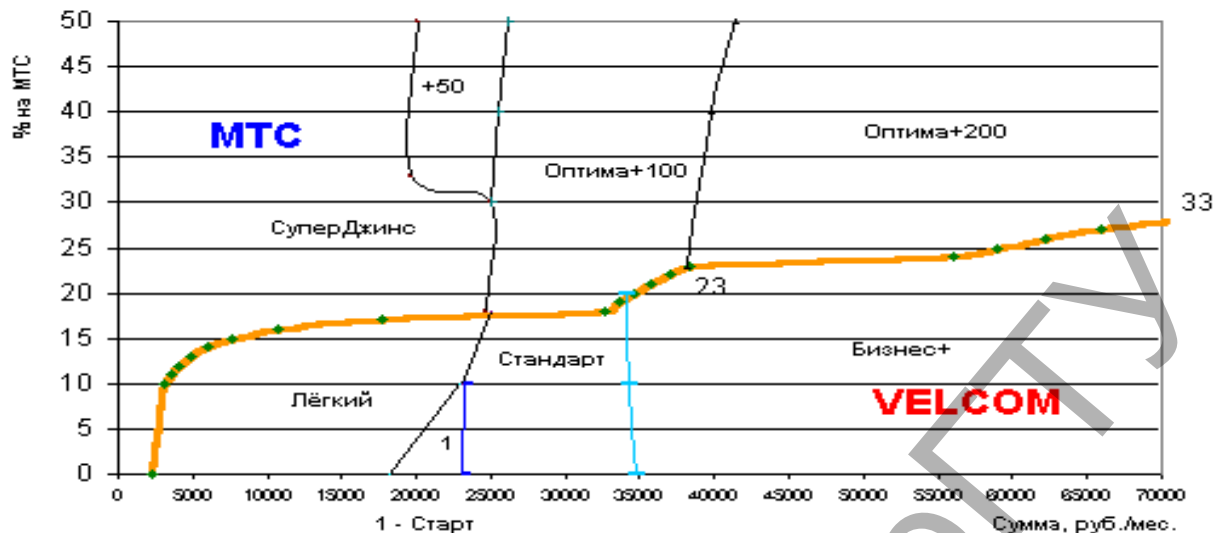


Рис. 4 Выбор между MTC и VELCOM

Несколько слов о недостатках модели. Учитывается распределение звонков по направлениям, но не учитываются различия в интервалах тарификации (частично компенсируется за счет различной продолжительности разговоров) и времени совершения звонков. Исправление этих недостатков потребует введения двух дополнительных исходных параметров: распределение количества исходящих звонков по длительности соединения (или средняя длительность исходящего соединения) и распределение длительности исходящих звонков по времени их совершения (рабочее время, нерабочее время, ночь).

Сегодня аналогов подобной модели не существует. Визуализация процесса оптимизации для общего случая выгодно отличает модель от имеющихся калькуляторов тарифов, не дающих наглядного представления о влиянии исходных параметров на результат оптимизации.

## К ВОПРОСУ ОБ АВТОМАТИЗАЦИИ РАСЧЕТОВ МАТЕРИАЛЬНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПОТОКОВ СИСТЕМ ПРОИЗВОДСТВА ШТУЧНЫХ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ В КУРСОВОМ И ДИПЛОМНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

*Сидоренко Ю.В., Самарский государственный архитектурно-строительный университет, Самара, Россия*

В системном плане строительно-технологическая производственная система (СТПС):

- может быть разделена на подсистемы, которые, в свою очередь, подразделяются на подсистемы более низкого уровня иерархии;
- взаимодействует с внешней средой через входные, выходные, управляющие параметры;
- имеет совокупность целевых функций (как для всей системы в целом, так и для отдельных ее подсистем).

Сложность изучения СТПС связана с многообразием параметров и сложностью их взаимодействия, работой отдельных агрегатов в различных режимах, наличием в системе обратных связей; материальные потоки в системе являются многокомпонентными и представляют собой сложные гетерогенные процессы, в которых происходят химические реакции, фазовые переходы и т.п. Кроме того, сказывается влияние возмущений,

как на входные параметры (например, изменение параметров сырья (массовый расход, концентрация, влажность, дисперсный состав) и энергоносителей (давление и температура пара, напряжение и частота тока и т.д.)), так и внутренние (отказ оборудования от эксплуатации и др.). Функционирование подобных СТПС осуществляется в узком диапазоне изменения ряда технологических параметров по химическому составу, влажности, температуре, соотношению компонентов.

В условиях рыночной экономики переход от планирования изготовления партии изделий к их производству под определенный заказ требует гибкости производства, быстрой переналадки под разнообразный ассортимент продукции, что еще больше усложняет структуру СТПС.

В структурном плане в СТПС можно выделить:

- основное производство, которому соответствуют материальные и энергетические потоки по выпуску продукции строительного назначения;
- вспомогательное производство (т.е. инженерные сети), которому соответствуют материальные и энергетические потоки, способствующие решению основной задачи (например, гидравлические, тепловые и др. схемы). Потокораспределение описывается совокупностью нелинейных алгебраических уравнений на основе первого и второго законов Кирхгоффа и реализуется итерационными методами;
- металлообрабатывающее производство, где движение полуфабрикатов по операциям осуществляется в соответствии с маршрутными технологиями на основе комплекточных ведомостей, удельных расходов сырья, материалов, комплектующих, энергоносителей, трудовых ресурсов, оборудования. Описание подобных процессов возможно с помощью внутриводского оперативного планирования в виде таблиц и циклограмм, матричных методов, методов сетевого планирования и управления (СПУ) и имитационных моделей. Информационная поддержка осуществляется пакетами TimeLine, Microsoft Projekt и др.

Материальным и энергетическим потокам СТПС соответствуют информационные потоки. В соответствии с регламентированностью стадий разработки первоначальный синтез схемы СТПС производится на стадии эскизного проектирования в следующем порядке:

- выбор схемы производства, режима работы предприятия;
- подбор состава смеси (на  $1\text{ м}^3$ ) и его экспериментальная проверка;
- расчет потребности предприятия в сырьевых ресурсах для выполнения программы выпуска (с учетом потерь на технологических переделах);
- выбор основного технологического оборудования и его количества, руководствуясь каталогами оборудования, соображениями надежности; технико-экономическая проработка альтернативных вариантов;
- формирование структурной схемы технологического процесса;
- расчет потребных энергетических ресурсов (электроэнергия, пар, сжатый воздух и т.д.)

Создание СТПС осуществляется последовательно, на основе анализа и синтеза. Проверочный расчет предполагает выполнение материальных и энергетических расчетов на основе балансовых уравнений, основываясь на определенной схеме и конструктивных параметрах. Если в проектировочном расчете осуществляется выбор одного из решений из множества допустимых, то при проверочном расчете система уравнений замкнута, получается одно решение. Вышеприведенные расчеты выполняются в предположении, что СТПС работает в квазинепрерывном режиме. В действительности СТПС функционирует в дискретно-непрерывном режиме. Так, например, гасильный реактор, прессовое оборудование работают в непрерывном режиме, а автоклав - в периодическом.

Расчет материальных и энергетических потоков для стационарного режима является ключевым элементом в проектировании предприятий по выпуску штучных строительных изделий и производится после синтеза технологической схемы. Особенностью синтеза СТПС является тот факт, что большинство операторов в схеме действуют в периодическом режиме, причем один из блоков является лимитирующим. Увязка работы всех блоков, т.е. их работа в квазинепрерывном режиме, производится за счет введения в схему промежуточных бункеров, параллельных ветвей и т.д. Особенностью схемы также является наличие замкнутых обратных контуров, введение которых обычно связано с повышением КПД системы и экологической безопасности проекта (однако подобные контуры приводят к возникновению замкнутых подсистем алгебраических уравнений, которые приходится решать итерационными способами).

При проектировании СТПС студенты часто испытывают затруднения в разработке алгоритма расчета. Причинами здесь могут быть:

- неправильная постановка задачи для установления подмножества свободных, расчетных, регламентированных параметров, в результате этого получается несовместимая система уравнений;
- наличие в схеме расчета замкнутых подсистем, для решения которых необходимо применение численных методов;
- неправильный выбор для расчета типов материальных балансовых соотношений.

Каждый вид СТПС требует задания подмножества ограничений на материальные и энергетические потоки и, следовательно, своего индивидуального расчета. Автоматизация расчета материально-энергетических потоков является важным компонентом проектирования, однако при этом необходимо не только формализовать схему, но и предложить типовые подходы к ее реализации. Так, в основе математического описания подобных систем используются матрично-топологические методы. Матричные методы расчета предлагают лишь "работоспособное" решение, но не оптимальное. Однако они имеют и ряд преимуществ:

- такие модели позволяют, формализуя процесс расчета материальных и тепловых потоков, внедрить средства автоматизации вычислений;
- позволяют быстро проанализировать систему при различных граничных условиях и получить ответ на вопрос: "А что, если..."; особенно это важно для производств с изменяющейся загрузкой;
- возможно построить систему ежедневного контроля и корректировки технологических потоков, учета продукции, сырьевых и др. потерь;
- являются необходимым элементом к формированию оптимизационных моделей;
- в совокупности с информационными и финансовыми потоками позволяют разработать модель управления СТПС.

В промышленности для расчета технологических потоков используются такие пакеты, как Trace Mode, Sigmafile, DATACON, Production Balance и др. Однако их адаптация для решения задач в области строительных технологий и связанные с этим большие временные затраты, значительная стоимость затрудняют широкое внедрение этих пакетов в разделы курсового и дипломного проектирования для студентов строительных вузов. Наш опыт показывает, что в учебном процессе для этих целей могут быть использованы общие пакеты типа электронной таблицы Microsoft Excel и математического пакета MathCAD, тем более, что эти пакеты студенты осваивают при изучении курса компьютерных и информационных технологий.

## ЦИФРОВОЙ АДАПТИВНЫЙ ФАЗОВЫЙ КОРРЕКТОР ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Скороспешкин М.В., Томский политехнический университет, Томск, Россия

В настоящее время реализация систем автоматического регулирования в большинстве случаев осуществляется на базе промышленных микропроцессорных контроллеров, что, несомненно, позволяет осуществлять регулирование не только по П, ПИ, ПИД-законам, но и по более сложным в том числе и адаптивным. Адаптивные системы управления, построенные на базе П, ПИ, ПИД-регуляторов [1,2], обеспечивают устойчивую работу систем регулирования и заданное качество в условиях нестационарности, в определенных пределах изменения свойств объекта управления.

В настоящей работе предлагается реализация адаптивной системы на базе цифрового ПИД-регулятора и последовательного фазового корректора динамических характеристик. Используемый корректор представляет собой псевдолинейное корректирующее устройство, осуществляющее изменение фазового сдвига канала формирования управляющего воздействия при возникновении колебаний.

Структура системы автоматического регулирования с цифровым адаптивным корректором представлена на рисунке 1.

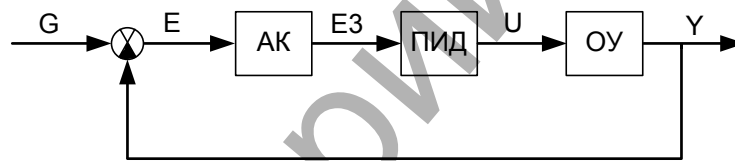


Рисунок 1. - Структурная схема системы автоматического регулирования с адаптивным корректором

На рисунке 1 использованы следующие обозначения: АК-цифровой адаптивный корректор, ПИД-пропорционально-интегро-дифференциальный регулятор, ОУ-объект управления.

На рисунке 2 представлена структурная схема адаптивного корректора.

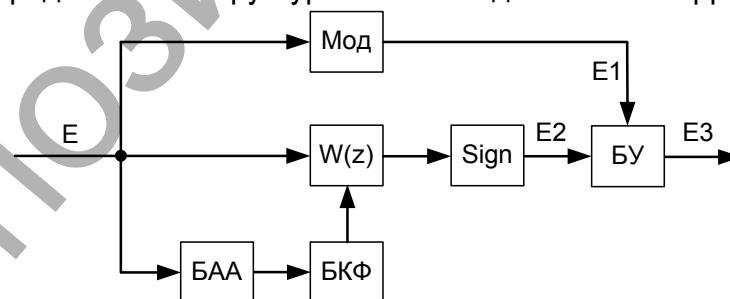


Рисунок 2. - Структурная схема адаптивного корректора

На рисунке 2 использованы следующие обозначения: Sign - блок определения знака,  $W(z)$ -дискретная передаточная функция динамического звена, Мод-блок выделения модуля, БУ-блок умножения, БАА-блок анализа амплитуды ошибки САР, БКФ-блок коррекции фазы.

Адаптивный корректор выполнен на базе интегро-дифференцирующего звена с дискретной передаточной функцией:

$$W(z) = \frac{a+b \cdot z^{-1}}{d+c \cdot z^{-1}}, \quad (1)$$

где  $a$  - параметр настройки корректора,  $b, c, d$  – коэффициенты, определяемые постоянной времени интегрирования и тактом управления по формулам:

$$b = 1 + \frac{1-a}{1+a}, \quad c = 1 + \frac{1-d}{1+d}, \quad d = \frac{2 \cdot T_2}{T_0}, \quad (2)$$

где  $T_0$  - Такт управления.

Дискретная передаточная функция (1) соответствует интегро-дифференцирующему звену первого порядка, передаточная функция которого в непрерывном варианте имеет вид:

$$W(p) = \frac{T_1 \cdot p + 1}{T_2 \cdot p + 1}. \quad (3)$$

Параметр настройки определяется по формуле:

$$a = \frac{2 \cdot T_1}{T_2}. \quad (4)$$

Данный корректор осуществляет фазовый сдвиг, величина которого зависит от значения постоянной времени  $T_1$ . Входной сигнал, разветвляясь проходит по трем каналам. По верхнему каналу проходит абсолютное значение ошибки, средний канал состоит из интегро-дифференцирующего звена, блока определения знака (блока сигнатуры), и блока выделения модуля. Нижний канал обеспечивает подстройку постоянной времени дифференцирования в интегро-дифференцирующем звене. Сигнал на выходе корректора равен произведению выходных сигналов верхнего и среднего каналов.

При возникновении в САР колебаний регулируемой величины, а следовательно и ошибки, автоматически в корректоре происходит увеличение постоянной времени дифференцирования. Другими словами, происходит подавление колебаний регулируемой величины путем изменения фазы.

На рисунке 3 представлены кривые, характеризующие реакцию САР объектом второго порядка на ступенчатое задающее воздействие. Передаточная функция объекта управления имеет вид:

$$W(p) = \frac{10}{10 \cdot p^2 + 2.5 \cdot p + 10}. \quad (5)$$

Данные кривые соответствуют следующим настройкам ПИД-регулятора:

$K_p = 5$ ,  $T_i = 0,1$  с.,  $T_d = 0,01$  с., верхняя кривая соответствует САР с ПИД-регулятором, а нижняя – САР с ПИД-регулятором и описанным выше корректором с подстройкой постоянной времени дифференцирования.

Результаты исследования САР с фазовым корректором, проведенные в среде MATLAB показали, что существенное улучшение качества переходных процессов в САР нестационарными объектами возможно путем изменения фазы, в зависимости от амплитуды колебаний ошибки.

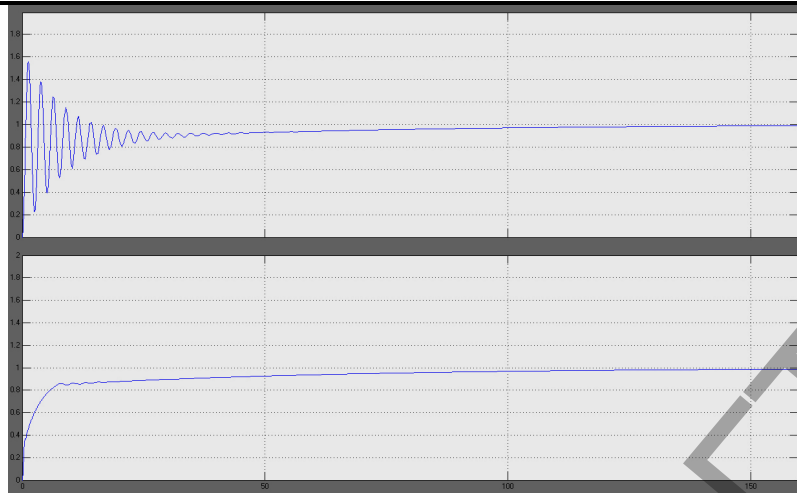


Рисунок 3. - Реакция САР на ступенчатое задающее воздействие

Такие системы целесообразно применять как при регулировании параметров нестационарных объектов, так и при регулировании параметров объектов, на которые поступают возмущения, приводящие к возникновению в САР колебаний регулируемой величины с амплитудой, превышающей допустимую.

### Литература

1. Шубладзе А. М. Адаптивные автоматически настраиваемые ПИД-регуляторы / А.М.Шубладзе, С.В.Гуляев, А.А.Шубладзе // Промышленные АСУ и контроллеры. - М. - 2003. - № 6. - С. 35-39.
2. Штейнберг Ш. Е. Адаптация стандартных регуляторов к условиям эксплуатации в промышленных системах регулирования / Ш. Е. Штейнберг, И. Е. Залуцкий // Промышленные АСУ и контроллеры. - М. - 2003. - № 4.
3. Ерофеев А.А. Интеллектуальные системы управления. - СПб, из-во СПб ГТУ, 1999. 312 с.

## УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ БИГРАММ ВЫХОДНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ОДНОГО КЛАССА АВТОМАТОВ МУРА

Храмова Е.В., БГУ, Минск

Рассмотрим класс автоматов Мура, определяемый каноническими уравнениями:  $S(t+1) = \varphi(S(t), x_{t+n})$ ,  $y(t) = f(S(t))$ ,  $t = 0, 1, 2, \dots$ , где  $S(t) = (S_0(t), S_1(t), \dots, S_{n-1}(t))$  — состояние автомата,  $x_{t+n}$  — элемент входной последовательности автомата,  $\varphi: \{0,1\}^n \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}^n$  — функция переходов,  $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$  — функция выходов,  $y(t)$  — элемент выходной последовательности автомата.

Функция переходов состояний  $\varphi(S(t), x_{t+n})$ ,  $t \geq 0$ , имеет вид:

$$S(t+1) = (S_0(t+1), \dots, S_{n-1}(t+1)) = \varphi(S(t), x_{t+n}) = (S_1(t), \dots, S_{n-1}(t), x_{t+n}), \text{ где } S(0) = (x_0, \dots, x_{n-1}).$$

Функция выходов  $f(S(t))$ ,  $t \geq 0$ , имеет вид:

$$y(t) = f(S(t)) = f(S_0(t), \dots, S_{n-1}(t)) = f(x_t, \dots, x_{t+n-1}).$$

В работах [1] и [2] в предположении, что входы  $x_t$  — независимые случайные величины с распределением вероятностей  $P\{x_t = 1\} = p$ ,  $P\{x_t = 0\} = 1 - p$ ,  $t \geq 0$ , а выходы  $y(t)$  имеют распределение  $p_y^t = P\{y(t) = f(x(t)) = y\}$ ,  $y \in \{0,1\}$ , были рассмотрены

задачи нахождения условных вероятностей  $p'_y(k) = P\{y(t) = f(x(t)) = y \mid \omega(x(t)) = k\}$ ,  $p_{y^0, y^1}^{t, t+1}(k) = P\{(y(t), y(t+1)) = (y^0, y^1) \mid \omega(x'(t)) = k\}$ , где  $\omega(x(t))$ ,  $\omega(x'(t))$  — число единиц в векторах  $x(t) = (x_t, \dots, x_{t+n-1})$  и  $x'(t) = (x_t, \dots, x_{t+n})$ , соответственно.

Отметим, что данные задачи были решены для вектора  $x(t)$  произвольной длины.

В данной статье найдены условные распределения биграмм выходной последовательности рассматриваемого автомата в предположении, что входы  $x_t$ ,  $t \geq 0$ , независимые в совокупности случайные величины со следующими распределениями вероятностей:  $P\{x_t = 1\} = p_t$ ,  $P\{x_t = 0\} = 1 - p_t$ ,  $0 < p_t < 1$ .

Полученные соотношения для условных распределений биграмм имеют экспоненциальную вычислительную сложность относительно длины  $n$  вектора  $x(t)$  и применимы на практике для небольших значений  $n$ .

Найдем значения условных вероятностей  $p_{y^0, y^1}^{t, t+1}(k)$ :

$$p_{y^0, y^1}^{t, t+1}(k) = P\{(y(t), y(t+1)) = (y^0, y^1) \mid \omega(x'(t)) = k\}, \quad (1)$$

$$x'(t) = (x_t, \dots, x_{t+n}), \quad y(t+j) = f(x_{t+j}, \dots, x_{t+n+j-1}), \quad j = \overline{0, 1}.$$

Вычислим сначала значения вспомогательных условных вероятностей  $p_{1,1}^{t, t+1}(k)$ ,  $p_1^t(k)$ ,  $p_1^{t+1}(k)$ .

Пусть функция  $f(x)$  задана таблично, т.е. для  $\forall x(t) = (x_t, \dots, x_{t+n-1})$   $f(x_t, \dots, x_{t+n-1}) = s_{2^{n-1}x_t + 2^{n-2}x_{t+1} + \dots + 2^0x_{t+n-1}} = s_{\sum_{j=0}^{n-1} 2^{n-j-1}x_{t+j}}$ ,  $s_l \in \{0, 1\}$ ,  $l = \overline{0, 2^n - 1}$ .

Тогда условная вероятность  $p_{1,1}^{t, t+1}(k)$  имеет вид:

$$p_{1,1}^{t, t+1}(k) = P\{f(x_t, \dots, x_{t+n-1})f(x_{t+1}, \dots, x_{t+n}) = 1 \mid \omega(x'(t)) = k\} =$$

$$= \frac{\sum_{\substack{i_t, \dots, i_{t+n} \in \{0,1\} \\ \sum_{j=t}^{t+n} i_j = k}} \left( s_{\sum_{l=0}^{n-1} 2^{n-l-1}x_{t+l}} s_{\sum_{l=0}^{n-1} 2^{n-l-1}x_{t+l+1}} \prod_{l=t}^{t+n} p_l(i_l) \right)}{\sum_{\substack{i_t, \dots, i_{t+n} \in \{0,1\} \\ \sum_{j=t}^{t+n} i_j = k}} \prod_{l=t}^{t+n} p_l(i_l)} \quad (2)$$

Формулы для условных вероятностей  $p_1^t(k)$ ,  $p_1^{t+1}(k)$  можно получить из формулы (2),

заменяя произведение  $\sum_{l=0}^{n-1} 2^{n-l-1}x_{t+l} \sum_{l=0}^{n-1} 2^{n-l-1}x_{t+l+1}$  на  $\sum_{l=0}^{n-1} 2^{n-l-1}x_{t+l}$  и  $\sum_{l=0}^{n-1} 2^{n-l-1}x_{t+l+1}$ , соответственно.

Чтобы найти значения условных вероятностей  $p_{y^0, y^1}^{t, t+1}(k)$ , при условии, что  $(y^0, y^1) \neq (1, 1)$ , воспользуемся следующими равенствами:

$$p_1^{t+1}(k) = p_{0,1}^{t, t+1}(k) + p_{1,1}^{t, t+1}(k).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

**Теорема.** Пусть входная последовательность  $\{x_t\}$  удовлетворяет условиям 1), 2), тогда условные вероятности биграмм  $p_{y^0, y^1}^{t, t+1}(k)$  (1) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_{1,0}^{t, t+1}(k) &= p_1^t(k) - p_{1,1}^{t, t+1}(k), & p_{0,1}^{t, t+1}(k) &= p_1^{t+1}(k) - p_{1,1}^{t, t+1}(k), \\ p_{0,0}^{t, t+1}(k) &= 1 - p_1^t(k) - p_1^{t+1}(k) + p_{1,1}^{t, t+1}(k), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p_{1,1}^{t, t+1}(k)$ ,  $p_1^t(k)$ ,  $p_1^{t+1}(k)$  определяются с помощью формулы (2).

В случае, когда  $p_t = p$ ,  $t \geq 1$ , из (3) следуют результаты, полученные в работе [2].

### Литература

1. Севастьянов Б.А. Условное распределение выхода автоматов без памяти при заданных характеристиках входа // Дискрет. матем., 1994, т.6, в.1, с.34-39.
2. Севастьянов Б.А. Исследование вероятностной зависимости выхода автомата от некоторых характеристик входа // В сб.: Труды по дискретной математике, 2002, т.5, с.219-226.

## РАЗРЕЗАНИЕ ГРАФА ФОРМИРОВАНИЕМ ЛОКАЛЬНЫХ МАКСИМУМОВ

*Шандриков А.С., Витебский государственный политехнический техникум, Витебск*

На этапе конструкторского проектирования радиоэлектронных средств (РЭС) решаются вопросы, связанные с компоновкой элементов логической схемы в модули, модулей в ячейки, ячеек в панели и т. д. Эти задачи в общем случае тесно связаны между собой, и их правильное решение позволяет значительно сократить трудоемкость данного этапа в системах автоматизированного проектирования (САПР).

Компоновка принципиальной электрической схемы РЭС на конструктивно законченные части представляет собой распределение элементов низшего конструктивного уровня в высший в соответствии с выбранным критерием. Основным для компоновки является критерий электромагнитотепловой совместимости элементов низшего уровня, что накладывает определённые технологические ограничения на процесс компоновки [1]. На обозначенную таким образом область допустимых разбиений схемы формулируются другие критерии, основным из которых является минимум соединений между устройствами, так как внешние соединения между частями схем являются одним из важнейших факторов, определяющих надёжность РЭС. Выполнение этого критерия обеспечивает минимизацию взаимных наводок, упрощение конструкции, повышение надёжности и т. д.

Для построения формальной математической модели с целью решения задач компоновки используют граф вида  $G = (X, U)$ . Множество вершин  $X$  графа  $G$  интерпретирует радиоэлектронные компоненты (РЭК), а множество рёбер  $U$  – связи между ними в соответствии с принципиальной электрической схемой. Это позволяет свести процесс компоновки к разрезанию графа  $G$  на требуемое количество кусков с заданным количеством вершин в каждом из них.

Известные алгоритмы разрезания графов можно условно разбить на пять групп [2]:

- 1) алгоритмы, использующие методы целочисленного программирования;
- 2) последовательные алгоритмы;
- 3) итерационные алгоритмы;
- 4) смешанные алгоритмы.



Алгоритмы первой группы позволяют получить точное решение задачи, однако для современных ЭВМ реальной сложности фактически не могут быть реализованы на ЭВМ. В последнее время наибольшее распространение получили приближенные алгоритмы компоновки – последовательные, итерационные, смешанные, позволяющие получить приемлемые с практической точки зрения результаты. Среди них наименьшей трудоёмкостью и минимальными затратами характеризуются последовательные алгоритмы. Основным недостатком последовательных алгоритмов является неспособность находить глобальный минимум количества внешних связей (за исключением алгоритма [3]). Объясняется это тем, что для автоматизации компоновки граф представляют матрицей смежности и формирование кусков осуществляется жёстко в заданном порядке. Из-за этого результат разрезания графа находится в прямой зависимости от начального чередования строк и столбцов матрицы смежности, выбора начальной вершины формируемого куска и выбора последующих вершин с равными оценочными характеристиками и др.

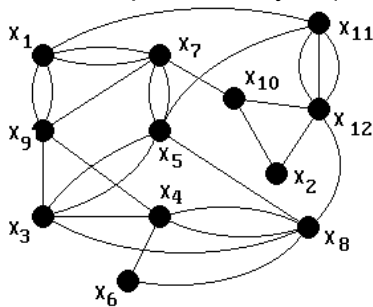


Рис. 1

В данной работе рассматривается последовательный метод разрезания графа, основанный на формировании локальных максимумов. Практическую реализацию данного метода рассмотрим на примере. На рис. 1 представлен граф  $G = (X, U)$ , который требуется разрезать на три куска  $G_1, G_2$  и  $G_3$ , содержащих 3, 4 и 5 вершин соответственно.

Решение данной задачи осуществляется в следующей последовательности.

1. Построить матрицу смежности и определить локальную степень каждой вершины. Значения локальных степеней вершин графа приведены в дополнительном столбце  $\rho(x_i)$  матрицы смежности

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 & X_7 & X_8 & X_9 & X_{10} & X_{11} & X_{12} \end{matrix} & \begin{matrix} \rho(x_i) \end{matrix} \\ \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \\ X_8 \\ X_9 \\ X_{10} \\ X_{11} \\ X_{12} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} 5 \\ 2 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 2 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{matrix} \quad (1)$$

2. Выбрать вершину  $x_i$  с максимальной локальной степенью и построить множество  $\Gamma_{x_i}$ , содержащее вершину  $x_i$  и все смежные ей вершины. Если вершин, удовлетворяющих указанному критерию несколько, то множества  $\Gamma_{x_i}, \Gamma_{x_j}, \dots, \Gamma_{x_k}$  строятся для каждой из них. В матрице смежности (1) максимальное значение  $\rho(x_i) = 6$  имеют вершины  $x_5, x_7, x_8$ , и  $x_{12}$ .

3. Построить множества  $\Gamma_{x_5}$ ,  $\Gamma_{x_7}$ ,  $\Gamma_{x_8}$ , и  $\Gamma_{x_{12}}$ :

$$\Gamma_{x_5} = \{x_5, x_3, x_7, x_8, x_{11}\}; \Gamma_{x_7} = \{x_7, x_1, x_5, x_9, x_{10}\}; \Gamma_{x_8} = \{x_8, x_3, x_4, x_5, x_6, x_{12}\};$$

$$\Gamma_{x_{12}} = \{x_{12}, x_2, x_8, x_{10}, x_{11}\}.$$

4. Определить мощность каждого полученного множества и проверить условие  $|\Gamma_{x_i}| = n_k$ , где  $n_k$  – количество вершин, заданное для одного из формируемых кусков. Данному условию соответствуют множества  $\Gamma_{x_5}$ ,  $\Gamma_{x_7}$  и  $\Gamma_{x_{12}}$ , содержащие по пять вершин, что соответствует количеству, заданному для куска  $G_3$ . Для выявления локального максимума в кусок  $G_3$  следует назначить множество с максимальным количеством внутренних связей. Этому условию удовлетворяет множество  $\Gamma_{x_7}$  и, следовательно, кусок  $G_3 = (X_3, U_3)$  считается сформированным:  $X_3 = \{x_1, x_5, x_7, x_9, x_{10}\}$ .

5. Удалить из матрицы смежности (1) строки и столбцы, соответствующие вершинам, вошедшим в сформированный кусок  $G_3$ . Получим:

$R_1 =$		$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_6$	$x_8$	$x_{11}$	$x_{12}$	$\rho(x_i)$	
	$x_2$	0	0	0	0	0	0	1	1	
	$x_3$	0	0	1	0	1	0	0	2	
	$x_4$	0	1	0	1	2	0	0	4	
	$x_6$	0	0	1	0	1	0	0	2	(2)
	$x_8$	0	1	2	1	0	0	1	5	
	$x_{11}$	0	0	0	0	0	0	3	3	
	$x_{12}$	1	0	0	0	1	3	0	5	

6. Две вершины –  $x_8$  и  $x_{12}$  – имеют максимальную локальную степень. Построить множества  $\Gamma_{x_8}$  и  $\Gamma_{x_{12}}$ :

$$\Gamma_{x_8} = \{x_8, x_3, x_4, x_6, x_{12}\}; \quad \Gamma_{x_{12}} = \{x_{12}, x_2, x_8, x_{11}\}.$$

7. Множества  $\Gamma_{x_8}$  и  $\Gamma_{x_{12}}$  оказались пересекающимися:  $S = \Gamma_{x_8} \cap \Gamma_{x_{12}} = \{x_8, x_{12}\}$ . В сложившейся ситуации применительно к рассматриваемому примеру следует из множества  $\Gamma_{x_8}$  удалить вершину  $x_8$ , а из множества  $\Gamma_{x_{12}}$  – вершину  $x_{12}$ , либо наоборот, из множества  $\Gamma_{x_8}$  удалить вершину  $x_{12}$ , а из множества  $\Gamma_{x_{12}}$  – вершину  $x_8$ . При удалении из множества  $\Gamma_{x_8}$  вершины  $x_8$  количество внутренних связей будет равно 1, а при удалении вершины  $x_{12}$  – 5. При удалении из множества  $\Gamma_{x_{12}}$  вершины  $x_8$  количество внутренних связей будет равно 4, а при удалении вершины  $x_{12}$  – 1. Проведённый анализ показал, что для формирования локальных максимумов необходимо удалить из множества  $\Gamma_{x_{12}}$  вершину  $x_8$ . В результате получим:

$X_2 = \{x_3, x_4, x_6, x_8\}$ ,  $X_3 = \{x_2, x_{11}, x_{12}\}$ . Графическая иллюстрация полученного разрезания представлена на рис. 2.

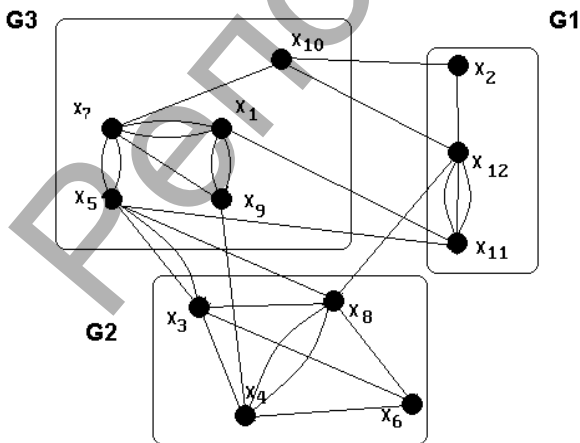


Рис. 2

Количество внешних связей равно 9. Для сравнения: при разрезании данного графа традиционным последовательным методом количество внешних связей составило 13.

Формирование локальных максимумов в сочетании с промежуточными анализами хорошо поддается алгоритмизации, что обеспечивает автоматизацию процесса компоновки РЭС за счёт использования электронно-вычислительных средств.

### Литература

1. Методы разбиения схем РЭА на конструктивно законченные части/К.К. Морозов, А.Н. Мелихов, Л.С. Бернштейн и др.; Под ред. К.К. Морозова. – М.: Сов. радио, 1978. С. 30-40.
2. Мелихов А.Н., Бернштейн Л.С., Курейчик В.М. Применение графов для проектирования дискретных устройств. – М.: Наука, 1974. – С. 60-65.
3. Шандриков А.С. Последовательный алгоритм разрезания графа с оптимизацией результата//Современные проблемы математики и вычислительной техники: материалы III республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, 26-28 ноября 2003. – Брест: УО «БГТУ». – 2003. С. 283-286.

## СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ МTD-МОДЕЛИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Ярмола А.Н., БГУ, Минск

**1. Введение.** В математической статистике часто приходится иметь дело с дискретными данными, поэтому актуальной является проблема разработки и исследования вероятностных моделей, которые позволяют адекватно описывать дискретные наблюдения, в частности, моделей дискретных временных рядов (ДВР). Модели дискретных временных рядов используются в генетике [1], экономике [2], защите информации [3] и других приложениях. Одной из удобных моделей является модель цепи Маркова с дискретным временем. Однако, поскольку число параметров цепи Маркова с ростом ее порядка растет экспоненциально, то использование на практике цепей Маркова высокого порядка становится малоэффективным. Для преодоления этого недостатка был разработан и исследован ряд “малопараметрических” моделей дискретных временных рядов с “длинной памятью” [4-8]. Большинство работ, в которых рассматриваются “малопараметрические” модели ДВР, посвящены в основном практическому применению этих моделей. В данном докладе для одной из таких широко применяемых моделей – МTD-модели [2,4,8] – исследуются вероятностные свойства, а также предлагается метод статистического оценивания параметров.

**2. Вероятностные свойства МTD-модели.** Пусть  $\{x_t \in A: t \in \mathbf{N}\}$  – однородная цепь Маркова (ОЦМ)  $s$ -ого порядка,  $1 \leq s < +\infty$ , с пространством состояний  $A = \{0, \dots, N-1\}$ . Предложенная А. Рафтери [4] МTD-модель, задает специальный вид матрицы вероятностей переходов  $P$ :

$$P = P(\lambda, Q), \quad p_{i_0, \dots, i_s} = \sum_{j=0}^{s-1} \lambda_j q_{i_j i_s}, \quad (1)$$

где  $i_0, \dots, i_s \in A$ ,  $Q = (q_{ik})$  – некоторая стохастическая  $(N \times N)$ -матрица;  $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_{s-1})$  – некоторый  $s$ -вектор вероятностей,  $\lambda_0 > 0$ ,  $\lambda_j \geq 0$ ,  $j = 1, \dots, s-1$ ,  $\lambda_0 + \dots + \lambda_{s-1} = 1$ . Важным обобщением МTD-модели является МTD $g$ -модель, в которой для каждого из  $s$  прошлых моментов времени используется “своя” матрица вероятностей переходов [8]:

$$p_{i_0, \dots, i_s} = \sum_{j=0}^{s-1} \lambda_j q_{i_j i_s}^{(j)}, \quad (2)$$

где  $Q^{(j)} = (q_{ik}^{(j)})$  – стохастическая  $(N \times N)$ -матрица, соответствующая лагу  $j$ .

Лемма 1. Если  $(N \times N)$ -матрица  $Q^{(0)}$  – эргодическая, то ОЦМ MTDg-модели эргодическая.

Теорема 1. Если  $\{x_t\}$  – временной ряд, соответствующий MTDg-модели, то его одномерные распределения  $\{\pi^{(t)}\}$  связаны линейным соотношением:

$$\pi^{(t)} = \sum_{j=0}^{s-1} \lambda_j (Q^{(j)})' \pi^{(t-s+j)}, \quad t \geq s. \quad (3)$$

Теорема 2. В условиях Леммы 1  $s$ -мерное стационарное распределение  $\Pi^*$  имеет вид:

$$\pi_{i_1, \dots, i_s}^* = \prod_{l=0}^{s-1} \left( \pi_{i_{s-l}}^* + \sum_{j=l+1}^{s-1} \lambda_j \left( q_{i_j i_{s-l}}^{(j)} - \sum_{r=0}^{N-1} q_{r i_{s-l}}^{(j)} \pi_r^* \right) \right). \quad (4)$$

В дальнейшем для оценивания параметров нам понадобится следующее утверждение.

Следствие 1. В условиях Леммы 1 для стационарных двумерных маргинальных распределений  $\Pi^*(m) = (\pi_{ki}^*(m))$  векторов  $(x_{t-m}, x_t)'$ ,  $1 \leq m \leq s$ , справедливо соотношение:

$$\pi_{ki}^*(m) = \pi_k^* \pi_i^* + \pi_k^* \lambda_{s-m} \left( q_{ki}^{(s-m)} - \sum_{r=0}^{N-1} q_{ri}^{(s-m)} \pi_r^* \right), \quad k, i \in A; \quad (5)$$

в частности, в случае MTD-модели:

$$\pi_{ki}^*(m) = \pi_k^* \pi_i^* + \pi_k^* \lambda_{s-m} (q_{ki} - \pi_i^*), \quad k, i \in A. \quad (6)$$

**3. Оценки параметров MTD-модели.** Пусть наблюдается реализация  $X = (x_1, \dots, x_T)$  длительности  $T$  ДВР, соответствующего MTD-модели (1). Построим оценки параметров, основанные на свойстве стационарных распределений (6). Определим статистики:

$$\hat{\pi}_{ki}(j) = \frac{\sum_{t=s+j+1}^{T-s+j+1} I_k(x_{t-j}) I_i(x_t)}{T-2s+1}, \quad i, k \in A, j=1, \dots, s; \quad (7)$$

$$\hat{\pi}_i = \frac{\sum_{t=s+1}^{T-s+1} I_i(x_t)}{T-2s+1}, \quad i \in A, \quad (8)$$

которые являются состоятельными и асимптотически несмещенными оценками для  $\pi_{ki}^*(j)$  и  $\pi_i^*$ , соответственно [10]. Подставляя данные статистики в (6) и решая получающиеся уравнения относительно  $\{q_{ki}, i, k \in A\}$ , находим оценки:

$$\hat{q}_{ki} = \begin{cases} \sum_{j=1}^s \hat{\pi}_{ki}(j) / \hat{\pi}_k - (s-1) \hat{\pi}_i, & \text{если } \hat{\pi}_k > 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (9)$$

Оценку вектора  $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_j)$  построим по методу наименьших квадратов:

$$\hat{\lambda} = \operatorname{argmin}_{\lambda} \sum_{i, k \in A} \sum_{j=0}^{s-1} (z_{ki}(s-j-1) - \lambda_j d_{ki})^2, \quad (10)$$

где  $z_{ki}(j) = \hat{\pi}_{ki}(j) / \hat{\pi}_k - \hat{\pi}_i$ ,  $d_{ki} = \hat{q}_{ki} - \hat{\pi}_i$ ,  $i, k \in A, j=1, \dots, s$ .

К сожалению, использование аналогичного метода построения оценок в случае MTDg-модели не возможно, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Для MTDg-модели (2) при  $m < s$  либо не существует набора параметров  $\{\lambda, Q^{(0)}, \dots, Q^{(s-1)}\}$  такого, что для любых фиксированных  $1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq s$  стационарное распределение вероятностей случайного вектора  $(x_t, x_{t-j_1}, \dots, x_{t-j_m})'$  совпадает с заданным распределением  $\Pi^*(j_1, \dots, j_m)$ , либо такой набор параметров не единственный.

Теорема 4. Если имеет место MTD-модель (1), матрица  $Q$  – эргодическая, то при  $T \rightarrow \infty$  статистики (9), (10) являются асимптотически несмещенными и состоятельными оценками для  $Q, \lambda$ , соответственно.

### Литература

1. Dehner M and others // Physica A, 2003, Vol. 327. P. 535-553.
2. Berchtold A., Raftery A. E. // Statistical Science, 2002, Vol. 17. P.328-356.
3. Харин Ю.С и др. Математические и компьютерные основы криптологии. Мн, 2003.
4. Raftery A. E. // J. R. Statist. Soc. 1985, Vol. 47. P. 528-539.
5. Харин Ю.С. // Доклады НАН Беларуси, 2004, т. 48. С. 40-41.
6. Харин Ю.С., Ярмола А.Н. // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер.1. 2004. № 3. С. 65-69.
7. Jacobs P.A., Lewis P.A.W. // J. R. Statist. Soc. 1978, Vol. 40. P. 94-105.
8. Raftery A. E. // R. di Met. Stat. ed Appl. 1985, Vol. 3-4. p. 149-162.
9. Боровков А.А. Математическая статистика. М., 1984.

## ПРИМЕНЕНИЕ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ПОТОКА АБИТУРИЕНТОВ

Ярош Л.С., ГрГУ, Гродно

Актуальность проблемы управления вузом и образовательным процессом объясняется тем, что за последнее десятилетие высшее образование приобрело широкомасштабный характер и стало такой же сферой рыночных отношений, как промышленность, строительство, финансово-кредитная и иные системы.

Целью данной работы является изучение и анализ факторов, влияющих на поток абитуриентов, а также построение и оценка качества моделей линейной и нелинейной регрессии потока абитуриентов на различные факультеты ГрГУ.

Методы, используемые в данном подходе, относятся к статистико-математическим:

- 1) определение факторов, влияющих на численность абитуриентов;
- 2) определение существенности выявленных взаимосвязей между изучаемыми факторами;
- 3) получение конкретных уравнений регрессии, которые в последствии можно будет использовать при прогнозировании тенденций развития показателей численности абитуриентного потока;
- 4) оценка качества моделей.

Для построения моделей регрессионного анализа в первую очередь были выделены следующие факторы, влияющие на поток абитуриентов того и или иного факультета, их индикаторы и источники информации.

1. Количество населения (в основном, семнадцатилетнего) в Гродненской области (данные из статсборников [Население Республики Беларусь: Стат. Сб./ М-во стат-ки и анализа РБ. - Мн., 2004. – 93 с.]).
2. Количество учащихся Гродненской области, заканчивающих средние учебные заведения (в основном, по профилю), в текущем году (данные из облстатполкома о количестве учащихся в школах области, а также изучающих математику, физику, информатику на повышенном уровне).
3. Престижность и качество обучения на факультете (экспертные оценки студентов и преподавателей факультета, а также данные о количестве желающих поступать на ФМИ из РЦТиПОМ)
  - a. Разнообразии специальностей
  - b. Глубина специализации
  - c. Конкурс (сложность экзамена)
  - d. Возможность устроиться после окончания обучения на рынке труда
4. Условия приема на специальности нужного факультета
  - a. Какие экзамены сдаются и сложность их сдачи
  - b. Возможность зачисления определенных категорий абитуриентов без экзаменов
  - c. Стоимость обучения на факультете
  - d. Продолжительность образования
  - e. Конкурс (количество человек на место)
  - f. Расходы на поступление (для иногородних абитуриентов)
5. Условия приема у конкурентов того или иного факультета.
6. Результаты централизованного тестирования по профильным предметам

На основании этих факторов были построены модели численности абитуриентов для математического, экономического и физико-технического факультетов. Однако для экономического и физико-технического факультетов эти модели оказались некачественными. Это можно объяснить недостатком необходимых данных.

Опишем результаты по лучшим построенным моделям прогноза численности абитуриентов для математического факультета.

Выводы по лучшим построенным моделям прогноза численности абитуриентов ФМИ ГрГУ

1. Прогнозное значение количества абитуриентов ФМИ в 2005г.

- по мягкой (экспертной модели) - 250-300 чел.
  - По модели парной линейной регрессии в зависимости от численности семнадцатилетнего населения Гродненской области на период поступления – 213 человек (доверительный интервал  $200,46 \leq y_{x_5} \leq 226,77$ )
  - По модели нелинейной регрессии в зависимости от численности семнадцатилетнего населения Гродненской области на период поступления - 125 человек.
2. Модели линейной и нелинейной регрессии не могут быть признаны достаточно верными из-за малого количества исходных данных, что будет дорабатываться.

### Литература

1. Захарова Е.В., Проживина Н.Н., Саймукова Т.И. Математико-статистические методы анализа // Вопросы статистики. – 2003 г. - №8. – С.11-13
2. Шевченко Д. А. Маркетинговый взгляд на молодежный рынок труда // Открытое образование. – 2003. - №1. – С.1
3. Эконометрика / Под ред. И.И. Елисейевой. - М.: Финансы и статистика, 2003.

## СОЗДАНИЕ МУЛЬТИМЕДИЙНОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ В СРЕДЕ POWER POINT

*Ярошевич О.В., Казак А.Н., Гришан К.Ю.,  
Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск*

Обучение с использованием современных информационных технологий позволяет экономить силы и время при осуществлении инженерных расчетов, создании документов, рисунков, чертежей, обладает большими возможностями обработки и представления информации. Для этого на основе имеющихся программных продуктов можно построить электронные учебные пособия, которые будут решать различные задачи в образовательном процессе. Традиционные средства обучения на бумажных носителях ограничивают развитие образовательного процесса из-за длительной подготовки рукописей к печати, ограниченных тиражей, отставания учебных материалов от современного уровня, особенно в области информационных технологий. В этой связи возникает вопрос о совершенствовании учебно-методического обеспечения дисциплин.

Фундаментом инженерной подготовки по общему признанию педагогической ответственности являются графические дисциплины, к числу которых в первую очередь относится начертательная геометрия.

Начертательная геометрия - раздел геометрии, научные основы которого были разработаны французским математиком и физиком Г. Монжем для решения задач, связанных с определением размеров, форм и положения в пространстве линий, поверхностей, тел и их пересечений, при помощи построения их изображений на плоскости. Свойства геометрических фигур исследуются по их ортогональным проекциям, как правило, на три взаимно перпендикулярные плоскости, а геометрические построения в пространстве заменяются более доступными геометрическими построениями на соответствующих проекциях. Начертательная геометрия является одной из сложных дисциплин, изучаемых в техническом вузе. Причины - недостаточный уровень развития пространственных представлений студентов, неумение оперировать пространственными образами, сложность восприятия учебного материала в силу его абстрактности и своеобразных способов представления.

Преподавание и изучение данной дисциплины традиционными методами является трудоемким и малоэффективным, тем более что в настоящее время использование персональных компьютеров позволяет значительно облегчить и упростить этот процесс. Компьютерные технологии дают возможность перехода на качественно новый уровень передачи информации. Этот традиционно трудный предмет мы предлагаем осваивать с помощью электронных пособий, основанных на мультимедиа [1, 2, 3]. Кроме того, мультимедиа позволяют создавать средства обучения с широкими интерактивными возможностями, легко монтировать видеоизображение, звук и текст в единое методическое целое. Мультимедийные учебники, отличаются от обычных электронных учебников содержанием озвученных анимационных фильмов и видеофрагментов, особенно важно это при создании пособий по инженерным дисциплинам. В этих видеофрагментах демонст-

рируются сложнейшие процессы, такие как проецирование, преобразование проекций, образование поверхностей и т.п.

Результатом нашей исследовательской работы стали фрагменты мультимедийного учебно-методического комплекса по начертательной геометрии с применением анимации и звукового сопровождения.

С одним из таких фрагментов мы хотим познакомить. Перед нами была поставлена задача разработки слайд-фильмов, позволяющих показать пошаговое выполнение индивидуальных заданий и обеспечивающих демонстрацию решения задач. Для каждой отдельно взятой задачи задания в текстовом формате подготовлены алгоритмы решения. В соответствии с алгоритмами решения были созданы на бумаге кадры – эпюры.

Параллельно с накоплением данных осуществлялся второй этап работы - создание электронных презентаций в среде PowerPoint. Подтверждением использования названной программы является широкое ее применение. Не маловажным фактором является также простота освоения программного продукта, сравнительно высокое качество получаемых презентаций.

Установлено, что графика, предъявленная в динамике, понимается и запоминается на 30-40% лучше, чем предъявленная в статике, и компьютер позволяет использовать это преимущество динамической графики в интерактивном режиме. Этап материального действия должен постоянно сопровождаться ознакомлением с действием. В связи с этим пошаговая демонстрация геометрических построений была снабжена комментариями в виде всплывающих текстов и звука.

На слайдах все построения выполняются аналогично построениям на доске с помощью мела или на бумаге чертежными инструментами. Каждый шаг соответствует этапу построения в алгоритме решения. Постепенно вводятся новые графические элементы. Созданный визуальный ряд в дальнейшем был объединен в единое электронное учебное пособие.

Создание слайдов осуществлялось в следующей последовательности:

1. Визуализация исходной задачи. При этом осуществляется прорисовка осей координат и вывод соответствующих исходных данных в виде эпюра (фронтальная и горизонтальная проекция геометрических фигур).

2. Пользователю предлагается распечатать исходный слайд и решить задачу самостоятельно. Затем просмотреть и понять решение на экране.

3. Возможность пошаговой демонстрации геометрических построений для решения поставленной задачи, в ходе которой пользователь самостоятельно изучает ход построений. Демонстрация осуществляется по этапам с паузами и комментариями, выводимыми при построениях.

За каждым шагом закреплен свой слайд. Это сделано с тех позиций, чтобы можно было каждый слайд скопировать и представить отдельно. В докладе планируется продемонстрировать графические и анимационные возможности электронных презентаций в среде PowerPoint, и их использование при моделировании процесса решения задач.

Опыт разработки и использования в учебном процессе кафедрой разработанных слайдов показал, что данное направление является перспективным, позволяет повы-



сильно повысить эффективность обучения. Разработанные фрагменты получили одобрение преподавателей и студентов. Они могут быть использованы как специальное средство дистанционного обучения начертательной геометрии. В комплексе с электронным учебником по начертательной геометрии студент сможет получить и теоретические основы, и практические навыки. Этот продукт может быть использован и в качестве лекционной демонстрации, консультациях. Планируется продолжать работать в этом направлении, переводить иллюстративный материал в формат Flash.

#### Литература

1. Базенков Т.Н. Мультимедийные технологии в инженерном образовании (на примере преподавания графических дисциплин // Современные проблемы обеспечения качества инженерного образования: Материалы Республиканской научно-методической конференции (Минск, 15-16 мая 2003 г.)/ Под ред. М.М.Болбаса, Л.К. Водченко, В.И.Клевзевича. – Мн.: УП «Технопринт», 2003.
2. Орехов В.Б. Мультимедиа-технологии в обучении инженерной графике. // Уфимский государственный авиационный технический университет. [users.kpi.kharkov.ua/lre/orekhov.html](http://users.kpi.kharkov.ua/lre/orekhov.html)
3. Толстихин С.А. О применении мультимедийных средств в начертательной геометрии. // Красноярский государственный технический университет. [www.nspu.net/tolstihin.doc](http://www.nspu.net/tolstihin.doc)

## РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

### ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Баранова Ю. А., Ковалева О. С., БНТУ, Минск

Для нахождения коэффициентов разложения, в общем случае по системе неортогональных собственных функций, будем использовать операторный подход, который с единых позиций осуществляет требуемое разложение как в ортогональный, так и в неортогональные ряды.

Пусть  $F(a_mx)$  - собственная функция оператора  $d_x^2$ , т.е.

$$d_x^2[F(a_mx)] = a_m^2 F(a_mx) \quad \text{или} \quad \left(1 - \frac{d_x^2}{a_m^2}\right)F(a_mx) = 0.$$

Тогда

$$\left(1 - \frac{d_x^2}{a_K^2}\right)F(a_mx) = \begin{cases} \left(1 - \frac{a_m^2}{a_K^2}\right)F(a_mx) & \text{если } m \neq n \\ 0 & \text{если } m = n \end{cases}$$

Применим к ряду

$$F(\mu x) = A_0 + \sum_{K=0}^{\infty} A_K F(a_K x) = A_0 + \sum_{K=1}^{\infty} [A_K^r F_r(a_K x) + A_K^n F_n(a_K x)]$$

последовательно операции

$$D_0 = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{d_x^2}{a_K^2}\right) = \frac{\varphi(d_x)}{d_x}, \quad D_1 = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{\infty} \left(1 - \frac{d_x^2}{a_m^2}\right) = \frac{\varphi(d_x)}{1 - d_x^2/a_K^2},$$

и  $D_2 = d_x D_1$ .

Причем здесь введены обозначения:

$$F_r(a_K x) = \frac{F(a_K x) + F(-a_K x)}{2} \quad \text{- четная часть функции}$$

$$F_n(a_K x) = \frac{F(a_K x) - F(-a_K x)}{2} \quad \text{- нечетная часть функции}$$

$$\varphi(\mu) = \mu \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^2}{a_K^2}\right).$$

При  $x=0$ , получим:

$$\frac{\varphi(\mu)}{\mu} F(\mu x) \Big|_{x=0} = A_0 \Rightarrow A_0 = \frac{\varphi(\mu) F(0)}{\mu}.$$

С учетом

$$\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq K}}^{\infty} \left(1 - \frac{d_x^2}{a_m^2}\right) [F(a_K x)] = \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq K}}^{\infty} \left(1 - \frac{a_K^2}{a_m^2}\right) F(a_K x) = \left[ \frac{d}{d\mu} \cdot \frac{\varphi(\mu)}{\mu} \right]_{\mu=a_K} \cdot \left(-\frac{a_K}{2}\right) F(a_K x) = -\frac{1}{2} \varphi'(a_K) F(a_K x),$$

устанавливаем

$$D_1 \left[ \sum_{K=1}^{\infty} A_K^n F_n(a_K x) \right] = -A_K^n \frac{a_K}{2} \varphi'(a_K) F_r(a_K x)$$

$$D_1 [F(\mu x)] = \frac{\varphi(\mu)}{1 - \mu^2/a_K^2} F_r(\mu x).$$

Приравнявая эти выражения при  $x=0$  и замечая, что

$$\left\{ D_1 \left[ \sum_{K=1}^{\infty} A_K^r F_r(a_K x) \right] \right\}_{x=0} = 0,$$

находим  $\frac{\varphi(\mu)}{1 - \mu^2/a_K^2} = -A_K^n \frac{a_K}{2} \varphi'(a_K)$ , откуда следует

$$A_K^n = -\frac{2}{a_K \varphi'(a_K)} \cdot \frac{\varphi(\mu)}{1 - \mu^2/a_K^2}.$$

Аналогично, при помощи оператора  $D_2$  мы определим

$$A_K^r = -\frac{2\mu}{a_K^2 \varphi'(a_K)} \cdot \frac{\varphi(\mu)}{1 - \mu^2/a_K^2}$$

и в результате получим:

$$F(\mu x) = F(0) \frac{\varphi(\mu)}{\mu} + 2 \sum_{K=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(a_K)} \frac{\varphi(\mu)}{\mu^2 - a_K^2} \cdot [\mu F_r(a_K x) + a_K F_n(a_K x)] \quad (1)$$

Полученный результат можно легко проверить. Для этого применим к интегралу

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{F(xz) dz}{(z - \mu)\varphi(z)}$$

обычные правила теории вычетов в комплексной плоскости и соединяя вместе вычеты, относящиеся к  $\pm a_K$ . Здесь  $\mu$  - некоторое комплексное число, отличное от всех  $a_K$ , а  $x$  - некий вещественный параметр.  $C_n$  - описанный с начала координат плоскости комплексного переменного круг радиуса  $R_n$ , причем  $R_n > |\mu|$  и  $|a_n| < R_n < |a_{n+1}|$ . В результате находим:

$$I_n = \frac{F(\mu x)}{\varphi(\mu)} - 2 \sum_{K=1}^{K=n} \frac{1}{\varphi'(a_K) (\mu^2 - a_K^2)} [\mu F_r(a_K x) + a_K F_n(a_K x)] - \frac{F(0)}{\mu}.$$

Если при некотором  $x$  имеем в пределе независимо от взятого частного значения  $|\mu| \leq \alpha$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ , что будет, например, всегда тогда, когда отношение  $\frac{F(xz)}{\varphi(z)}$  при  $|z| \rightarrow \infty$  стремится к нулю равномерно во всех точках  $C_n$ , то при этом значении  $x$  имеет место равномерно сходящееся (по отношению  $\mu$ ) разложение в ряд (1).

Разложение имеет место и тогда, когда отношение  $\frac{F(xz)}{\varphi(z)}$  стремится в конечном числе точек круга  $C_n$  не к нулю, а к конечному пределу.

Полученный ряд (1) можно дифференцировать произвольное число раз по  $\mu$ . Дифференцируя  $m$  раз и полагая  $\mu=0$ , в результате получим:

$$F^{(m)}(0)x^m = F(0) \left[ \frac{d^m \varphi(\mu)}{d\mu^m \mu} \right]_{\mu=0} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(a_k)} \left\{ \left[ \frac{d^m \mu \varphi(\mu)}{d\mu^m \mu^2 - a_k^2} \right]_{\mu=0} \cdot F_r(a_k x) + a_k \left[ \frac{d^m \varphi(\mu)}{d\mu^m \mu} \right]_{\mu=0} \cdot F_n(a_k x) \right\} \quad (2)$$

Полагая  $F^{(m)}(0) \neq 0$ , получим разложение  $x^m$  в ряд требуемого вида.

Пользуясь очевидным соотношением

$$\frac{1}{m!} \left( \frac{d^m \mu \varphi(\mu)}{d\mu^m \mu^2 - a_k^2} \right)_{\mu=0} = \frac{1}{(m-1)!} \left( \frac{d^{m-1} \varphi(\mu)}{d\mu^{m-1} \mu^2 - a_k^2} \right)_{\mu=0}$$

и тем, что все четные производные от  $\frac{\varphi(\mu)}{\mu^2 - a_k^2}$  равны нулю при  $\mu=0$ , найдем из (2):

$$x^{2r} = \alpha_0 \frac{U_{2r+1}}{\alpha_{2r}} \frac{2}{\alpha_{2r}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_r(a_k x)}{a_k^2 \varphi'(a_k)} \gamma^{(r-1)} \quad (3)$$

$$x^{2r+1} = \frac{2}{\alpha_{2r+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_n(a_k x)}{a_k^2 \varphi'(a_k)} \gamma_k^{(r)} \quad (4)$$

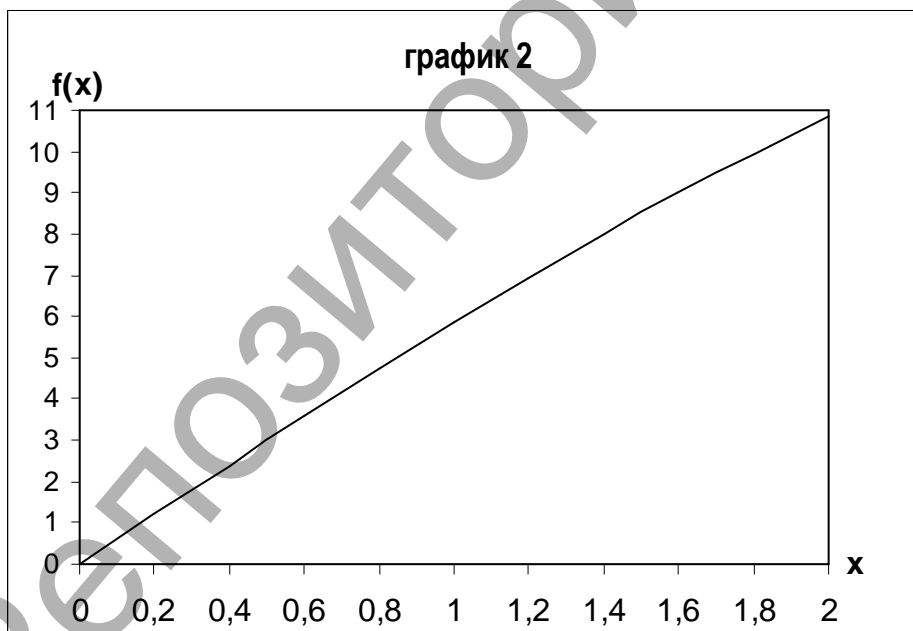
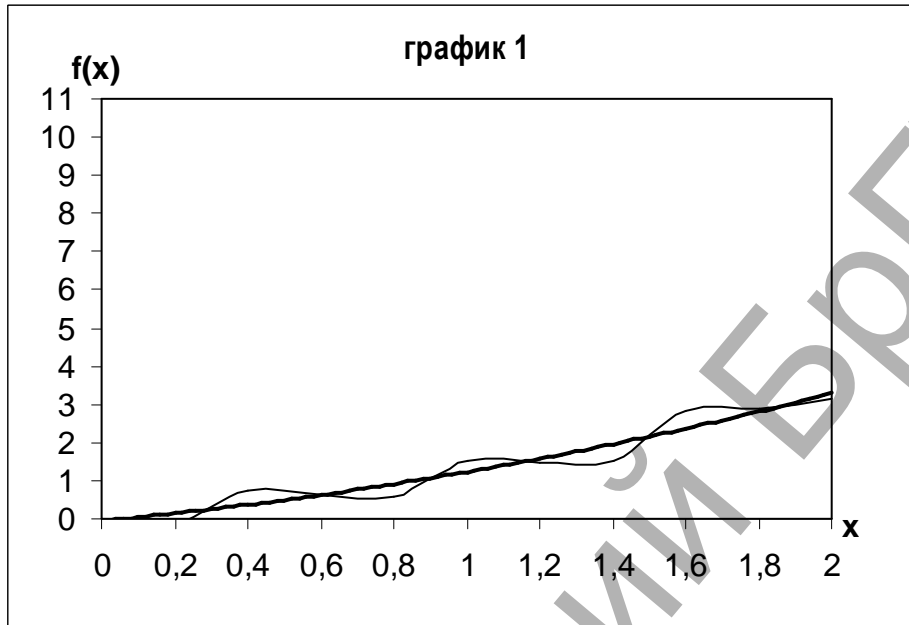
Причем введено обозначение

$$\gamma_k^{(r)} = \frac{1}{(2r+1)!} \left[ \frac{d^{2r+1} \varphi(\mu)}{d\mu^{2r+1} (1 - \mu^2/a_k^2)} \right]_{\mu=0}.$$

Нетрудно убедиться в том, что заменив разлагаемую в ряд функцию  $F(\mu x)$  на функцию  $x^m$  и используя введенные выше операторы  $D_0$ ,  $D_1$  и  $D_2$ , можно непосредственно получить формулы (3) и (4) операторным методом. Отметим также, что ряды для четных степеней  $x^{2r}$  содержат только четные функции  $F_r$ , а для нечетных - только нечетные  $F_n$ .

Приведем конкретный числовой пример разложения функции  $e^{ax}$  в неортогональный ряд вида  $e^{ax} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} k}{a^2 + k^2}$  (график 1). Для сравнения на графике приведем разложение

этой функции в ортогональный ряд Фурье вида  $e^{ax} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \sin \frac{k\pi x}{2}}{k(1 - k^2 a^2)}$  (график 2).



В результате проведенных исследований можно сделать следующий вывод: для малых значений  $x$  приближение «2-го графика» является «грубым» по сравнению с «графиком 1», а для больших значений  $x$  наоборот.

### Литература

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. // М.:Физматгиз.-1961-936 с.
2. Толстов Г.П. Ряды Фурье. // Изд.3-е, испр.- М.: Наука -1980-381 с.
3. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости: Монография / Мн.: УП «Технопринт», 2003.-101 с.

## О НЕПРИВОДИМОСТИ ПОЛИНОМОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Валуева Т.А., БГУ, Минск

Рассмотрим  $f(x)$  — неприводимый полином степени  $n$  над полем  $F_p$ ,  $\text{ordf}(x) = \frac{p^n - 1}{s}$ ,

где  $s$  — некоторый делитель числа  $p^n - 1$ . Будем исследовать неприводимость полинома  $f(x^T)$ ,  $T > 1$ . В работе [

1] доказано, что если все простые делители числа  $T$  делят порядок  $f(x)$  и выполняются некоторые дополнительные условия, то полином  $f(x^T)$  является неприводимым. В статье [4] получены необходимые и достаточные условия неприводимости полиномов вида  $x^{p^n} + ax + b$  над полем  $F_p$ . В данной статье получен критерий неприводимости полиномов вида  $f(x^T)$  над полем  $F_p$ .

Отметим, что в поле  $GF(p^n)$  полином  $f(x)$  имеет  $n$  корней:  $\alpha, \alpha^p, \dots, \alpha^{p^{n-1}}$ . Все корни полинома  $f(x^T)$  являются корнями полиномов  $x^T - \alpha^{p^i}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ . Полином  $f(x^T)$  неприводим над полем  $F_p$  тогда и только тогда, когда полиномы  $x^T - \alpha^{p^i}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  неприводимы над полем  $GF(p^n)$ .

**Лемма 1.** Если полином  $x^T - \alpha^{p^i}$  для некоторого  $i = \overline{0, n-1}$  имеет корень в поле  $GF(p^n)$ , то все полиномы  $x^T - \alpha^{p^i}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  имеют корень в поле  $GF(p^n)$  порядка  $\frac{p^n - 1}{s}$ .

**Лемма 2.** Для всех  $i = \overline{0, n-1}$  полиномы  $x^T - \alpha^{p^i}$  имеют корень в поле  $GF(p^n)$  тогда и только тогда, когда  $\text{НОД}(\frac{T}{d}, \frac{p^n - 1}{s}) = 1$ , где  $d = \text{НОД}(T, s)$ .

Доказательства лемм 1, 2 аналогичны доказательствам лемм 1, 2 в [2].

**Лемма 3.** Полиномы  $x^T - \alpha^{p^i}$ ,  $i = \overline{0, n-1}$  неприводимы над полем  $GF(p^n)$  тогда и только тогда, когда все простые делители числа  $T$  делят число  $\frac{p^n - 1}{s}$ , не делят  $s$ , и  $p^n \equiv 1 \pmod{4}$ , если  $T$  кратно 4.

*Доказательство.* Докажем достаточность условий леммы. В силу леммы 1 достаточно рассмотреть полином  $x^T - \alpha$ . Из теоремы 16[3] следует, что данный полином неприводим над полем  $GF(p^n)$  если для всех простых  $p_i$ , делящих  $T$ ,  $\alpha \notin GF(p^n)^{p_i}$  и  $\alpha \notin -4GF(p^n)^4$  в случае, когда  $T$  кратно 4.  $GF(p^n)^{p_i}$  — множество, состоящее из элементов поля  $GF(p^n)$  в  $p_i$ -й степени. Докажем, что  $\alpha \in GF(p^n)^{p_i}$  тогда и только тогда, когда  $p_i$  не делит  $\frac{p^n - 1}{s}$  или  $p_i$  делит  $s$ .

Пусть  $\gamma$  — образующий мультипликативной группы поля  $GF(p^n)$ , тогда  $\alpha = \gamma^{s \cdot m}$ , причем  $\text{НОД}(m, p^n - 1) = 1$ . Предположим, что  $\alpha \in GF(p^n)^{p_i}$ . Следовательно, существует такое  $k$ , что  $(\gamma^k)^{p_i} = \gamma^{s \cdot m}$ , что равносильно тому, что относительно  $k$  разрешимо следующее сравнение:

$$p_i \cdot k \equiv s \cdot m \pmod{p^n - 1}. \quad (1)$$

Согласно лемме 2 сравнение ((1)) разрешимо тогда и только тогда, когда  $\text{НОД}(\frac{p_i}{d}, \frac{p^n - 1}{s}) = 1$ , где  $d = \text{НОД}(p_i, s)$ . Учитывая, что  $p_i$  — простое, рассмотрим следующие случаи.

1)  $p_i$  не делит  $s$ , тогда сравнение ((1)) разрешимо тогда и только тогда, когда  $p_i$  не делит  $\frac{p^n - 1}{s}$ .

2)  $p_i$  делит  $s$ , тогда  $\text{НОД}(\frac{p_i}{d}, \frac{p^n - 1}{s}) = 1$ , т.е. сравнение ((1)) всегда разрешимо.

Рассмотрим случай, когда  $T$  кратно 4. В случае, когда  $p=2$ , полином  $f(x^T) = f(x^{4t}) = f^4(x^t)$  — приводим над полем  $F_2$ . Поэтому будем рассматривать  $p > 2$ . Условие  $\alpha \notin -4GF(p^n)^4$  равносильно условию  $\alpha \notin (p-4)GF(p^n)^4$ . Пусть, как и ранее,  $\gamma$ -образующий мультипликативной группы поля  $GF(p^n)$ , тогда  $\alpha = \gamma^{s \cdot m}$  и  $\gamma^{p^n - 1} = 1$ . Так как  $\text{НОД}(p-4, p) = 1$ , то  $(p-4)^d = 1$ , где  $d$  — показатель, которому принадлежит  $(p-4)$  по модулю  $p$ . Тогда  $\gamma^{\frac{p^n - 1}{d}} = p-4$ . Предположим, что  $\alpha \in (p-4)GF(p^n)^4$ . Следовательно, существует такое  $k$ , что  $\gamma^{\frac{p^n - 1}{d}} \gamma^{4k} = \gamma^{s \cdot m}$ , что равносильно тому, что относительно  $k$  разрешимо следующее сравнение:

$$s \cdot m \equiv 4k + \frac{p^n - 1}{d} \pmod{p^n - 1} \quad (2)$$

Рассуждая аналогично, как при решении сравнения ((1)); получим, что сравнение ((2)) разрешимо тогда и только тогда, когда  $p^n \equiv 3 \pmod{4}$ .

Таким образом, если все простые делители числа  $T$  делят  $\frac{p^n - 1}{s}$ , не делят  $s$ , и  $p^n \equiv 1 \pmod{4}$ , в случае, когда  $T$  кратно 4, то полином  $x^T - \alpha$  является неприводимым полиномом над полем  $GF(p^n)$ , а полином  $f(x^T)$  — неприводим над полем  $F_p$ .

Покажем необходимость условий леммы.

Докажем, что если существует простой делитель  $p_i$  числа  $T$ , который является взаимно простым с  $\frac{p^n - 1}{s}$  либо делит  $s$ , то полином  $f(x^T)$  приводим над полем  $F_p$ .

Вычислим  $d = \text{НОД}(T, s)$ . Пусть  $T = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\gamma_m}$  — каноническое разложение числа  $T$ . Положим  $r_1 = p_{i_1}^{\gamma_{i_1}} \cdot p_{i_2}^{\gamma_{i_2}} \cdot \dots \cdot p_{i_k}^{\gamma_{i_k}}$ , где  $p_{i_j}, j = \overline{1, k}$  делят  $s$ . Тогда  $d = \text{НОД}(T, s) = \text{НОД}(r_1, s)$ . Положим  $r_2 = p_{j_1}^{\gamma_{j_1}} \cdot p_{j_2}^{\gamma_{j_2}} \cdot \dots \cdot p_{j_n}^{\gamma_{j_n}}$ , где  $p_{j_i}, i = \overline{1, n}$  делят числа  $\frac{p^n - 1}{s}$  и  $\frac{T}{r_1}$ . Пусть

$$r = \frac{r_1 \cdot r_2}{d}, \quad t = \frac{T}{r} = \frac{T}{r_1 \cdot r_2} \cdot d. \quad \text{Отметим, что } \text{НОД}(T, s) = \text{НОД}(t, s), \text{ в число } t \text{ входят } d \text{ и все}$$

простые  $p_i$  в соответствующих степенях, которые не делят  $\frac{p^n - 1}{s}$ .

Полином  $x^T - \gamma^{s \cdot m}$  представим следующим образом:  $x^T - \gamma^{s \cdot m} = x^{rt} - \gamma^{s \cdot m} = y^t - \gamma^{s \cdot m}$ .

Т.к.  $\text{НОД}(t,s) = d$  и  $\text{НОД}\left(\frac{t}{d}, \frac{p^n - 1}{s}\right) = 1$ , из лемм 1, 2 получим, что полином  $y^t - \gamma^{s \cdot m}$  имеет корень в поле  $\text{GF}(p^n)$  порядка  $\frac{p^n - 1}{s}$ , т.е.  $y^t - \gamma^{s \cdot m} = (y - \iota) \cdot g(y) = (x^r - \iota) \cdot g(x^r)$ . Тогда  $f(x^T) = \prod_{i=0}^{n-1} (x^T - \alpha^{p^i}) = \prod_{i=0}^{n-1} (x^r - \iota^{p^i}) \cdot g_i(x^r) = h(x^r) \cdot g(x^r)$ , где  $h(x)$  — неприводимый полином степени  $n$ .

Рассмотрим случай, когда  $\alpha \in -4\text{GF}(p^n)^4$  и  $T$  кратно 4. Пусть  $\alpha = -4\beta^4$ ,  $T=4t$ , тогда  $x^T - \alpha = x^{4t} - \alpha = [y = x^t] = y^4 + 4\beta^4 = (y^2 + 2\beta y + 2\beta^2) \cdot (y^2 + (p-2)\beta + 2\beta^2)$  — приводим над  $\text{GF}(p^n)$ , и следовательно, полином  $f(x^T)$  — приводим над  $F_p$ .

Из лемм 1,2,3 следует справедливость следующей теоремы:

**Теорема 1.** Пусть  $f(x)$  — неприводимый полином над полем  $F_p$  степени  $n$ ,  $\text{ord}f(x) = \frac{p^n - 1}{s}$ . Полином  $f(x^T)$  является неприводимым над полем  $F_p$  тогда и только тогда, когда все простые делители числа  $T$  делят число  $\frac{p^n - 1}{s}$ , не делят число  $s$ , и  $p^n \equiv 1 \pmod{4}$ , если  $T$  кратно 4.

### Литература

1. Лидл Р., Нидеррайтер Г. Конечные поля, т.1, М.: Мир, 1988.
2. Валуева Т.А. О приводимости одного класса полиномов, Информационные системы и технологии — IST'2002, 2ч., стр.15-16.
3. Ленг С. Алгебра, М.: Мир, 1967.
4. Chen Song-Liang Some trinomials over finite prime fields, J. Jinzhou Norm. Coll. Natur. Sci. Ed., 2002, №1, p. 65-66.

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В МУЛЬТИВЕЙВЛЕТНОМ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОМ БАЗИСАХ

Герасимчик И.В., Дейцева А.Г., ГрГУ, Гродно

В данной работе рассмотрено интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x) - \int_0^1 K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad (1)$$

где  $K(x,s) \in L_2[0;1]^2$ ,  $f(x) \in L_2[0;1]$ ,  $x \in [0;1]$  — известные функции,  $y(x)$ ,  $x \in [0;1]$  — неизвестная функция.

Пусть  $\{b_1(x), b_2(x), \dots\}$  — ортонормированный базис в  $L_2[0;1]$ . Тогда для функций из уравнения (1) справедливы следующие разложения

$$K(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} K_{ij} b_i(x) b_j(s), \quad (2)$$



где

$$K_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 K(x, s) b_i(x) b_j(x) dx ds;$$

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i b_i(x), \quad (3)$$

где

$$y_i = \int_0^1 y(x) b_i(x) dx;$$

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i b_i(x), \quad (4)$$

где

$$f_i = \int_0^1 f(x) b_i(x) dx,$$

$i, j = 1, 2, \dots$

Рассмотрим конечное число базисных функций  $\{b_1(x), b_2(x), \dots, b_n(x)\}$ , тогда, используя разложения (2)–(4), получим следующую систему алгебраических уравнений, аппроксимирующую уравнение (1)

$$y_i - \sum_{j=1}^n K_{ij} y_j = f_i,$$

$i = 1, \dots, n.$

В качестве ортонормированного базиса  $\{b_1(x), b_2(x), \dots\}$  пространства  $L_2[0;1]$  в работе использовались тригонометрическая система [1] и мульти-вейвлеты порядка  $k = 2$ . В [2] приведен алгоритм построения мультивейвлетов, и доказано, что мультивейвлетный базис является ортонормированным.

Таким образом, решение уравнения (1) осуществляется путем разложения входящих в него функций по тригонометрическому и мультивейвлетному базисам. Предложенные методы реализованы с помощью пакета Maple при  $n = 16$  на примере решения некоторых интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Установлено, что решение, полученное с помощью мультивейвлетного базиса является более точным, чем в случае использования тригонометрического. Кроме того, решение уравнения (1), ядро  $K(x, s)$ ,  $x, s \in [0;1]$  которого обладает логарифмической особенностью, в мультивейвлетном базисе осуществляется в 2 раза быстрее по сравнению с тригонометрическим базисом.

### Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – 7-е изд. – М.: Физматлит, 2004. – 572 с.
2. Alpert B. A class of bases in  $L_2$  for the sparse representation of integral operators // SIAM J. Math. Anal. – 1993. – vol.1. – №1. – P. 246-262.

## АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ В $\theta$ -ИНТЕГРАЛАХ

Каримова Т.И., БГТУ, Брест

При исследовании аппроксимаций случайного процесса броуновского движения возникают трудности, связанные с тем, что соответствующие «приближенные» интегралы не сходятся к стохастическому интегралу Ито, если даже предел существует. Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении стохастических дифференциальных уравнений. Предел решений аппроксимирующих уравнений, если он существует, как правило, является решением некоторого другого уравнения. Учитывая неустойчивость решений уравнений Ито, которая впервые была отмечена Вонгом и Закаем [1], можно понять, почему в задачах подобного типа уравнения обычно рассматриваются в симметризованной форме. Важной оказывается «согласованность» симметризованных стохастических и обыкновенных уравнений. В работе [2] было предложено избавиться от вышеуказанных сложностей введением запаздывания.

В сообщении [3] анонсирована конструкция алгебры обобщенных случайных процессов, которая позволила с единых позиций исследовать решения стохастических уравнений различных классов (см. напр.[4, 5]) с помощью решений соответствующих уравнений в дифференциалах в этой алгебре.

Напомним некоторые понятия из работы [6], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть  $(\Omega, A, P)$  – полное вероятностное пространство.

**Определение 1.** Расширенной прямой  $\tilde{R}$  называется следующее фактор-множество  $\tilde{R} = \bar{R}/M$ , где  $\bar{R} = \{(x_n) : \forall n \in N \ x_n \in R\}$  и  $M = \{(x_n) \in \bar{R} : \exists n_0 \in N \ \forall n > n_0 \ x_n = 0\}$ .

Аналогичным образом определяется  $\tilde{T} = \bar{T}/M$ , где  $t \in T = [0, a] \subset R$ ,  $a \in R$ ,  $\bar{T} = \{(x_n) : \forall n \in N \ x_n \in T\}$ .

Рассмотрим множество последовательностей функций  $f_n(t, \omega) : T \times \Omega \rightarrow R$  со следующими свойствами:

1.  $f_n(t, \cdot)$  является случайной величиной на  $(\Omega, A, P)$  для всех  $t \in T$  и  $n \in N$ ;
2.  $f_n(\cdot, \omega) \in C^\infty(T)$  для всех  $n \in N$  и почти всех  $\omega \in \Omega$ .

Будем говорить, что элементы  $F = (f_n(t, \omega))$  и  $G = (g_n(t, \omega))$  эквивалентны, если существует такой номер  $n_0$ , что для любых  $t \in T$  и почти всех  $\omega \in \Omega$   $f_n(t, \omega) = g_n(t, \omega)$  при  $n > n_0$ .

Через  $G(T, \Omega)$  обозначим множество классов эквивалентности исходного множества. Очевидно, что  $G(T, \Omega)$  образует алгебру с покоординатным сложением и умножением.

**Определение 2.** Класс эквивалентности вида  $\tilde{F}(\tilde{t}, \omega) = [(f_n(t_n, \omega))]$ ,  $\tilde{t} = [(t_n)] \in \tilde{T}$ ,  $[(f_n(t_n, \omega))] \in G(T, \Omega)$  называется обобщенным случайным процессом.

Множество обобщенных случайных процессов обозначим через  $G(\tilde{T}, \Omega)$ ; оно является алгеброй с покоординатными операциями сложения и умножения.

Будем говорить, что обобщенный случайный процесс  $\tilde{F}(\tilde{t}, \omega) = [(f_n(t_n, \omega))] \in G(\tilde{T}, \Omega)$  ассоциирует классический случайный процесс с непрерывными, интегрируемыми и т.д. траекториями, если  $f_n(t, \omega)$  при  $n \rightarrow \infty$  для почти всех  $\omega \in \Omega$  или в  $L^2(\Omega, A, P)$  сходится к данному процессу в соответствующем пространстве непрерывных, интегрируемых и т.д. функций.

Пусть  $\{\Phi_t\}_{t \in T}$  – стандартный поток  $\sigma$ -алгебр,  $\Phi_a \subset A$ ;  $B(t), t \in T$  – одномерный стандартный процесс  $\Phi_t$ -броуновского движения.

**Определение 3.** Обобщенным случайным процессом броуновского движения называется элемент алгебры  $G(\tilde{T}, \Omega)$ , ассоциирующий  $B(t)$ .

На полном вероятностном пространстве  $(\Omega, A, P)$  рассматривается система дифференциальных уравнений, которая в алгебре обобщенных случайных процессов  $G(T, \Omega)$  на уровне представителей будет записана в виде задачи Коши с опережением

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n) - X_n^i(t) = \sum_{j=1}^m f_n^{ij}(t, X_n(t+h_n)) [B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)] + g_n^i(t, X_n(t)), \\ X_n^i(t)|_{[0, h_n)} = X_n^{0i}(t), i = \overline{1, r}, t \in [0, T] \end{cases} \quad (1)$$

где  $B_n^j(t) = (B^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{1/n} B^j(t+s) \rho_n^j(s) ds$ ,  $\rho_n^j(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\rho_n^j(t) \geq 0$ ,

$\text{supp } \rho_n^j(t) \subset [0, 1/n]$ ,  $\int_0^{1/n} \rho_n^j(s) ds = 1$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $B(t) = (B^1(t), B^2(t), \dots, B^m(t))$  –

$m$ -мерный стандартный процесс броуновского движения,

$$f_n^{ij} = (f^{ij} * \bar{\rho}_n), g_n^i = (g^i * \bar{\rho}_n), f^{ij} \in C_B^2(\mathbb{R}^{r+1}), g^i \in C_B^1(\mathbb{R}^{r+1}),$$

а  $\bar{\rho}_n$  – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой

содержится в  $[0, 1/n]^{r+1}$  и  $\int_0^{1/n} \dots \int_0^{1/n} \bar{\rho}_n(s, s_1, s_2, \dots, s_r) ds ds_1 ds_2 \dots ds_r = 1$ .

Система уравнений, ассоциированных системе (1) имеет вид:

$$X_i(t) = x_i + \sum_{j=1}^m (\theta_j) \int_0^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \int_0^t g^i(s, X(s)) ds, i = \overline{1, r}. \quad (2)$$

где  $t \in T$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in [1/2, 1]$  и интеграл в правой части – стохастический  $\theta$ -интеграл.

Пусть поток  $\sigma$ -алгебр  $\{\Phi_t\}_{t \in [0, T]}$  порожден процессом  $B(t)$ .

Рассмотрим числовые последовательности [7]

$$K_j(n, h_n) = \iint_{\substack{0 < s, \tau \leq 1/n \\ |s - \tau| \leq h_n}} (1 - |s - \tau| h_n^{-1}) \rho_n^j(s) \rho_n^j(\tau) ds d\tau, j = \overline{1, m}.$$

С помощью принципа сжимающих отображений можно показать, что задача (1) имеет решение, однако в общем случае оно будет не единственным. Однако и в этом случае справедлива следующая теорема, которая является необходимым и достаточным условием сходимости решений систем конечно-разностных уравнений с опережением к решениям систем стохастических уравнений в  $\theta$ -интегралах.

**Теорема.** Пусть  $\theta \in [1/2, 1]$ ,  $f^{ij} \in C_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $g^i \in C_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Если  $n \rightarrow \infty$ ,  $h_n \rightarrow 0$  так что  $1/n^{3/2} = o(h_n)$  причем «начальное условие» задачи Коши (1)

$X_n^{0i}(t)$  является  $\Phi_{t+1/n}$ -измеримым и  $\sup_{t \in [0, h_n)} E[X_n^{0i}(t) - x_i]^2 \rightarrow 0$  для любого  $i = \overline{1, r}$ , то

для сходимости последовательности  $X_n(t)$  решений задачи Коши (1) к решениям (2) в

$L^2(\Omega, A, P)$  и равномерно по  $t \in T$  необходимо и достаточно, чтобы сходились числовые последовательности  $K_i(n, h_n)$ .

### Литература

1. Wong E., Zakai M. On the relationship between ordinary and stochastic differential equations // Internat. J. Engin. Sci. – 1965. – Vol.3. – P.213-229.
2. Мацкявичюс В. Некоторые аппроксимации стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений // Лит. мат. сб. – Т.18, №3 – С.101-108.
3. Лазакович Н.В. // Доклады АН Беларуси. – 1995 – Т.39 № 3 – С. 20-22.
4. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П. // Теория вероятности и ее применение. – 1996. – Т.41, № 4 – С. 785-809.
5. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П., Яблонский О.Л. // Литовский математический сборник. – 1999. – Т.39, № 2 – С. 248-256.
6. Лазакович Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов // Доклады АН Беларуси. – 1994. – Т.38, № 5. – С. 23-27.
7. Яблонский О.Л. Классификация способов аппроксимации стохастических интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов // Доклады НАН Беларуси. – 2000. – Т.44, №2. – С.22-26.

## РОБАСТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРАХ ПРОЦЕССА AR(1)

Кишилов Д.В., БГУ, Минск

### 1. Математическая модель. Построение теста

В данной работе предложен устойчивый к искажениям вида Тьюки-Хьюбера последовательный тест для проверки простых гипотез о параметрах авторегрессии первого порядка. С помощью компьютерного моделирования проведен сравнительный анализ построенного теста с тестом Вальда.

Пусть наблюдается последовательность случайных величин  $x_1, x_2, \dots$ , удовлетворяющая уравнению авторегрессии первого порядка:

$$x_0 = 0, x_n = ax_{n-1} + \omega_n, n \geq 1, \quad (1)$$

где  $\omega_n$  - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения  $P(x)$ ,  $E\{\omega_n\} = 0$ ,  $E\{\omega_n^2\} = \sigma^2$ .

Пусть проверяются две простые гипотезы о параметрах (1):  $H_0 : a = a_0, P(\cdot) = P_0(\cdot)$ ,  $H_1 : a = a_1, P(\cdot) = P_1(\cdot)$ , где  $P_0(\cdot), P_1(\cdot)$  - некоторые функции распределения с плотностями  $p_0(\cdot)$  и  $p_1(\cdot)$  соответственно,  $|a_0|, |a_1| < 1$ ,  $\int \omega dP_k(\omega) = 0$ ,  $0 < \int \omega^2 dP_k(\omega) = \sigma_k^2 < \infty$ ,  $k=0,1$ .

Обозначим логарифм отношения правдоподобия  $\Lambda_n = \Lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{t=1}^n \lambda(x_{t-1}, x_t)$ ,

$\lambda(x, y) = \log \frac{p_1(y - a_1 x)}{p_0(y - a_0 x)}$ . Согласно тесту Вальда [1], по  $n$  наблюдениям ( $n=1,2,\dots$ ) принимается решение

$$d_n = 1_{[c_+, +\infty)}(\Lambda_n) + 2 \cdot 1_{(c_-, c_+)}(\Lambda_n), \quad (2)$$

где  $1_A(\cdot)$  - индикаторная функция множества  $A$ . Решения  $d_n = 0$  и  $d_n = 1$  означают остановку процесса наблюдения и принятие соответствующей гипотезы. Решение  $d_n = 2$

означает, что нужно взять  $(n+1)$ -ое наблюдение. Пороги  $C_-, C_+ \in R, C_- < 0 < C_+$ , являются параметрами теста.

Пусть гипотетическая модель подвержена искажениям Тьюки-Хьюбера [2]: фактическая функция распределения  $\omega_n$  при верной гипотезе  $H_k$  имеет вид:

$$\bar{P}_k(\omega) = (1 - \varepsilon_k)P_k(\omega) + \varepsilon_k \tilde{P}_k(\omega), \quad \omega \in R, k = 0, 1, \quad (3)$$

где  $\varepsilon_k$  - неизвестные вероятности появления выброса,  $\tilde{P}_k(\cdot)$  - произвольное засоряющее распределение, удовлетворяющее условиям  $\tilde{P}_k(\cdot) \neq P_k(\cdot), \int \omega d\tilde{P}_k(\omega) = 0, \int \omega^2 d\tilde{P}_k(\omega) = \tilde{\sigma}_k^2 < \infty$ .

Для того чтобы сделать тест (2) более устойчивым к искажениям вида (3), воспользуемся подходом, предложенным в [2]. Решение  $d_n$  заменим на решение

$$d_n^g = 1_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_n^g) + 2 \cdot 1_{(C_-, C_+)}(\Lambda_n^g), \quad (4)$$

где  $\Lambda_n^g = \sum_{i=1}^n g(\lambda(x_{i-1}, x_i)), g(z) = g_- \cdot 1_{(-\infty, g_-]}(z) + g_+ \cdot 1_{[g_+, +\infty)}(z) + z \cdot 1_{(g_-, g_+)}$ , и  $g_-, g_+ \in R, g_- < g_+$ , - параметры теста.

Оценки характеристик теста (4) (вероятностей ошибок и условных средних длин последовательности) могут быть получены с использованием подхода, предложенного в работе [3].

Мы предлагаем выбирать параметры  $g_-, g_+$  следующим образом:

$$g_{-/+} = E_{0[1]} \lambda(x_{n-1}, x_n) - [+]\sqrt{E_{0[1]} \lambda^2(x_{n-1}, x_n)}, \quad (5)$$

где  $E_k, k \in \{0, 1\}$ , обозначает математическое ожидание, вычисленное на стационарном распределении  $x_n$  при верной гипотезе  $H_k$ . Выбирая параметры в соответствии с (5), мы снижаем чувствительность теста (4) к большим по модулю значениям  $\lambda(x_{n-1}, x_n)$ , которые могут появиться из-за присутствия выбросов. В то же время средняя длина последовательности до принятия решения (4) в условиях гипотетической модели увеличится незначительно по сравнению с тестом (2), так как только небольшой процент слагаемых в  $\Lambda_n^g$  будет «усечен» функцией  $g(z)$ .

## 2. Результаты численных экспериментов

С помощью имитационного моделирования был проведен сравнительный анализ тестов (2) и (4). Рассматривался следующий частный случай:  $a_0 = 0.2, a_1 = -0.2, P_0 = P_1 = N(0, \sigma), \tilde{P}_0 = \tilde{P}_1 = N(0, \tilde{\sigma}), \sigma = 1, \tilde{\sigma} = 10, \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon$ . Пороги  $C_-, C_+$  вычислялись по формулам  $C_+ = \log(1 - \beta_0) / \alpha_0, C_- = \log \beta_0 / (1 - \alpha_0)$ , где  $\alpha_0, \beta_0$  - “желаемые” вероятности ошибок первого и второго рода. Для пяти различных пар значений  $\alpha_0, \beta_0$  методом Монте-Карло были вычислены оценки вероятностей ошибок  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$  и условных средних длин последовательности  $\hat{t}^{(0)}, \hat{t}^{(1)}$  теста (2), а также оценки  $\hat{\alpha}_g, \hat{\beta}_g, \hat{t}_g^{(0)}, \hat{t}_g^{(1)}$  соответствующих характеристик теста (4). Количество экспериментов для каждого набора параметров составило  $N = 20000$ . Пороги теста (4)  $g_-, g_+$  вычислялись по формулам (5). Результаты численных экспериментов приведены в таблицах 1 и 2 для двух случаев: гипотетическая модель не искажена ( $\varepsilon = 0$ ); модель искажена, вероятность появления выброса

составляет  $\varepsilon = 0.1$ . Результаты компьютерного моделирования позволяют сделать вывод, что «робастифицированный» тест (4) обеспечивает необходимые вероятности ошибок при наличии искажений в модели (отметим, что они практически не превосходят  $\alpha_0, \beta_0$ ) за счет приемлемого увеличения средней длины последовательности.

Таблица 1. Сравнение вероятностей ошибок

$\alpha_0$	$\beta_0$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\alpha}_g$	$\hat{\beta}$	$\hat{\beta}_g$
$\varepsilon = 0$					
0.01	0.01	0.0069	0.006	0.0071	0.0052
0.01	0.05	0.0069	0.0049	0.0357	0.032
0.01	0.1	0.0067	0.006	0.0652	0.0654
0.05	0.05	0.0368	0.0330	0.0368	0.0348
0.1	0.1	0.0741	0.072	0.0734	0.0678
$\varepsilon = 0.1$					
0.01	0.01	0.0491	0.0127	0.0456	0.0126
0.01	0.05	0.0437	0.0119	0.1085	0.0524
0.01	0.1	0.0427	0.0138	0.1584	0.1034
0.05	0.05	0.1027	0.0565	0.1038	0.0534
0.1	0.1	0.1423	0.0922	0.1466	0.0973

Таблица 2. Сравнение средней длины последовательности

$\alpha_0$	$\beta_0$	$\hat{t}^{(0)}$	$\hat{t}_g^{(0)}$	$\hat{t}^{(1)}$	$\hat{t}_g^{(1)}$
$\varepsilon = 0$					
0.01	0.01	62.45	65.23	61.89	65.22
0.01	0.05	43.57	44.66	59.20	61.76
0.01	0.1	34.69	35.88	55.43	58.64
0.05	0.05	40.64	42.25	40.34	42.00
0.1	0.1	29.68	30.65	29.63	30.89
$\varepsilon = 0.1$					
0.01	0.01	37.64	48.26	37.13	48.73
0.01	0.05	27.15	33.05	34.05	45.34
0.01	0.1	22.74	26.94	31.43	41.44
0.05	0.05	24.71	30.61	24.59	30.58
0.1	0.1	18.63	22.35	18.66	22.21

### Литература

1. Вальд А. Последовательный анализ. – М.: Физматгиз, 1960.
2. Хьюбер П. Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984.
3. Кишилов Д.В. Анализ вероятностных характеристик последовательного теста Вальда для проверки простых гипотез о параметрах процесса авторегрессии // Теория вероятностей, случ. процессы, мат. статистика и приложения. Сб. статей межд. конф. - Минск: БГУ, 2005, с. 138 -143.

## РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ПРЕСТАВЛЕНИЯ СОСТОЯНИЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Кишкевич А.П., Ревотюк М.П., БГУИР, Минск

Предмет рассмотрения – реализация алгоритма решения задачи коммивояжера [1] с минимальными изменениями исходной матрицы при переходе от шага к шагу. Потребность учета изменения представления задачи возникает в случае ее распараллеливания и синхронизации агентов распределенных вычислений [2]. Цель исследования – сокращение расхода памяти и, как следствие, объема передаваемых данных между узлами вычислительной сети.

Задача коммивояжера в классической постановке формулируется следующим образом: задана матрица расстояний (стоимости переезда)  $C = \|c_{ij}, i, j = \overline{1, n}\|$  между любым из  $n$  городов, необходимо найти цикл минимальной длины однократного посещения каждого города.

Если решение задачи коммивояжера представить матрицей булевых переменных  $X = \|x_{ij}, i, j = \overline{1, n}\|$ , где единица означает включение в оптимальный цикл дуги  $i \rightarrow j$ , то формальная модель оптимизации имеет вид:

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij} \Rightarrow \min; \\ \sum_{i=1}^n x_{ij} &= 1; \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1; \\ x_{ij} &\geq 0, i, j = \overline{1, n}; \\ u_i - u_j + nx_{ij} &\leq n - 1, i = \overline{2, n}, j = \overline{2, n}, i \neq j. \end{aligned} \tag{1}$$

Модель (1) не является конструктивной для построения эффективной вычислительной схемы решения задачи коммивояжера. Среди точных методов ее решения одним из эффективных считается метод ветвей и границ. Схема алгоритма метода ветвей и границ может быть реализована разными способами, различающимися правилами порождения ветвей дерева вариантов. Наиболее успешным считается подход, базирующийся на решении задач о назначении, анализе получающихся замкнутых циклов и, если таких циклов более одного, последующем переборе вариантов разрыва циклов. Рекурсия обхода дерева строится на матрице расстояний, где разрывы циклов задаются назначением бесконечных значений длин запрещаемых дуг.

Однако далее, для простоты оценок предлагаемых решений, остановимся на классическом варианте алгоритма Литтла [1], основанного на порождении бинарного дерева. В некоторых случаях он не теряет привлекательности [3].

Изменение матрицы расстояний в алгоритме Литтла при рекурсивном переходе от текущего узла дерева вариантов к другим узлам включает [1]:

приведение матрицы – вычитание наименьшего элемента из каждой строки и столбца;

вычеркивание строки и столбца для выбранного на данном этапе перехода и запрет преждевременных замыканий частичного пути.

Чтобы избежать переписывания матрицы (передачи между агентами) в случае ее приведения, предлагается хранить текущие наименьшие элементы по строкам и столбцам. Аналогично, чтобы избежать переписывания матрицы в случае вычеркивания строк и столбцов, будем обращаться к соответствующей строке и столбцу через списки активных строк и столбцов. Измененные элементы этих списков, а также запреты на раннее замыкание и на переход в случае правого ветвления будем помещать в стек обхода дерева вариантов.

На этапе возврата к рассмотрению какой-либо правой ветки дерева, необходимо восстановить из стека только измененные элементы матрицы и списков номеров строк и столбцов. Оценка трудоемкости восстановления –  $O(n)$ .

Достаточно просто оценить объем памяти для рассмотренной схемы. При размерности задачи  $n$  максимально возможная глубина стека не превосходит значения  $n$ . Необходимое количество элементов памяти составит:

$$M_{\Delta C} = n^2 + 2n * (n + 3), \quad (2)$$

где первое слагаемое представляет исходную матрицу  $C$ , а второе – изменения в векторах текущих минимумов, решении и матрице расстояний на каждом шаге, соответственно (множитель 2 появляется из-за необходимости хранения адреса измененного элемента). Отметим, что выражение (2) представляет оценку сверху, а в реальных случаях объем памяти будет практически ниже.

Несложно показать, что объем памяти, необходимой для прямолинейной реализации классического алгоритма Литтла [1]:

$$M_C = n * (n^2 + 2n). \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), легко видеть, что объем памяти в предложенном варианте на один порядок меньше зависит размерности задачи.

Очевидно, что объем памяти для хранения описания изменений матрицы существенно меньше ее размера, что следует использовать для выбора алгоритма синхронизации данных, кэшируемых отдельными агентами.

Результаты эксперимента по оценке эффективности реализации алгоритма Литтла рекурсивной процедурой обхода узлов дерева на основе копирования матриц и их модификации с откатом подтверждают преимущество разностных схем. Потери времени на восстановление состояния узла дерева решений оказались незначительными. Таким образом, при выборе структур данных представления задачи для распределенных вычислений в случае взаимозависимых вариантов [2] следует отдать предпочтение разностным схемам с целью минимизации трафика на определение задач агентам.

### Литература

1. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р. Алгоритмы: построение и анализ/Пер. с англ. – М.: МЦМНО, 2002. – 960 с.
2. Ревотюк М.П., Кузнецова Н.В. Агентная система кооперации ресурсов вычислительной среды для решения задач выбора//Известия Белорусской инженерной академии, № 1(15)/1, 2003. – С. 265-268.
3. Gutin G., Yeo A. Assignment problem based algorithms are impractical for the generalized TSP. Australasian J. Combinatorics, vol. 27, 2003. – pp. 149-154.



## ПОСТРОЕНИЕ ОДНОЭТАПНОЙ ПРОЦЕДУРЫ МНОЖЕСТВЕННОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ СО «СВИДЕТЕЛЕМ»

Костевич А. Л., Милованова И. С., БГУ, Минск

### Введение

В различных практических задачах требуется одновременное применение набора статистических критериев для проверки нулевых гипотез, например, в криптографии, медицине [1] и др. Для этого используются процедуры множественной проверки гипотез, среди которых можно выделить одноэтапные процедуры, для которых показатель  $FWER$  (вероятность ошибки хотя бы одного критерия при истинной нулевой гипотезе) не превосходит заданного значения. Общепринятым способом [2] контроля  $FWER$  является выбор малых уровней значимости для каждого критерия, так как большие значения приводят к увеличению числа ложных тревог. Однако при большом числе критериев такой подход приводит к снижению мощности процедур [2]. В данной статье предлагается процедура, основанная на другом принципе контроля  $FWER$  — использовании части критериев набора в качестве «свидетелей» для отсева ложных тревог.

### Математическая модель

Пусть имеется  $m$  пар критериев  $(C_1^{(1)}, C_1^{(2)}), \dots, (C_m^{(1)}, C_m^{(2)})$  для проверки нулевой гипотезы  $H_0$  против альтернатив  $H_{1,1}, \dots, H_{1,m}$  соответственно. Будем полагать, что решения критериев  $C_i^{(1)}, C_i^{(2)}, i = \overline{1, m}$  на большей части выборочного пространства совпадают, но они не являются эквивалентными в том смысле, что на некоторых выборках они принимают различные решения.

Предложим процедуру проверки  $H_0$ , состоящую из двух этапов.

Этап 1 состоит в проверке  $H_0$  с помощью критериев  $\{C_i^{(1)}\}, i = \overline{1, m}$  на уровне значимости  $\alpha_1$ . Обозначим  $J^{(1)}$  — множество индексов критериев, отвергнувших гипотезу  $H_0$  на данном этапе.

Этап 2 состоит в уточнении множества принятых альтернатив  $J^{(1)}$  с целью отсева ложных тревог критериев первого этапа с помощью проверки  $H_0$  критериями-«свидетелями»  $\{C_i^{(2)}\}, i \in J^{(1)}$  на уровне значимости  $\alpha_2$ . Пусть  $J^{(2)}$  — множество индексов критериев, отвергнувших  $H_0$  на втором этапе.

Определим итоговое решение процедуры:

$$\text{принимается гипотеза} \begin{cases} H_0, \text{ если } J^{(1)} = \emptyset \text{ или } J^{(2)} = \emptyset, \\ H_1 = H_{1,1} \cup \dots \cup H_{1,m}, \text{ иначе.} \end{cases} \quad (1)$$

Задача данной работы состоит в исследовании вероятности ошибки первого рода (показателя  $FWER$ )  $\alpha^* = \mathbf{P}\{\text{принять } H_1 \mid H_0 \text{ истинна}\}$  процедуры (1) в зависимости от уровней значимости  $\alpha_1, \alpha_2$  критериев следующего вида:

$$C_i^{(j)} \text{ принимает гипотезу} \begin{cases} H_0, \text{ если } \hat{s}_i^{(j)} = \left| \frac{s_i^{(j)} - \mu_i^{(j)}}{\sigma_i^{(j)}} \right| \leq \Delta_j = \Phi^{-1}(1 - \alpha_j/2), \\ H_{1,i}, \text{ иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где статистики  $\{s_i^{(j)}\}$  критериев  $\{C_i^{(j)}\}$  при истинной гипотезе  $\mathbf{H}_0$  имеют нормальное распределение с параметрами  $\mu_i^{(j)}, \sigma_i^{(j)2}$ , а совместное распределение статистик  $(s_i^{(1)}, s_i^{(2)})$  является двумерным нормальным распределением,  $\text{corr}(s_i^{(1)}, s_i^{(2)}) = \rho_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = 1, 2$ .

### Исследование вероятности ошибки первого рода

Оценим вероятность ошибки первого рода  $\alpha^*$  процедуры (1).

**Теорема.** Для вероятности ошибки первого рода (показателя FWER)  $\alpha^*$  процедуры (1) с критериями (2) справедливо следующее утверждение:

$$\alpha^* \leq \alpha_+(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^m \left[ \alpha_1 + \alpha_2 - 1 + \int_{-\Delta_1}^{\Delta_1} \int_{-\Delta_2}^{\Delta_2} p(x, y | \rho_i) dx dy \right], \quad (3)$$

где  $p(\cdot, \cdot | \rho_i)$  — совместная плотность распределения статистик  $(\dot{s}_i^{(1)}, \dot{s}_i^{(2)})$ .

Для верхней границы справедливо также следующее разложение в ряд:

$$\alpha_+(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^m \left[ \alpha_1 \alpha_2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4 p^{(2k-1)}(\Delta_1(\alpha_1)) p^{(2k-1)}(\Delta_2(\alpha_2))}{(2k)!} \rho_i^{2k} \right], \quad (4)$$

где  $p^{(k)}(\Delta)$  —  $k$ -я производная плотности стандартного нормального распределения в точке  $\Delta$ .

*Доказательство* основано на использовании неравенства Бонферрони. ■

**Свойство.** Функция  $\alpha_+(\alpha_1, \alpha_2)$  при фиксированном значении одного аргумента убывает по второму аргументу.

Разложение (4) удобно использовать для вычисления  $\alpha_+$  на практике. Найденная верхняя граница (3) может быть использована для нахождения уровней  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  по заданному уровню значимости  $\alpha$  всей процедуры. Свойство монотонности позволяет находить методом половинного деления уровень значимости одного этапа процедуры при фиксированных значениях уровней значимости другого этапа и всей процедуры.

### Вычислительный эксперимент

Для исследования эффективности построенной процедуры проводились численные эксперименты для проверки гипотезы  $\mathbf{H}_0 : \{X_t\}$  — независимые, одинаково распределенные с.в.,  $\mathbf{P}\{X_t = 1\} = \mathbf{P}\{X_t = 0\} = 0.5$  по выборке  $X$  объема  $n$ . На первом этапе применялось 8 критериев шаблонов  $h_1^{(i)} h_2^{(i)} h_3^{(i)}$  длины 3 по непересекающимся интервалам со статистиками  $s_i^{(1)} = \sum_{j=1}^{\lceil n/3 \rceil} \mathbf{1}\{X_{3j-2} = h_1^{(i)}, \dots, X_{3j} = h_3^{(i)}\}$ ,  $i = \overline{1, m}$ . В качестве критериев-«свидетелей» использовались критерии шаблонов по пересекающимся интервалам,  $s_i^{(2)} = \sum_{j=1}^{n-2} \mathbf{1}\{X_j = h_1^{(i)}, \dots, X_{j+2} = h_3^{(i)}\}$ . Пары критериев  $C_i^{(1)}, C_i^{(2)}$ , относящиеся к одинаковым шаблонам, не являются эквивалентными, т.к.  $|\rho_i| \neq 1$ ,  $i = \overline{1, 8}$ . Для значений  $\alpha_1 = 0.01$ ,  $\alpha_2 = 0.02$  согласно (3) было найдено теоретическое значение  $\alpha_+ = 0.019428$ . На рис. 1 приведены экспериментальные значения  $\alpha^*$  процедуры (1)

(сплошная тонкая линия) в зависимости от длины выборки  $n$ . Как видно, значение  $\alpha_+$ , попадает в 95%-й доверительный интервал (пунктир).

Вторая серия экспериментов (рис. 2) проводилась для сравнения мощности процедуры (1) (сплошная линия) с процедурой Бонферрони (длинный пунктир), построенной по критериям шаблонов длины 3 по непересекающимся интервалам. Индивидуальный уровень значимости процедуры Бонферрони выбирался согласно [1] равным  $\alpha_c = 0.019428/8 = 0.0024285$ . Как видно, процедура Бонферрони проигрывает по мощности построенной двухэтапной процедуре на альтернативе  $H_1 : P\{X_i = 1\} = 0.53$ .

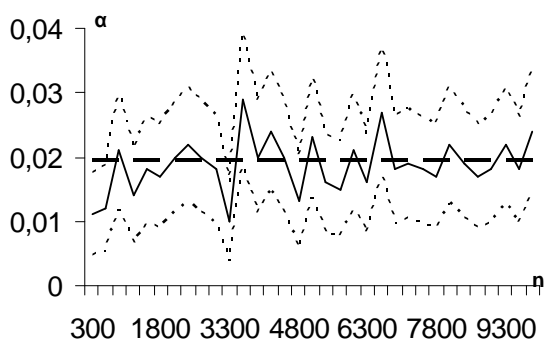


Рис. 1. Оценка вероятности ошибки первого рода построенной процедуры

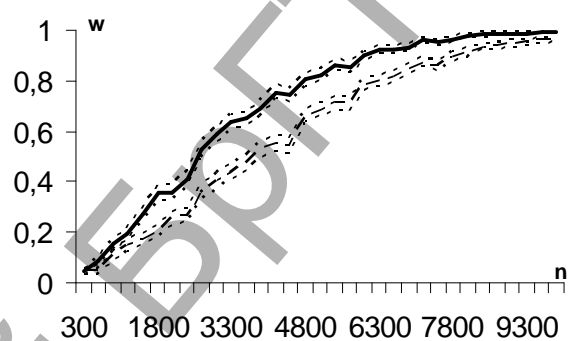


Рис. 2. Сравнение мощности построенной процедуры и процедуры Бонферрони

### Литература

1. Aickin M., Gensler H. Adjusting for Multiple Testing When Reporting Research Results: The Bonferroni vs Holm Methods // Public Health Briefs, 1996, v.86, №5.
2. Lehmann E. L., Romano J. P. Generalizations of the familywise error rate // Annals of Statistics, 2005, v. 33, № 3, P. 1138-1154.

## ПОСТРОЕНИЕ КРИТЕРИЯ СОГЛАСИЯ ДЛЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА БОЛЬШОЙ СВЯЗНОСТИ

Костевич А. Л., Шилкин А.В., БГУ, Минск

### Введение

Многие задачи криптографии, например генерация ключей, предварительный анализ стойкости криптографических примитивов, требуют применения статистических критериев для обнаружения отклонений от модели независимых симметричных испытаний Бернулли. Одной из важных моделей отклонений является наличие марковской зависимости большого порядка связности  $L=32, 64, 128$  и алфавитом мощности  $N$ . Применение классических методов выявления марковской зависимости [1] является невозможным ввиду большого числа параметров  $N^L(N-1)$ .

В данной статье предлагается подход к построению критерия согласия о значении матрицы вероятностей одношаговых переходов цепи Маркова большой связности, основанный на замене задачи проверки гипотезы согласия задачей прогнозирования реализации цепи Маркова. Работоспособность предлагаемого подхода иллюстрируется на примере MTD-модели цепи Маркова большой связности [2].

**Построение критерия согласия**

Пусть  $X = (X_{-m}, \dots, X_0, \dots, X_n)$  реализация  $L$ -связной цепи Маркова с алфавитом  $1, \dots, N$  и неизвестной матрицей вероятностей одношаговых переходов  $P^0 = (p_{i_1, i_2, \dots, i_L, j}^0)$ , о которой выдвинута простая гипотеза  $H_0 : P^0 = \hat{P}$ , где  $\hat{P} = (\hat{p}_{i_1, i_2, \dots, i_L, j})$  — оценка матрицы  $P^0$ , построенная каким-либо способом по первому фрагменту выборки  $(X_{-m}, \dots, X_0)$ . Для проверки гипотезы  $H_0$  по второму фрагменту выборки  $(X_1, \dots, X_n)$  для каждого наблюдения будем строить его прогноз по предыдущим  $L$  наблюдениям с использованием принципа максимального правдоподобия и индикатор успеха прогноза:

$$\hat{X}_t = \arg \max_{j \in \{1, \dots, N\}} \hat{P}_{X_{t-L}, \dots, X_{t-1}, j}; Y_t = I\{\hat{X}_t = X_t\} \quad (1)$$

В результате формируется выборка  $Y$ . Исходя из (1), имеет место следующее свойство случайных величин  $Y_t$ :

$$P\{Y_t = y_t | Y_{t-1}, \dots, Y_1, X_{-L+1}, \dots, X_n\} = P\{Y_t = y_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-L}\}, \quad t = 1, 2, \dots, n.$$

**Теорема 1.** Логарифмическая функция правдоподобия для выборки  $Y$  равна:

$$l\{Y | X, P\} = \sum_{i_1, \dots, i_L} n_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^P}^{(1)} \ln P_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^P} + \sum_{i_1, \dots, i_L} n_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^P}^{(0)} \ln(1 - P_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^P}),$$

$$j_{\max}^P = \arg \max_{j \in \{0, 1, \dots, N-1\}} P_{i_1, \dots, i_L, j},$$

$$n_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^P}^{(1)} = \sum_{t=1}^n I\{X_{t-L} = i_L, \dots, X_{t-1} = i_1, X_t = j_{\max}^P\} \times I\{Y_t = 1\},$$

$$n_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^P}^{(0)} = \sum_{t=1}^n I\{X_{t-L} = i_L, \dots, X_{t-1} = i_1, X_t \neq j_{\max}^P\} \times I\{Y_t = 0\}.$$

Рассмотрим, как изменится функция правдоподобия при внесении искажений в матрицу  $P^0$ .

**Теорема 2.** Пусть  $P_{i_1, \dots, i_L, j}^1 = P_{i_1, \dots, i_L, j}^0 (1 + \varepsilon_{i_1, \dots, i_L, j})$ . Тогда

$$l\{Y | X, P^1\} - l\{Y | X, P^0\} = \sum_{i=0}^1 \sum_{i_1, \dots, i_L} [n_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^{P^1}}^{(i)} \ln(\delta_{i,0} +$$

$$+ (-1)^{\delta_{i,0}} P_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^{P^1}}^0 (1 + \varepsilon_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^{P^1}})) - n_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^{P^0}}^{(i)} \ln(\delta_{i,0} + (-1)^{\delta_{i,0}} P_{i_1, \dots, i_L, j_{\max}^{P^0}}^0)]$$

где  $\delta_{i,j} = I\{i=j\}$  — символ Кронекера.

Рассмотрим проверку гипотезы  $H_0$  о чистой случайности исходной бинарной выборки  $X$  против альтернативной гипотезы  $H_1$  о наличии в ней марковской зависимости порядка  $L$ . В случае верной  $H_0$  последовательность прогнозов будет являться последовательностью независимых испытаний Бернулли с  $p = P(Y_t = 1) = 0.5$ . В случае верной  $H_1$  будет выполняться  $p = 0.5 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда проверку исходных гипотез можно заменить на проверку гипотезы о значении вероятности успеха прогноза  $p = P(Y_t = 1)$ :  $H_0 : p = 0.5$  против альтернативы  $H_1 : p > 0.5$ . Для проверки такой гипотезы будем использовать критерий хи-квадрат:

$$\text{принимается } \begin{cases} H_0, & \chi^2 < \Delta, \\ H_1, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \chi^2 = \sum_{i=0}^1 \frac{(v_i - n/2)^2}{n/2}, \quad v_i = \sum_{t=1}^n I\{Y_t = i\},$$

где  $\Delta$  — квантиль уровня  $\alpha$  хи-квадрат распределения с 1 степенью свободы.

### Вычислительный эксперимент

Для проведения вычислительного эксперимента в качестве цепи Маркова большого порядка связности использовалась бинарная МТД-модель [2] связности 32:  $P_{i_1, \dots, i_L, j} = \sum_{u \in \{1, \dots, 32\}} \lambda_u q_{i_u j}$ , где  $\lambda = (\lambda_u)$  — вектор весовых коэффициентов ( $0 \leq \lambda_u < 1$ ,  $\sum_u \lambda_u = 1$ ),  $Q = (q_{ij})$  — матрица вероятностей одношаговых переходов. В экспериментах использовались следующие значения:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}, \quad \lambda = (0.1, 0.0039, 0.0039, \dots, 0.0039, 0.0039, 0, 0.0039, 0.1454)$$

В качестве алгоритма, оценивающего параметры МТД-цепи Маркова, был использован EM-алгоритм [3], который применялся к первому фрагменту выборки объема  $m=4000$ . По второму фрагменту выборки, объем которого изменялся от 100 до 10000, по методу Монте-Карло были построены оценки вероятности ошибки первого рода (см. рис. 1) и мощности (см. рис. 2). Из рис. 1, 2 можно видеть, что значения оценки вероятности ошибки первого рода колеблются возле уровня значимости критерия  $\alpha = 0.05$ , а мощность стремится к единице с ростом объема второго фрагмента. Отметим, что на результаты эксперимента влияет выбор начального приближения EM-алгоритма.

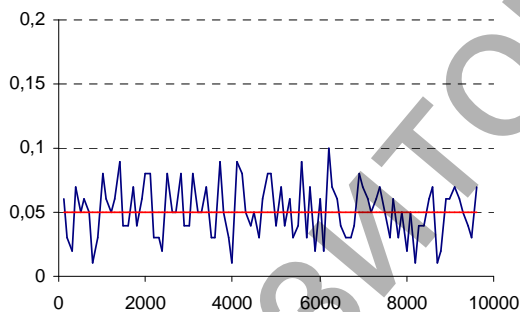


Рис. 1

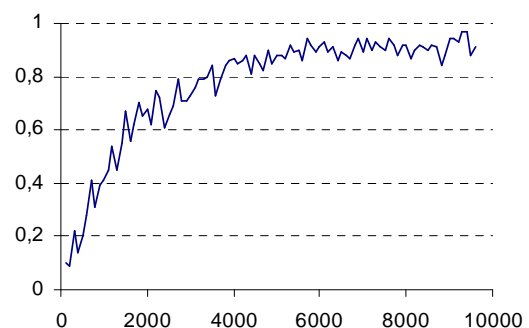


Рис. 2

Эксперимент иллюстрирует, что критерий обладает заданным уровнем значимости и является состоятельным. Отметим, что предложенный метод был успешно применен к выборке объема порядка  $2^{14}$ , в то время как использование классических методов проверки гипотезы согласия потребовало бы выборку объема порядка  $2^{34}$ .

### Литература

1. Billingsley P. Statistical Methods in Markov Chains // The Annals of Mathematical Statistics. — 1961. — Vol. 32. — p. 12-40.
2. Raftery A. E. A model for high-order Markov chains // Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B — 1985. — Vol. 3. — p. 528-539.
3. Костевич А.Л. EM-алгоритм оценивания параметров МТД-модели цепи Маркова большого порядка связности // Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике (Брест): сборник научных статей международной конференции. — Минск: БГУ, 2004. — с. 98-103.

## О ДИАМЕТРЕ ГРАФА РАЗНОСТНЫХ ПЕРЕХОДОВ СЛУЧАЙНОЙ ПОДСТАНОВКИ

Маслов А.С., БГУ, Минск

Пусть  $G$  — конечная группа в мультипликативной записи,  $e$  — единица  $G$ ,  $G^* = G \setminus \{e\}$  и  $S(G)$  — множество всех подстановок, действующих на  $G$ . Пусть  $s \in S(G)$ ,  $x_0, x'_0$  — различные элементы  $G$ ,  $a_1, a_2, \dots$  — независимые случайные величины с равномерным на  $G$  распределением вероятностей и

$$x_t = s(x'_{t-1}a_t), \quad x'_t = s(x_{t-1}a_t), \quad \beta_t = x'_t x_t^{-1}, \quad t = 1, 2, \dots$$

Введённая последовательность  $(\beta_t)$  является траекторией однородной цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$P_s = (p_{\alpha\beta}), \quad p_{\alpha\beta} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \mathbf{I}\{s(\alpha x) = \beta s(x)\}, \quad \alpha, \beta \in G^*, \quad (1)$$

где  $\mathbf{I}\{E\}$  — индикатор наступления события  $E$ . Последовательность  $(\beta_t)$  принято называть последовательностью разностей подстановки  $s$ , поскольку в первоначальных работах [1, 2] рассматривались абелевы группы, и  $p_{\alpha\beta}$  в этом случае характеризует вероятность перехода от входной разности  $x' - x = \alpha$  к выходной разности  $s(x' + a) - s(x + a) = \beta$ . Обобщение понятия разности на случай произвольных групп было сделано в работе [3].

Графом разностных переходов подстановки  $s \in S(G)$  назовём граф переходов цепи Маркова (1).

**Теорема 1.** Почти для всех подстановок из множества  $S(G)$  диаметр графа разностных переходов равен 2.

Теорема означает, что для произвольных  $\alpha, \beta \in G^*$  найдётся  $\gamma \in G^*$  такое, что  $p_{\alpha\gamma} > 0$  и  $p_{\gamma\beta} > 0$ , т.е. переход от состояния  $\alpha$  к состоянию  $\beta$  можно осуществить за два шага.

Свойства цепи Маркова (1) связаны со свойствами группы  $F_s \subseteq S(G)$ , порождённой подстановками  $f_a : x \mapsto s(xa)$ ,  $x, a \in G$ .

**Теорема 2.** Если граф разностных переходов является сильно связным, то группа  $F_s$  дважды транзитивна, т.е. для произвольных различных  $x_1, x_2 \in G$  и произвольных различных  $y_1, y_2 \in G$  найдётся  $\sigma \in F_s$  такая, что  $\sigma(x_i) = y_i$ ,  $i = 1, 2$ . При этом  $\sigma$  может быть представлена в следующем виде

$$\sigma = f_{a_k} f_{a_{k-1}} \dots f_{a_1}, \quad k \leq d + 1,$$

Где  $d$  — диаметр графа разностных переходов.

**Литература**

1. Biham E., Shamir A. Differential cryptanalysis of DES-like cryptosystems // J. of Cryptology, vol. 4, pp. 3–72, 1991.
2. Biham E., Shamir A. Differential cryptanalysis of the full 16-round DES // Advances in Cryptology, CRYPTO'92, LNCS vol. 740, pp. 487–496, 1993.
3. Lai X., Massey J., Murphy S. Markov Ciphers and Differential Cryptanalysis // Advances in Cryptology, EUROCRYPT'91, pp. 17–38, 1991.

## К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ИТЕРАЦИИ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕ ЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ.

Матысик О.В., Голубцов И.А., БрГУ им. А.С. Пушкина, Брест

### 1. Введение

Среди математических задач выделяется большой класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они принадлежат к классу некорректно поставленных задач. Для их решения находят применение итеративные методы, которые легко программируются на ЭВМ. В данной работе предлагается новый итеративный метод для решения некорректных задач.

### 2. Постановка задачи

Решается операторное уравнение

$$Ax = y \quad (1)$$

с положительным ограниченным и самосопряженным оператором  $A: H \rightarrow H$ , в предположении, что нуль не является собственным значением оператора  $A$ . Причем  $0 \in S_A$ , то есть задача некорректна. Если решение уравнения (1) существует, то для его отыскания предлагается явный итеративный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + \alpha Ay, \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

### 3. Случай не единственного решения в методе (2) решения операторных уравнений

Покажем, что метод (2) пригоден и тогда, когда  $\lambda = 0$  является собственным значением оператора  $A$  (в этом случае уравнение (1) имеет не единственное решение). Обозначим через  $N(A) = \{x \in H / Ax = 0\}$ ,  $M(A)$  – ортогональное дополнение ядра  $N(A)$  до  $H$ . Пусть  $P(A)x$  – проекция  $x \in H$  на  $N(A)$ , а  $\Pi(A)x$  – проекция  $x \in H$  на  $M(A)$ . Справедлива

**Теорема.** Пусть  $A \geq 0$ ,  $y \in H$ ,  $0 < \alpha < 2\|A\|^{-2}$ , тогда для итеративного процесса (2) верны следующие утверждения

а)  $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$ ,  $\|Ax_n - y\| \rightarrow J(A, y) = \inf_{x \in H} \|Ax - y\|$ ,

б) (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение  $Ax = \Pi(A)y$  разрешимо. В последнем случае  $x_n \rightarrow P(A)x_0 + \hat{x}$ , где  $\hat{x}$  – минимальное решение уравнения.

### Доказательство

Применив оператор  $A$  к (2), получим

$$Ax_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2[P(A)y + \Pi(A)y - Ax_{n-1}], \quad \text{где } y = P(A)y + \Pi(A)y. \quad \text{Так как } AP(A)y = 0, \text{ то } Ax_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2[\Pi(A)y - Ax_{n-1}].$$

Последнее равенство запишется в виде  $v_n = v_{n-1} - \alpha A^2 v_{n-1}$ , где  $v_n = Ax_n - \Pi(A)y$  и  $v_n \in M(A)$ . Отсюда  $v_n = (E - \alpha A^2)^n v_0$ . Имеем  $A^2 \geq 0$  и  $A^2 -$

положителен в  $M(A)$ , то есть  $(Ax, x) > 0 \quad \forall x \in M(A)$ . Так как  $0 < \alpha < 2\|A\|^{-2}$ , то  $\|E - \alpha A^2\| < 1$ , поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \|v_n\| &= \|(E - \alpha A^2)^n v_0\| = \left\| \int_0^M (1 - \alpha \lambda^2)^n dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\delta_0} (1 - \alpha \lambda^2)^n dE_\lambda v_0 \right\| + \\ &+ \left\| \int_{\delta_0}^M (1 - \alpha \lambda^2)^n dE_\lambda v_0 \right\| \leq \left\| \int_0^{\delta_0} dE_\lambda v_0 \right\| + q^n (\delta_0) \left\| \int_{\delta_0}^M dE_\lambda v_0 \right\| = \\ &= \|E_{\delta_0} v_0\| + q^n (\delta_0) \|v_0 - E_{\delta_0} v_0\| < \varepsilon \quad \text{при } \delta_0 \rightarrow 0 \text{ и } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,  $v_n \rightarrow 0$ , откуда  $Ax_n \rightarrow \Pi(A)y$  и  $\Pi(A)y \in A(H)$ .

$$\|Ax_n - y\| \rightarrow \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = J(A, y).$$

Итак, утверждение а) доказано. Докажем утверждение б).

Пусть процесс (2) сходится, покажем, что уравнение  $Ax = \Pi(A)y$  разрешимо. Из сходимости  $\{x_n\} \in H$  к  $z \in H$  и из а) следует  $Ax_n \rightarrow Az = \Pi(A)y$ , следовательно,  $\Pi(A)y \in A(H)$  и уравнение  $\Pi(A)y = Ax$  разрешимо.

Пусть теперь  $\Pi(A)y \in A(H)$  (уравнение  $Ax = \Pi(A)y$  разрешимо), следовательно,  $\Pi(A)y = A\hat{x}$ , где  $\hat{x}$  – минимальное решение уравнения  $Ax = y$  (оно единственно в  $M(A)$ ). Тогда (2) примет вид

$$\begin{aligned} x_n &= x_{n-1} + \alpha A[\Pi(A)y - Ax_{n-1}] = x_{n-1} + \alpha A(A\hat{x} - Ax_{n-1}) = \\ &= x_{n-1} + \alpha A^2(\hat{x} - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Разобьем последнее равенство на два:

$$\begin{aligned} P(A)x_n &= P(A)x_{n-1} + \alpha P(A)A^2(\hat{x} - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} + \alpha A [AP(A)(\hat{x} - \\ &- x_{n-1})] = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0, \quad \text{так как } AP(A)(\hat{x} - x_{n-1}) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi(A)x_n &= \Pi(A)x_{n-1} - \alpha \Pi(A)A^2(x_{n-1} - \hat{x}) = \Pi(A)x_{n-1} - \\ &- \alpha A^2[\Pi(A)x_{n-1} - \Pi(A)\hat{x}] = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha A^2[\Pi(A)x_{n-1} - \hat{x}], \end{aligned}$$

так как  $\hat{x} \in M(A)$ . Обозначим  $\omega_n = \Pi(A)x_n - \hat{x}$ , тогда  $\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha A^2 \omega_{n-1}$  и, аналогично  $v_n$ , можно показать  $\omega_n \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно,  $\Pi(A)x_n \rightarrow \hat{x}$ . Отсюда  $x_n = \Pi(A)x_n + P(A)x_n \rightarrow P(A)x_0 + \hat{x}$ , ч.т.д.

*Замечание.* Так как у нас  $x_0 = 0$ , то  $x_n \rightarrow \hat{x}$ , то есть процесс (2) обеспечивает сходимость к нормальному решению, то есть к решению с минимальной нормой.



## СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Новохрост В.Г., БГУ, Минск

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке  $T = [0, a] \subset \mathbf{R}$ :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(X(t))\dot{L}(t), \\ X(0) = x_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь функция  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  ограничена и имеет конечное число точек разрыва;  $L: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  – непрерывная функция ограниченной вариации, а  $\dot{L}$  – ее обобщенная производная.

Данная задача, вообще говоря, не является корректной с точки зрения классической теории дифференциальных уравнений в силу разрывности функции  $f$ .

Подобного рода некорректные задачи исследовались и ранее. Один из подходов связан с рассмотрением уравнений в алгебре мнемофункций. Так в [1] описаны решения уравнения (1) с непрерывной функцией  $f$ , но разрывной функцией  $L$ .

Второй подход основан на теории дифференциальных включений, детально разработанной в [2].

В данной работе под решением уравнения (1) мы будем понимать решение следующего дифференциального включения с соответствующими начальными условиями:

$$\begin{cases} \dot{X}(t) \in F(X(t))\dot{L}(t), \\ X(0) = x_0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $F$  – многозначная функция, которая получается путем некоторого доопределения функции  $f$ . Вообще говоря, существует несколько способов доопределения функции  $f$  до многозначной функции  $F$ . Мы будем рассматривать так называемый метод *простейшего выпуклого доопределения*, в котором  $F(x)$  есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки  $f(x^*)$ ,  $x^* \rightarrow x$ ,  $x^* \neq x$ . Таким образом, для ограниченной функции  $f$  получаем  $F: \mathbf{R} \rightarrow E(\mathbf{R})$ , где  $E(\mathbf{R})$  – множество ограниченных замкнутых выпуклых подмножеств из  $\mathbf{R}$ .

Определение 1. Под решением дифференциального включения (2) будем понимать такую непрерывную функцию  $X(t)$ , для которой существует следующее интегральное представление

$$X(t) = \int_0^t u(s) dL(s),$$

где  $u(t) \in F(X(t))$  для всех  $t \in T$ . Функция  $u(\cdot)$  называется селектором многозначного отображения  $F$ .

Условия существования решений задачи (2) представлены в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть функция  $f$  ограничена и имеет конечное число точек разрыва. Многозначная функция  $F$  получена из функции  $f$  методом простейшего выпуклого доопределения, функция  $L$  – непрерывная функция ограниченной вариации. Тогда решение задачи (2) существует.

Пусть функция  $f$  ограничена и имеет конечное число точек разрыва, тогда ее можно представить в виде

$$f(t) = f^c(t) + f^d(t),$$

где функции  $f^c$  и  $f^d$  – соответственно непрерывная и разрывная составляющие функции  $f$ , причем, разрывная составляющая  $f^d$  также будет иметь конечное число точек разрыва.

В следующих теоремах представлены достаточные условия единственности решений задачи (2).

**Теорема 2.** Пусть функция  $f$  ограничена, имеет конечное число точек разрыва, в окрестностях которых она сохраняет знак, и функция  $f^c$  – непрерывная составляющая функции  $f$  является липшицевой функцией на отрезке  $T$ . Многозначная функция  $F$  получена из функции  $f$  методом простейшего выпуклого доопределения, функция  $L$  является непрерывной функцией ограниченной вариации. Тогда решение дифференциального включения (2) единственно.

**Теорема 3.** Пусть функция  $f$  ограничена, имеет конечное число точек разрыва и функция  $f^c$  – непрерывная составляющая функции  $f$  является липшицевой функцией на отрезке  $T$ . Многозначная функция  $F$  получена из функции  $f$  методом простейшего выпуклого доопределения. Функция  $L$  является монотонной и непрерывной, и  $x_0$  не является точкой разрыва функции  $f$ . Тогда решение дифференциального включения (2) единственно.

**Замечание 1.** Условие того, что  $x_0$  не является точкой разрыва функции  $f$  в условиях теоремы 3 существенно для единственности решений задачи (2).

### Литература

1. Ковальчук А.Н., Новохрост В.Г., Яблонский О.Л., Об аппроксимации дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами конечно-разностными уравнениями с осреднением // Известия ВУЗов. Математика. – 2005. – №3 – с.23-31.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 223 с.

## О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ ИТЕРАТИВНОГО МЕТОДА

Савчук В.Ф., Голубцов И.А., БрГУ им. А.С.Пушкина, Брест

### 1. Постановка задачи

Решается операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным и самосопряженным оператором  $A: H \rightarrow H$ , в предположении, что нуль не является собственным значением оператора  $A$ . Причем  $0 \in S_A$ , то есть задача некорректна. Если решение уравнения (1) существует, то для его отыскания предлагается явный итеративный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + \alpha Ay, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью  $\delta$ , то есть  $y_\delta$ , для которой  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ , поэтому вместо (2) приходится рассматривать приближения

$$x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2)x_{n,\delta} + \alpha A y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

### 2. Сходимость метода при точной правой части уравнения

Изучим сходимость метода (3) в энергетической норме гильбертова пространства  $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ ,  $x \in H$ . При этом, как обычно, число итераций  $n$  нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности  $\delta$ . Полагаем, что  $x_{0,\delta} = 0$  и рассмотрим разность

$$x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta}). \quad (4)$$

По индукции нетрудно показать, что  $x - x_n = A^{-1}(E - \alpha A^2)^n y = (E - \alpha A^2)^n x$ . В исходной норме гильбертова пространства  $x - x_n$  оказывается бесконечно малым при  $n \rightarrow \infty$ , но скорость сходимости при этом может быть сколь угодно малой, и для ее оценки нужно дополнительное требование на гладкость точного решения  $x$ , то есть  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ . При использовании энергетической нормы, нам это дополнительное предположение не потребуется.

Действительно, с помощью интегрального представления само-сопряженного оператора получим:

$$\|x - x_n\|_A^2 = (A(x - x_n), (x - x_n)) = (A(E - \alpha A^2)^n x, (E - \alpha A^2)^n x) = \int_0^M \lambda(1 - \alpha \lambda^2)^{2n} d(E_\lambda x, x), \quad \text{где}$$

$M = \|A\|$ ,  $E_\lambda$  – соответствующая спектральная функция,  $E$  – единичный оператор.

Для оценки интересующей нас функции найдем максимум подинтегральной функции  $f(\lambda) = \lambda(1 - \alpha \lambda^2)^{2n}$  при  $\lambda \in [0, M]$ . Функция  $f(\lambda)$  – частный случай при  $s = 1$  функции, оцененной в [1,2]. Поэтому при условии

$$0 < \alpha \leq \frac{5}{4M^2} \quad (5)$$

справедлива следующая оценка  $\max_{\lambda \in [0, M]} |f(\lambda)| \leq (4n\alpha e)^{-1/2}$ . Следовательно,

$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq (4n\alpha e)^{-1/4} \|x\|$ . Таким образом, переход к энергетической норме как бы заменяет предположение об истокпредставимости порядка  $s = 1/4$  для точного решения.

### 3. Сходимость метода при приближенной правой части уравнения

Оценим второе слагаемое в (4). Справедливо равенство

$$x - x_{n,\delta} = A^{-1} \left[ E - (E - \alpha A^2)^n \right] (y - y_\delta).$$

$$\text{Отсюда } \|x - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_0^M \lambda^{-1} \left[ 1 - (1 - \alpha \lambda^2)^n \right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Обозначим через  $g_n(\lambda)$  подинтегральную функцию и оценим ее сверху. По индукции можно доказать, что при выполнении (5)

$$g_n(\alpha) \leq \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} 4n^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \delta^2, \quad n \geq 1, \quad g_n(\alpha) \leq 4n^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} \delta^2, \quad n \geq 2.$$

Нетрудно доказать, что  $\max_{\lambda \in [0, M]} g_n(\alpha)$  имеет при  $n \rightarrow \infty$  порядок  $n^{1/2}$ , поэтому найденная оценка для  $g_n(\lambda)$  верна по порядку. Значит, при условии (5)

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{5}{4}\right)^3 2n^4 \alpha^4 \delta, n \geq 1, \quad \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq 2n^4 \alpha^4 \delta, n \geq 2.$$

Так как  $\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \|x - x_n\|_A + 2n^4 \alpha^4 \delta, n \geq 2$  и  $\|x - x_n\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , то для сходимости  $\|x - x_{n,\delta}\|_A \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , достаточно, чтобы  $n^{1/4} \delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ .

В этом случае метод (3) обеспечивает сходимость последовательности приближений к точному решению в энергетической норме гильбертова пространства  $H$ . Итак, доказана

**Теорема 1.** Итерационный процесс (3) при условии (5) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций  $n$  выбирать так, чтобы  $n^{1/4} \delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ .

Запишем теперь общую оценку погрешности для метода (3)

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{5}{4}\right)^3 2n^4 \alpha^4 \delta + (4n\alpha e)^{-1/4} \|x\|, n \geq 1, \quad (6)$$

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq 2n^4 \alpha^4 \delta + (4n\alpha e)^{-1/4} \|x\|, n \geq 2. \quad (7)$$

Оптимизируем полученную оценку (7) по  $n$ , то есть при заданном  $\delta$  найдем такое значение числа итераций  $n$ , при котором оценка погрешности становится минимальной. Приравняв нулю производную по  $n$  от правой части неравенства (7), получим

$$n_{\text{опт}} = 2^{-3} \alpha^{-1} e^{-1/2} \delta^{-1} \|x\|. \quad (8)$$

В результате подстановки  $n_{\text{опт}}$  в (7) имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A^{\text{опт}} \leq 2^{1/8} e^{-1/8} \delta^{1/2} \|x\|^{1/2}, n \geq 2. \quad (9)$$

Оптимальная оценка погрешности не зависит от  $\alpha$ , но  $n_{\text{опт}}$  зависит от  $\alpha$ , поэтому для уменьшения  $n_{\text{опт}}$ , то есть числа итераций, необходимых для достижения оптимальной точности, следует брать  $\alpha$  возможно большим, удовлетворяющим условию (5), и так, чтобы  $n_{\text{опт}}$  было целым. Таким образом, доказана

**Теорема 2.** При условии (5) оптимальная оценка погрешности для итерационного процесса (3) в энергетической норме гильбертова пространства имеет вид (9) и получается при  $n_{\text{опт}}$  из (8).

### Литература

1. Константинова Я.В., Лисковец О.А. Оценки погрешности в методе итераций для уравнений 1-го рода // Вестник Белорусского университета. Сер.1.–1973.–№1.–С.9–15.
2. Лисковец О.А., Савчук В.Ф. Метод простых итераций с попеременно-чередующимся шагом для уравнения I рода // Доклады АН БССР.– Т. XXI. –1977. –№1. –С.9–12.

## ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТОВ

Семенчук Н.В., ГрГУ, Гродно

Начало восьмидесятых годов прошлого столетия ознаменовано появлением нового направления в области обработки данных – вейвлет - анализа. В отличие от традиционно применяемого при анализе данных преобразования Фурье, результаты, полученные с помощью вейвлет - анализа, зачастую обладают большей информативностью и способны непосредственно обрабатывать такие особенности данных, которые при традиционном подходе анализировать затруднительно.

В спектральном анализе временных рядов главной проблемой является построение оценок спектральных плотностей второго порядка стационарных случайных плотностей, так как они дают важную информацию о структуре процесса. Главная задача состоит в том, чтобы по конечной реализации временного ряда отыскать такой алгоритм для оценки спектральной плотности, чтобы оценки были «хорошими» в статистическом смысле. Данное исследование посвящено применению вейвлетов для построения состоятельных оценок спектральных плотностей второго порядка.

Из [1] известно, что система функций  $\{\varphi_{j_0,k}(x), x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\psi_{j,k}(x), j \geq j_0, x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\}$ , образует ортонормированный базис в  $L_2(\mathbf{R})$ , где

$$\varphi_{j_0,k}(x) = 2^{j_0/2} \varphi(2^{j_0}x - k), \quad (1)$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^jx - k); \quad (2)$$

$j_0$  - некоторое целое число.

Функция  $\varphi(x)$  из (1) называется масштабирующей, а функция  $\psi(x)$  из (2) – вейвлетом [1],  $x \in \mathbf{R}$ .

Далее, с учетом (1) и (2) определим [1,2]

$$\tilde{\varphi}_{j_0,k}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (2\pi)^{-1/2} \varphi_{j_0,k}((2\pi)^{-1} \lambda + n), \quad (3)$$

$$j_0 \in \mathbf{N}_0, k = \overline{1, 2^{j_0}}, \lambda \in \Pi.$$

$$\tilde{\psi}_{j,k}(\lambda) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (2\pi)^{-1/2} \psi_{j,k}((2\pi)^{-1} \lambda + n), \quad (4)$$

$$j \in \mathbf{N}_0, k = \overline{1, 2^j}, \lambda \in \tilde{\mathbf{I}}.$$

**Определение.** [1, 2],  $\tilde{\varphi}_{j_0,k}(\lambda)$ ,  $\tilde{\psi}_{j,k}(\lambda)$ , определенные формулами (3) и (4) называются  $2\pi$  – периодическими масштабирующей функцией и вейвлетом соответственно.

В [1] получена цепочка кратномасштабных пространств  $\tilde{V}_j$ ,  $j \in \mathbf{N}_0$ , из  $L_2(\tilde{\mathbf{I}})$  с последовательными ортогональными дополнениями  $\tilde{W}_j$ ,  $j \in \mathbf{N}_0$  и ортонормированные базисы  $\{\tilde{\varphi}_{j,k}(\lambda), k = 1 \dots 2^j, \lambda \in \Pi\}$  для  $\tilde{V}_j$ ,  $j \in \mathbf{N}_0$  и  $\{\tilde{\psi}_{j,k}(\lambda), k = 1 \dots 2^j, \lambda \in \Pi\}$  для  $\tilde{W}_j$ ,  $j \in \mathbf{N}_0$ . Таким образом, имеет место следующее соотношение:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{j+1}(f) = \tilde{\mathbf{P}}_j(f) + \tilde{\mathbf{Q}}_j(f) \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{P}}_j(f) &= \sum_{k=1}^{2^j} \alpha_{j,k} \tilde{\varphi}_{j,k}(\lambda), \\ \alpha_{j,k} &= \int_{\Pi} \tilde{\varphi}_{j,k}(x) f(x) dx; \\ \tilde{\mathbf{Q}}_j f &= \sum_{k=1}^{2^j} \beta_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(\lambda), \\ \beta_{j,k} &= \int_{\Pi} \tilde{\psi}_{j,k}(x) f(x) dx,\end{aligned}\quad (6)$$

где  $k=1..2^j$ ,  $j \in \mathbf{N}_0$ ,  $\tilde{\mathbf{P}}_j$  есть ортогональная проекция функции  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi$  на пространство  $\tilde{V}_j$ , а  $\tilde{\mathbf{Q}}_j$  есть ортогональная проекция функции  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi$  на пространство  $\tilde{W}_j$ ,  $j \in \mathbf{N}_0$ .

В [1] показано, что система функций  $\{\tilde{\varphi}_{j_0,k}(\lambda), k=1..2^{j_0}, \lambda \in \Pi\} \cup \{\tilde{\psi}_{j,k}(\lambda), j \geq j_0, k=1..2^j, \lambda \in \Pi\}$  образует ортонормированный базис в  $L_2(\tilde{\mathbf{I}})$ .

Рассмотрим стационарный случайный процесс  $X(t)$ ,  $t \in \mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$  с  $\mathbf{M}X(t) = 0$ ,  $t \in \mathbf{Z}$  и спектральной плотностью  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$ . Возникает задача оценки спектральной плотности по  $T$  последовательным, через равные промежутки времени наблюдениям  $X(0), X(1), \dots, X(T-1)$  за стационарным случайным процессом.

С учетом проведенных в работе [3] исследований, в качестве оценки спектральной плотности  $f(\lambda) \in L_2(\Pi)$  рассмотрим:

$$\hat{f}(\lambda) = \sum_{k=1}^{2^{j_0}} \hat{\alpha}_{j_0,k} \tilde{\varphi}_{j_0,k}(\lambda) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{k=1}^{2^j} \hat{\beta}_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(\lambda), \quad (7)$$

$j_0 \leq J$ ,  $J \leq \log_2 CT^{1-\rho}$ , где  $0 < \rho < 1$ ,  $0 < C < \infty$ , произвольные, но фиксированные константы,  $\tilde{\varphi}_{j_0,k}(\lambda)$ ,  $\tilde{\psi}_{j,k}(\lambda)$  определяются соотношениями (3) – (4),

$$\begin{aligned}\hat{\alpha}_{j_0,k} &= \int_{-\pi}^{\pi} I_T^{(h)}(\alpha) \varphi_{j_0,k}(\alpha) d\alpha, \\ \hat{\beta}_{j,k} &= \int_{-\pi}^{\pi} I_T^{(h)}(\alpha) \psi_{j,k}(\alpha) d\alpha,\end{aligned}\quad (8)$$

где  $I_T^{(h)}(\alpha)$  – расширенная периодограмма, определяемая соотношением:

$$\begin{aligned}I_T^{(h)}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi H_2^{(T)}(0)} d_T(\lambda) d_T(-\lambda) \\ d_T(\lambda) &= \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) X(t) e^{-i\lambda t} \\ H_k^{(T)}(\lambda) &= \sum_{t=0}^{T-1} h_T^k(t) e^{-i\lambda t},\end{aligned}$$

а функция  $h_T : [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$  - окно просмотра данных, свойства которой описаны в [3].

Возникает вопрос об исследовании свойств оценки (7). Учитывая представление (5), путем элементарных преобразований оценку (7) можно переписать в виде: [1]

$$\hat{f}(\lambda) = \tilde{P}_{j_0}(f) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \tilde{Q}_j(f) = \tilde{P}_{j_0}(f) + (\tilde{P}_{j_0+1}(f) - \tilde{P}_{j_0}(f)) + (\tilde{P}_{j_0}(f) - \tilde{P}_{j_0-1}(f)) + \dots + (\tilde{P}_{J-1}(f) - \tilde{P}_{J-2}(f)) + \tilde{P}_J(f) - \tilde{P}_{J-1}(f).$$

Используя представление (6), окончательно получим:

$$\hat{f}(\lambda) = \tilde{P}_J(f) = \sum_{k=1}^{2^J} \hat{\alpha}_{J,k} \varphi_{J,k}(\lambda),$$

где  $\hat{\alpha}_{J,k}$  задается соотношением (8),  $\tilde{\psi}_{J,k}(\lambda)$  соотношением (4),  $J \leq \log_2 CT^{1-\rho}$ , где  $0 < \rho < 1$ ,  $0 < C < \infty$ , произвольные, но фиксированные константы,  $k = \overline{1, 2^J}$ . Таким образом, в качестве оценки спектральной плотности  $f(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi$  рассматривается ее проекция на пространство  $\tilde{V}_J$ .

### Литература

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 464с.
2. Neumann M.H. Spectral density estimation via nonlinear wavelet methods for stationary non-Gaussian time series. // J. Time Ser. Anal. 17 (1996), № 6, P. 601-633.
3. Н.В. Семенчук. Исследование моментов оценок вейвлет коэффициентов разложения спектральной плотности стационарного случайного процесса. / Материалы международной конференции DE&CAS'2005, г. Брест, 5 – 8 окт. 2005 г. Ч.2. С. 55-59.

## МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Смачек С.Н., БГТУ, Брест

Задача коммивояжера (Traveling salesman problem) относится к ряду сложнейших задач комбинаторной оптимизации и имеет на сегодняшний день множество приложений. Решение этой задачи сложно, что не дает возможности даже при современном развитии средств вычислительной техники находить решения при большой размерности исходных данных за приемлемое время. Поэтому для решения этой задачи создано множество приближенных методов, которые для своего исполнения используют приемлемое количество ресурсов (времени, оперативной памяти и других). Одним из таких методов является метод кристаллизации. Имея сложность  $O(n^2)$ , этот алгоритм показал средние результаты для качества находимых решений при довольно высокой скорости работы, что делает его применимым для задач большой размерности (десятки тысяч узлов).

Предлагаемая матричная реализация алгоритма кристаллизации служит для более эффективного решения задачи коммивояжера на ЭВМ. Первоначально составляется матрица, элементы которой состоят из двух полей: расстояние (dij) и флаг (fij) принадлежности к маршруту (1 - дуга принадлежит маршруту, 0 - не принадлежит, \* - запрет на включение данной дуги). По этой матрице строится начальный маршрут коммивояжера, например, методом ближайшего соседа. Для этого в строке выбирается элемент (i, j) с наименьшим расстоянием, отмечается принадлежность этой дуги маршруту,

а для элемента  $(j, i)$  ставится запрет на включение в маршрут (это делается для того, чтобы избежать замыканий контура на двух узлах). В столбце  $j$  на все элементы ставится флаг запрета, чтобы  $j$ -узел был инцидентен только двум дугам. Далее действие повторяется для  $j$ -той строки матрицы. Таким образом, в маршрут включаются все узлы (рис. 1).

На втором этапе подобно методу потенциалов в транспортной задаче первоначальный контур разбивается на несколько «оптимальных в себе» контуров. Для этого высчитывается оценка уменьшения общей длины контуров и проводится изменение маршрута, если она положительна.

Введем обозначения:

$R(i)$  - номер строки, в которой  $i$ -тый столбец имеет флаг включения дуги в маршрут ( $f_{R(i)}=1$ ),  $C(i)$  - номер столбца, в котором  $i$ -тая строка имеет флаг включения дуги в маршрут ( $f_{iC(i)}=1$ ).

Тогда, если  $d_{R(i) i} - d_{ki} > d_{R(i) C(k)} - d_{k C(k)}$ , проводим перемещение флага в  $i$ -том столбце на строку  $k$ , а в  $C(k)$  столбце на строку  $R(i)$  (рис. 2). Проведя такие действия над всей матрице, мы получим множество отдельных замкнутых контуров, которые в матрице путем пересортировки вершин всегда можно представить квадратными областями, расположенными по главной диагонали (рис. 3).

Теперь мы располагаем множеством отдельных маршрутов, которые предстоит склеить в наиболее оптимальный. Для этого необходимо предварительно вычислить расстояния между контурами.

Расстоянием между двумя контурами будем называть минимальное увеличение суммы длин контуров, которое достигается при самом экономном объединении этих двух контуров.

Высчитав по исходной матрице расстояния между контурами, можно составить новую матрицу расстояний уже для контуров и повторить все шаги алгоритма уже над этой матрицей, что в конечном итоге приведет к решению задачи коммивояжера небольшой размерности, где можно применить трудоемкие точные алгоритмы.

Полученный на конечном этапе маршрут разрывается по самому длинному ребру, «разворачивается» до размерности исходной задачи - все контуры имплементируются составляющими их вершинами - получается маршрут, приближенный к оптимальному.

После получения на первом этапе первичных контуров альтернативным путем является построение минимального остовного дерева, узлами которого будут являться найденные контуры, и дальнейшее склеивание производить по ребрам этого дерева. Еще одним более трудоемким вариантом может быть склеивание наиболее близкорасположенных контуров с последующим пересчетом расстояний между контурами (последовательность шагов приведена на рис. 4-7).

Результат можно улучшить, если над итоговым маршрутом провести процедуры эвристической оптимизации (рис. 8).

	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	3	4	8	9	11
2	0	1	0	0	0	*
3	3	$\infty$	3	4	8	9
4	*	0	1	0	0	0
5	4	3	$\infty$	3	4	8
6	0	*	0	1	0	0
1	8	4	3	$\infty$	3	4
2	0	0	*	0	1	0
3	9	8	4	3	$\infty$	3
4	0	0	0	*	0	1
5	11	9	8	4	3	$\infty$
6	1	0	0	0	*	0

Рис. 1. Исходная матрица расстояний и флагов

	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	3	4	8	9	11
2	0	1	0	0	0	*
3	3	$\infty$	3	4	8	9
4	*	0	1	0	0	0
5	4	3	$\infty$	3	4	8
6	0	*	0	1	0	0
1	8	4	3	$\infty$	3	4
2	0	0	*	0	1	0
3	9	8	4	3	$\infty$	3
4	0	0	0	*	0	1
5	11	9	8	4	3	$\infty$
6	1	0	0	0	*	0

Рис. 2. Процедура «кристаллизации»



	1	2	3	4	5	6
1	$\infty$	3	4	8	9	11
2	0	1	*	0	0	0
3	3	$\infty$	3	4	8	9
4	*	0	1	0	0	0
5	4	3	$\infty$	3	4	8
6	1	*	0	0	0	0
1	8	4	3	$\infty$	3	4
2	0	0	0	0	1	*
3	9	8	4	3	$\infty$	3
4	0	0	0	*	0	1
5	11	9	8	4	3	$\infty$
6	0	0	0	1	*	0

Рис. 3. Независимые контуры в матричном представлении

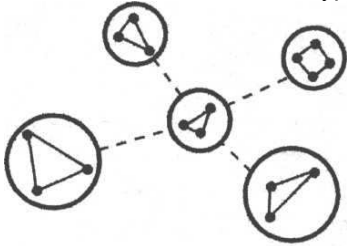


Рис. 4. Минимальное остовное дерево для первичных контуров

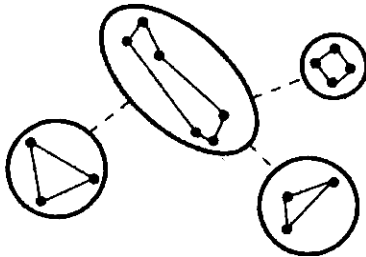


Рис. 5. Слияние двух ближайших контуров в один

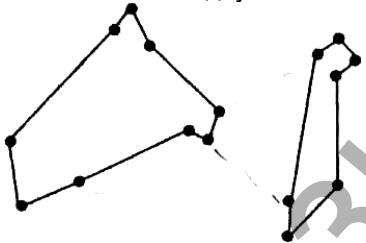


Рис. 6. Конечный этап образования единого маршрута - объединение двух контуров



Рис. 7. Маршрут коммивояжера



Рис. 8. Эвристическое улучшение маршрута

## СПОСОБ УСТАНОВЛЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ

Теленкевич Р. С., БГТУ, Брест

Многие практические задачи приводят к необходимости распознавания изоморфизма и изоморфного вложения сложных структур, которые могут быть заданы в форме матриц или графов. С содержательной точки зрения изоморфизм структур означает тождественность их функционирования, что приводит в ряде случаев к возможности замены одной структуры другой, ей изоморфной.

Пусть  $G=(X, F)$  и  $H=(Y, P)$  – два произвольных графа. Два графа называются изоморфными, если множества  $X$  и  $Y$  эквивалентны и для любых  $x \in X$  и  $y \in Y$ , которые поставлены во взаимно однозначное соответствие, выполняется  $Fx$  эквивалентно  $Py$ .

Легко видеть, что для распознавания изоморфизма графов  $G$  и  $H$ , которые имеют  $n$  вершин, требуется в общем случае совершить  $n!$  попарных сравнений, а для распознавания изоморфного вложения графа  $G$ , имеющего  $m$  вершин, в граф  $H$ , который содержит  $n$  вершин ( $m < n$ ), необходимо произвести  $C_n^m m!$  сравнений. Из приведенных оценок видно, что уже при относительно небольшом количестве элементов в графах (около 100) решение задачи об изоморфизме методом полного перебора весьма сложно даже с современными вычислительными машинами.

В настоящей работе приводится алгоритм нахождения изоморфизма графов, основанный на выделении класса графов, имеющих различные мощности (степени полузахода) вершин, для которого оценка  $n!$  завышена. Заметим, что указанный алгоритм распознавания изоморфизма графов удобен для реализации на ЭВМ.

Алгоритм распознавания изоморфизма двух графов  $G$  и  $H$ :

1. Подсчитываем количество вершин каждого графа. При равенстве переходим к п. 2, а при неравенстве - к п. 5.
2. Подсчитываем количество дуг каждого графа. При равенстве переходим к 3., а при неравенстве - к п. 5.
3. Записываем графы в матричной форме. Сравниваем матрицы (метод сравнения графов приведен ниже). Если матрицы равны, то переходим к п. 4, если не равны, то переходим к п. 5.
4. Графы изоморфны.
5. Графы не изоморфны.

Рассмотрим работу алгоритма на примере.

Пусть даны два неориентированных графа  $G$  (рис 1) и  $H$  (рис 2). Докажем, что они изоморфны. Составим матрицы инциденций:

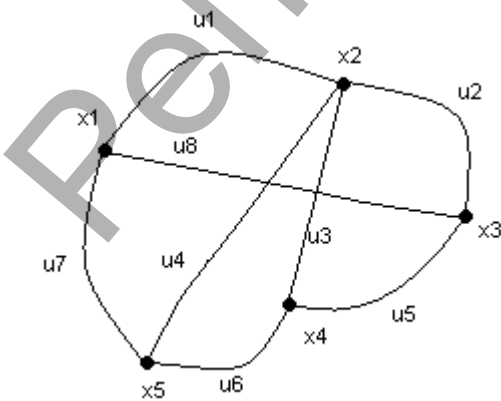


Рис. 1

Табл. 1

	x1	x2	x3	x4	x5
u1	1	1	0	0	0
u2	0	1	1	0	0
u3	0	1	0	1	0
u4	0	1	0	0	1
u5	0	0	1	1	0
u6	0	0	0	1	1
u7	1	0	0	0	1
u8	1	0	1	0	0

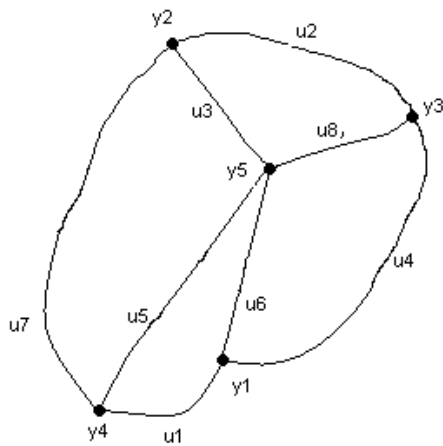


Рис. 2

Табл. 2

	y1	y2	y3	y4	y5
u1	1	0	0	1	0
u2	0	1	1	0	0
u3	0	1	0	0	1
u4	1	0	1	0	0
u5	0	0	0	1	1
u6	1	0	0	0	1
u7	0	1	0	1	0
u8	0	0	1	0	1

Преобразуем матрицы так, чтобы можно было сказать, равны ли они (заметим, что строки и столбцы матрицы можно переставлять, матрицы от этого не изменят своего смысла). Отсортируем слева направо столбцы по убыванию мощности вершин. Если мощность вершин совпадает, поступим следующим образом: будем сравнивать столбцы сверху вниз по строкам. Если элементы равны, опускаемся на одну строку вниз, если не равны, левее ставится тот столбец, элемент в котором больше (например в табл. 1 из двух конкурирующих столбцов  $x_1$  и  $x_2$  левее станет  $x_2$ ). После этого аналогично преобразуем строки матриц. В таблицах 3 и 4 представлены матрицы после преобразования, их эквивалентность очевидна.

	x2	x1	x3	x4	x5	y5	y1	y4	y2	y3
u1	1	1	0	0	0	u6	1	1	0	0
u2	1	0	1	0	0	u5	1	0	1	0
u3	1	0	0	1	0	u3	1	0	0	1
u4	1	0	0	0	1	u8	1	0	0	1
u8	0	1	1	0	0	u1	0	1	1	0
u7	0	1	0	0	1	u4	0	1	0	1
u5	0	0	1	1	0	u7	0	0	1	1
u6	0	0	0	1	1	u2	0	0	0	1

Табл.4

Табл. 5

Преобразованные матрицы дают также возможность найти однозначные соответствия множества вершин X и множества вершин Y.

Таким образом, данный алгоритм позволяет за  $2(M+N)$  операций установить изоморфизм графов, где M - число вершин, N – число дуг.

### Литература

1. А. Н. Мелихов Ориентированные графы и конечные автоматы. - М., «Наука», 1971.

## ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ ПРИ ПОМОЩИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Филиппович М. М., Густова Г. В., БНТУ, Минск

Рассмотрим задачу о колебании струны, которому удовлетворяет дифференциальное уравнение в частных производных

$$u_{tt} - C^2 u_{xx} = 0 \quad (1)$$

с начальными и граничными условиями двух видов:

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 < x < \infty, \\ u(0,t) &= 0, t > 0; \\ u(x,0) &= \varphi(x), \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= \mu_1(t), \\ u(l,t) &= \mu_2(t) \end{aligned} \right\}$$

$$t \geq 0.$$

Здесь  $C = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$ , где  $T_0$  - натяжение струны,  $\rho$  - плотность.

Решение уравнения (1) запишем в виде:

$$U = [A_1(d_x)sh(tCd_x)] * f_1(x) + [A_2(d_x)ch(tCd_x)] * f_2, \quad (4)$$

где  $d_x = \frac{d}{dx}$ ,  $t$  - время.

Построенное таким образом решение тождественно удовлетворяет уравнению (1) при произвольных бесконечно дифференцируемых функциях  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$ . Звёздочкой обозначено операторное дифференцирование.

Если в (4) положить  $A_1$  и  $A_2 = \text{const}$ , то с учетом

$$\exp(\pm tCd_x) * f(x) = f(x \pm tC),$$

получим известное решение Даламбера [л.с.52] для бесконечной струны:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+Ct) + \varphi(x-Ct)}{2} + \frac{1}{2C} \int_{x-Ct}^{x+Ct} \psi(\alpha) d\alpha.$$

Если в (4) положить  $A_1(d_x) = \frac{A_n l}{\pi n} d_x$ ,  $A_2(d_x) = B_n$ , то получим решение Фурье [л.с.86] для закреплённой ( $0 \leq x \leq l$ ;  $u(0,t) = u(l,t) = 0$ ) струны:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \cos \frac{\pi n}{l} Ct + B_n \sin \frac{\pi n}{l} Ct \right) \sin \frac{\pi n}{l} x,$$

где  $A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$ ,  $B_n = \frac{2}{\pi n C} \int_0^l \psi(\xi) \sin \frac{\pi n}{l} \xi d\xi$ .

Проведём исследование нового решения, когда

$$f_1(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k x^k \quad \text{и} \quad f_2(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k x^k$$

в нашем случае оно имеет следующий вид:

$$U = (tCd_x^2 + \frac{1}{3!} t^3 C^3 d_x^4) (a_3 x^3 + a_5 x^5) + (1 + \frac{1}{2!} t^2 C^2 d_x^2) (b_1 x + b_3 x^3).$$

Данное решение

$$U(x,t)=6a_3 tCx+20a_3 tCx^3+20a_5 t^3 C^3x+b_1x+b_3x^3+3b_3 t^2C^2x$$

тождественно удовлетворяет уравнению (1).

Для первого случая получим:

$$U(x,0) = b_1x + b_3x^3,$$

$$U'_x(x,0) = 6Ca_3x.$$

Для второго случая получим:

$$U(0,t) = \mu_1(t) = 0,$$

$$U(l,t)=\mu_2(t)=b_1l+b_3l^3+2(3a_3l+10a_5l^3)tC+3b_3C^2lt^2+20a_5C^3lt^3.$$

Итак, получим новое решение известной задачи, удобное для проведения численного анализа.

### Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, -М.: Наука, 1977. -736 с.

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РОБАСТНОСТИ ДВУХ АЛГОРИТМОВ МНОГОМЕРНОГО БАЙЕСОВСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Шлык П. А., БГУ, Минск

В данной работе приводятся результаты сравнительного численного анализа робастности двух алгоритмов байесовского прогнозирования [1] при искажениях априорной плотности распределения вектора параметров, введенных в рассмотрение П.Густафсоном (1994). Компоненты прогнозируемого вектора могут быть стохастически зависимыми.

### Математическая модель байесовского прогнозирования.

#### Характеристики робастности прогнозирования

Пусть на вероятностном пространстве  $(\Omega, F, P)$  заданы три случайных элемента:

I. Наблюдаемый вектор параметров  $\theta$ , истинное значение которого неизвестно и является случайным с априорной гипотетической плотностью распределения вероятностей (п.р.в.)  $\pi^0(\theta), \theta \in \Theta \subseteq R^m$ ;

II. Стохастически зависящий от  $\theta$  вектор наблюдений  $x = (x_t)_{t=1}^T \in X \subseteq R^{n \times T}$  с гипотетической условной п.р.в.  $p^0(x|\theta)$ ;

III. Неизвестный, подлежащий прогнозированию, вектор  $y \in Y \subseteq R^n$ , стохастически зависящий от  $x$  и от  $\theta$ , с гипотетической п.р.в.  $g^0(y|x, \theta)$ .

Рассмотрим модель искажений, предложенную П.Густафсоном [2]. Пусть п.р.в. вектора параметров  $\theta$  равна  $\tilde{\pi}(\theta)$  из множества  $\Gamma_\varepsilon^p(\pi^0)$ :

$$\Gamma_\varepsilon^p(\pi^0) = \left\{ v_u(\theta) \mid \|u\|_{L_p} \leq \varepsilon, u(\cdot): R^m \rightarrow [0, \infty) \right\}, \varepsilon > 0 \quad (1)$$

$$v_u(\theta) = \hat{v}_u(\theta) / \int_{\Theta} \hat{v}_u(\theta) d\theta, \quad \hat{v}_u(\theta) = \begin{cases} \left( (\pi^0(\theta))^{1/p} + \frac{1}{p} u(\theta) \right)^p, & 1 \leq p < \infty, \\ \pi^0(\theta) e^{u(\theta)}, & p = \infty. \end{cases}$$

Пусть  $d(\cdot, \cdot): R^n \times R^n \rightarrow R_+$  задаёт расстояние в  $R^n$ . Для произвольной прогнозирующей статистики  $\hat{y} = f(x): X \rightarrow Y$  введём функционал риска  $r(\cdot, \cdot)$ :

$$r(f(\cdot), \tilde{\pi}(\cdot)) = E\{d^2(f(x), y)\} = \iint_{XY} \tilde{s}(x, y) d^2(f(x), y) dx dy,$$

$$\tilde{s}(x, y) = \int_{\Theta} g^0(y|x, \theta) p^0(x|\theta) \tilde{\pi}(\theta) d\theta.$$

Функционал верхнего риска  $r_+(\cdot)$  определяется как верхняя граница множества значений функционала риска:  $r(f(\cdot), \tilde{\pi}(\cdot)) \leq r_+(f(\cdot)), \forall \tilde{\pi} \in \Gamma_\varepsilon^p(\pi^0)$ . Прогнозирующая статистика  $f^*(\cdot)$  называется  $r_+$ -робастной, если она минимизирует функционал верхнего риска  $r_+(\cdot)$ . Байесовской прогнозирующей статистикой будем называть статистику  $\hat{y} = f^0(x) = E_0\{y|x\}$ , где через  $E_0\{\cdot\}$  обозначено математическое ожидание, вычисленное по гипотетическому распределению вероятностей. Гипотетическим среднеквадратическим риском называется функционал  $r_0(f(\cdot)) = E_0\{d^2(f(x), y)\}$ .

### Анализ робастности

Введём следующие обозначения:

$$b(\varepsilon, p) = \begin{cases} \left( \left( 1 + \frac{\varepsilon}{p} \right)^p - 1 \right), & 1 \leq p < \infty, \\ (e^\varepsilon - 1), & p = \infty \end{cases}$$

$$W(x) = \iint_{Y\Theta} g^0(y|x, \theta) p^0(x|\theta) \pi^0(\theta) d\theta dy; \quad \Psi(x, y) = \sup_{\theta \in \Theta} g^0(y|x, \theta) p^0(x|\theta).$$

В условиях модели (I)-(III) при искажениях (1) имеют место следующие утверждения [3]:

1. Пусть  $d(\cdot, \cdot)$  - Евклидово расстояние в  $R^n$ . Тогда функционал

$$r_+(f(\cdot)) = r^0(f(\cdot)) + b(\varepsilon, p) \cdot \iint_{XY} \Psi(x, y) dx dy \quad (2)$$

является функционалом верхнего риска.

2. Прогнозирующая статистика

$$f^*(x) = \frac{W(x) \cdot f^0(x) + b(\varepsilon, p) \cdot \int_Y \Psi(x, y) \cdot y dy}{W(x) + b(\varepsilon, p) \cdot \int_Y \Psi(x, y) dy} \quad (3)$$

является  $r_+$ -робастной по отношению к функционалу верхнего риска (2).

Приведём результаты численного анализа робастности байесовской прогнозирующей статистики  $f^0(\cdot)$  и  $r_+$ -робастной статистики (3). Вычислительные эксперименты проводились при следующих значениях параметров:  $n = 2, p = 2$ ;

$$\pi^0(\theta) = n_2 \left( \theta \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right), p^0(x|\theta) = n_2 \left( x \left| \theta, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right. \right), g^0(y|x, \theta) = p^0(y|\theta),$$

$$u(\theta) = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}R_u}, & \theta \in B_2(C_u, R_u) \\ 0, & \theta \notin B_2(C_u, R_u) \end{cases}, \text{ где } B_2(C_u, R_u) \text{ - круг с центром в } C_u = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ и радиусом } R_u = 4.$$

Через  $\hat{r}(\cdot)$  обозначим эмпирический среднеквадратический риск, полученный в результате имитационного моделирования для соответствующей статистики. При проведении экспериментов вычислялся выигрыш от использования прогнозирующей статистики (3):

$$Profit(f^0(\cdot), f^*(\cdot)) = \frac{\hat{r}(f^0(\cdot)) - \hat{r}(f^*(\cdot))}{\hat{r}(f^*(\cdot))} \cdot 100\%.$$

Количество итераций в имитационном моделировании при каждом наборе параметров составляло  $N=1000$ . Результаты вычислительных экспериментов представлены на рисунке.

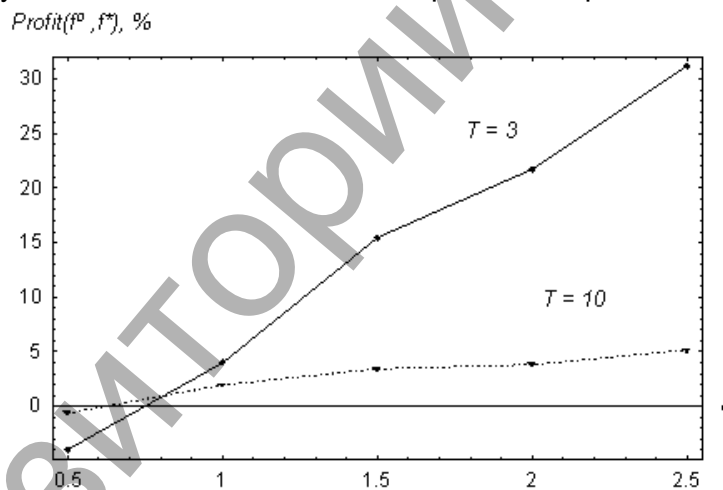


Рис. Результаты вычислительных экспериментов

При проведении экспериментов использование  $r_+$ -робастной прогнозирующей статистики (3) позволило строить более точные прогнозы, чем при использовании байесовской прогнозирующей статистики  $f^0(\cdot)$ . Преимущества статистики (3) наиболее заметны при малом количестве наблюдений  $T$  и при «значимых» искажениях гипотетической модели.

### Литература

1. Справочник по прикладной статистике / Под ред. Э.Ллойда, У.Ледермана, С.А.Айвазяна, Ю.Н.Тьюрина. - М., 1990. Т.2.
2. Gustafson P. Local Sensivity of Posterior Expectations. D.Ph.Dissertation. Pittsburgh: Pittsburg University Press, 1994.
3. А.Ю.Харин, П.А.Шлык. О робастности многомерного байесовского прогнозирования при искажениях априорной плотности распределения параметров. / Сб. материалов международной научной конф. «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения». - Мн.: БГУ, 2005. ст.308-312.

## О РЕДУКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Юдов А. А., Шумак Т. А., БрГУ, Брест

Рассматриваются однородные пространства  $H/G$ , где  $H$  – группа Ли вращений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры, а  $G$  – некоторая подгруппа Ли группы Ли –  $H$ . Такие однородные пространства исследуются на редуктивность. Этими вопросами занимались многие видные математики: Лумисте Ю., Номидзу К., Кобаяси Ш., Белько И. В., Феденко А. С. и др. Ими построена общая теория связностей в редуктивных однородных пространствах, исследованы свойства связностей в таких пространствах, проведена классификация ряда редуктивных пространств.

*Определение.* Однородное пространство  $H/G$  называется редуктивным, если алгебра Ли  $\bar{H}$  группы Ли  $H$  распадается в прямую сумму подпространств:  $\bar{H} = m + \bar{G}$ , причем подпространство  $m$  инвариантно относительно  $ad\bar{G}$ , где  $ad\bar{G}$  – присоединенное представление алгебры Ли  $\bar{G}$ .

Рассмотрим однородное пространство  $H/G_{31}$ , где  $\bar{G}_{31} = \{i_6, i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}$

Будем искать трехмерные редуктивные дополнения для алгебры Ли  $\bar{G}_{31}$ . Для этого найдем трехмерные подпространства алгебры Ли  $\bar{H}$  инвариантные относительно  $adi_6$ . Достаточно рассмотреть следующие случаи:

1°. Инвариантные пространства ищем в виде

$$\{i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_9 + \nu i_6, i_7 + \sigma i_{10} + s i_9 + t i_6, i_8 + p i_{10} + q i_9 + \omega i_6\}.$$

Система инвариантности имеет вид:

$$t\lambda + \omega = 0, \quad s\lambda + q = 0, \quad \sigma\lambda + p = 0, \quad t\sigma = 0, \quad s\sigma = 0, \quad \sigma^2 = 1, \quad \nu + tp = 0, \quad \sigma + sp = 0, \quad \lambda + \sigma p = 0.$$

Решая систему, получим инвариантные пространства в виде:

$$\{i_5 - p i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + p i_{10}\}, \{i_5 + p i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 + p i_{10}\}, \{i_5, i_7 + \sigma i_{10}, i_8\}.$$

2°. Инвариантные пространства ищем в виде

$$\{i_5 + \lambda i_9 + \mu i_6 + p i_8, i_7 + \sigma i_9 + \nu i_6 + q i_8, i_{10} + s i_9 + t i_6\}.$$
 Система инвариантности имеет вид:

$$p\mu = 0, \quad p^2 = 1, \quad p\lambda = 0, \quad q\mu + t = 0, \quad qp = 0, \quad q\lambda + s = 0, \quad \nu = 0, \quad q = 0, \quad \sigma = 0.$$

Решая систему, получим инвариантные пространства в виде:  $\{i_5 \pm i_8, i_7, i_{10}\}$ .

3°. Инвариантные пространства ищем в виде:

$$\{i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10} + \nu i_6, i_7 + \sigma i_8 + p i_{10} + q i_6, i_9 + s i_6\}.$$
 Система инвариантности имеет вид:

$$\lambda\nu + \mu q = 0, \quad \lambda^2 + \mu\sigma = 1, \quad \lambda\mu + \mu p = 0, \quad \sigma\nu + pq = 0, \quad \sigma\lambda + p\sigma = 0, \quad p^2 + \sigma\mu = 1.$$

Решая систему, получим инвариантные пространства в виде:

$$\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_9 + s i_6\}, \{i_5 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8, i_9 + s i_6\}, \\ \{i_5 \pm \sqrt{1 - \mu\sigma} i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1 - \mu\sigma} i_{10}, i_9 + s i_6\}$$



4<sup>0</sup>. Инвариантные пространства ищем в виде:

$\{i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10} + \nu i_9, i_7 + \sigma i_8 + s i_{10} + t i_9, i_6\}$ . Система инвариантности имеет вид:

$$\lambda^2 + \mu\sigma = 1, \lambda\nu + \mu t = 0, \lambda\mu + \mu s = 0, \sigma\lambda + \sigma s = 0, \sigma\nu + st = 0, s^2 + \mu\sigma = 1.$$

Решая систему, получим инвариантные пространства в виде:

$$\{i_5 - s i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8 + s i_{10}, i_6\}, \{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_6\}.$$

5<sup>0</sup>. Инвариантные пространства ищем в виде:

$\{i_5 + \lambda i_7 + \nu i_9 + \mu i_6, i_8 + s i_9 + t i_6, i_{10} + p i_9 + q i_6\}$  Система инвариантности противоречива.

Рассматривая аналогично случаи 6<sup>0</sup> - 20<sup>0</sup>, получим следующую теорему.

**Теорема.** Относительно  $adi_6$  инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли  $\bar{H}$

1.  $\{i_5 - p i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + p i_{10}\}$ .
2.  $\{i_5 + p i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 + p i_{10}\}$ .
3.  $\{i_5, i_7 + \sigma i_{10}, i_8\}$ .
4.  $\{i_5 \pm i_8, i_7, i_{10}\}$ .
5.  $\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_9 + s i_6\}$ .
6.  $\{i_5 \pm \sqrt{1 - \mu\sigma} i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1 - \mu\sigma} i_{10}, i_9 + s i_6\}$ .
7.  $\{i_5 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8, i_9 + s i_6\}$ .
8.  $\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_6\}$ .
9.  $\{i_5 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_{10}, i_9 + p i_6\}$ .
10.  $\{i_5 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_{10}, i_6\}$ .
11.  $\{i_5 \pm \mu i_7 \pm i_8 + \mu i_{10}, i_9, i_6\}$ .
12.  $\{i_7, i_{10}, i_9 + s i_6\}$ .
13.  $\{i_7, i_{10}, i_6\}$ .
14.  $\{i_7 \pm i_{10}, i_9, i_6\}$ .

Найденные инвариантные пространства применяются для нахождения редутивных пространств среди однородных пространств с фундаментальной группой – группой движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры. Полученные редутивные структуры позволяют решать различные дифференциально-геометрические задачи в таких однородных пространствах, проводить исследования подмногообразий таких пространств, изучать свойства инвариантных аффинных связностей в соответствующих главных расслоениях. Дифференциально-геометрические исследования в псевдоевклидовых пространствах находят применение в теоретической физике и в теории относительности.

## АНАЛИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ И БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Юхимук М.М., БГТУ, Брест

Краевая задача для бесконечно связных областей впервые была рассмотрена в работе Н.И.Архиезера [1]. В дальнейшем к этой тематике обращались неоднократно (см., например, [2, § 49] и [6 – 9]). Исследование краевых задач для бесконечно связных об-

ластей близко по своему содержанию к исследованию краевых задач с бесконечным индексом, основы теории которых были созданы Н.В.Говоровым [3]. Он установил определённую связь между разрешимостью таких задач, распределением нулей и асимптотическим поведением специальных классов целых функций (см., например, [4]). Анализ такого сорта задач является важным в силу их практической направленности (например, они хорошо моделируют композиционные материалы с богатой микроструктурой). Здесь мы ограничимся рассмотрением модельной краевой задачи – задачи о скачке.

Пусть заданы простые замкнутые гладкие попарно непересекающиеся контуры  $L_k$  ( $k=\overline{1, N}$ ,  $N \geq 2$ ), ограничивающие непересекающиеся области  $D_k^+$ . Положим  $D^- = C \setminus \left( \bigcup_{k=1}^N D_k^+ \right)$  и рассмотрим задачу нахождения исчезающей на бесконечности кусочно-аналитической в  $(N+1)$ -связной области  $D^- \cup \left( \bigcup_{k=1}^N D_k^+ \right)$  функции  $\Phi(z) \equiv (\Phi_1(z), \dots, \Phi_N(z), \Phi^-(z))$ , предельные значения которой непрерывны вплоть до кривых  $L_k$  и удовлетворяют условиям:

$$\Phi_k^+(t) - \Phi^-(t) = R_k(t), \quad t \in L_k, \quad k = \overline{1, N}, \quad (1)$$

где  $R_k(z)$  – заданные рациональные функции («скачки»), непрерывные на соответствующих им контурах  $L_k$  ( $k = \overline{1, N}$ ).

Каждый из «скачков»  $R_k$  может быть представлен в виде:

$$R_k(z) = p_k(z) + r_k(z) + \mathcal{R}_k(z), \quad (2)$$

где  $p_k$  – многочлен,  $r_k$  – правильная рациональная дробь, все полюсы которой лежат в  $D_k^+$ ,  $\mathcal{R}_k$  – правильная рациональная дробь, не имеющая полюсов в  $\overline{D_k^+}$ . Доказано, что решение поставленной задачи даёт функция

$$\Phi(z) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^N r_j(z), & z \in D^-, \\ p_k(z) + \mathcal{R}_k(z) - \sum_{\substack{j=1, N \\ j \neq k}} r_j(z), & z \in D_k^+. \end{cases} \quad (3)$$

Обобщим задачу, полагая, что число контуров – бесконечно, а «скачки»  $R_k(z)$  – мероморфные функции. Так же, как и в случае задачи с конечным числом контуров, запишем:  $R_k(z) = p_k(z) + r_k(z) + \mathcal{R}_k(z)$ , где слагаемые в правой части, при тех же обозначениях, что и в (2), имеют иной смысл:  $p_k$  – целая функция,  $r_k$  – сумма главных частей  $R_k$  в полюсах из  $D_k^+$ ,  $\mathcal{R}_k$  – сумма (быть может, бесконечная) главных частей  $R_k$  в полюсах, не лежащих в  $D_k^+$ .

Формально решение этой задачи можно получить из (3), учитывая бесконечность числа контуров:

$$\Phi(z) = \begin{cases} -\sum_{j=1}^{\infty} r_j(z), & z \in D^-, \\ p_k(z) + \mathcal{R}_k(z) - \sum_{\substack{j=1, \infty \\ j \neq k}} r_j(z), & z \in D_k^+. \end{cases} \quad (4)$$

Формула (3) безусловно даёт решение задачи (1) для любых рациональных функций  $R_k$ , стоящих в правых частях краевых условий. В случае же последней задачи на «скачки» следует наложить дополнительные условия, чтобы функция  $\Phi(z)$  из (4) являлась решением задачи рассматриваемого класса. Во-первых, ряды, фигурирующие в формуле (4), должны сходиться в соответствующих областях. Во-вторых, из постановки задачи следует, что искомое решение  $\Phi(z)$  необходимо удовлетворяет асимптотическим соотношениям:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{k \in \mathbb{N}, D_k \subseteq \{z \mid |z| < R\}} \left\{ \sup_{z \in D_k} |\Phi_k(z)| \right\} = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{z \in D^-, |z|=R} |\Phi^-(z)| = 0, \quad (5)$$

откуда следует, что условие  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \max_{t \in L_k} |R_k(t)| \right\} = 0$  является необходимым для существования решения. Подтверждение или опровержение того факта, что построенная функция действительно является решением задачи связано в общем случае с исследованием поведения мероморфных функций на бесконечности.

### Литература

1. Ахиезер Н.И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР, сер. матем. Т. 9, 1945, 275-290.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М., Наука, 1977 (3-е изд.).
3. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М., Наука, 1986.
4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.-Л., Гостехиздат, 1956.
5. Mityushev V.V., Rogosin S.V. Constructive methods for linear and nonlinear boundary value problems for analytic functions. – Boca Raton-London, Chapman & Hall / CRC Press, 1999.
6. Пааташвили В.А. О линейной задаче сопряжения в случае счётного множества замкнутых контуров // Сообщ. АН Груз. ССР, Т. 37, No. 1, 1965, 31-36.
7. Пааташвили В.А. О линейной задаче сопряжения в случае счетного множества замкнутых контуров // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР, Т. 34, 1968, 103-122.
8. Толочко М.Э. О разрешимости однородной краевой задачи Римана для бесконечно связной области // Доклады АН БССР, Т. 18, No. 5, 1974, 398-401.
9. Чибрикова Л.И. Основные краевые задачи для аналитических функций. – Казань, КГУ, 1990.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>РАЗДЕЛ I. ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ И НЕЙРОННЫЕ СЕТИ</b> .....	3
<b>Безобразов С.В.</b> Искусственные иммунные системы: принципы построения.....	3
<b>Безобразова С.В.</b> Прогнозирование приступов эпилепсии.....	5
<b>Бочков Л.Н.</b> Решение задачи о рюкзаке с использованием генетического алгоритма.....	7
<b>Кирьянов Д.П.</b> Анализ электроэнцефалограмм для определения болезни Альцгеймера с помощью нейронных сетей.....	8
<b>Кочурко П.А.</b> Анализ входных данных для нейросетевой системы обнаружения атак в различных сетевых окружениях.....	11
<b>Кочурко Ю.В.</b> Нелинейная многослойная нейронная сеть в задаче прогнозирования потребления электроэнергии.....	13
<b>Лахмицкий А.А.</b> Алгоритм обучения нейронной сети с использованием метода сопряженных градиентов.....	16
<b>Полозков Ю. В.</b> Применение нейроподобных сетей в решении задач рекурсивного формообразования.....	18
<b>Rubanu I.</b> Using Artificial Neural Network and Statistical approach for Time Series Forecasting (by using clustering and classification algorithms).....	21
<b>Савицкий Ю.В., Дунец А.П., Игнатюк О.Н.</b> Система анализа хаотических сигналов на базе рекуррентных нейронных сетей.....	23
<b>Теленкевич Р.С.</b> Использование систем нечеткой логики при прогнозировании хаотических процессов.....	25
<b>РАЗДЕЛ II. РАСПОЗНАВАНИЕ ОБРАЗОВ И АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ</b> .....	26
<b>Doudkin A.A., Inyutin A.V., Vatkin M.E.</b> The color images of infected crop field processing algorithm.....	26
<b>Инютин А.В.</b> Алгоритм устранения эффекта пересегментации с использованием операции полутонного псевдоскелета.....	29
<b>Калюхович Д.О.</b> Сравнительная характеристика некоторых нейросетевых алгоритмов распознавания печатных символов.....	32
<b>Проходцов И.В.</b> Распознавание образов и анализ изображений в области безопасности.....	34
<b>РАЗДЕЛ III. АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ</b> .....	36
<b>Громько Ю.В.</b> Вынужденные колебания кольцевой трехслойной пластинки.....	36
<b>Гурин А.С.</b> Прогнозирования векторных авторегрессионных временных рядов при наличии пропущенных значений.....	38
<b>Доровская Е.П.</b> Изгиб трехслойной прямоугольной пластины на упругом основании.....	40
<b>Карпенко Ю.В.</b> Разработка программных средств анализа управляемости сингулярно возмущенных систем.....	43

<b>Климкович П.И., Дерюгина Е.А.</b> Численное решение уравнений пляски проводов воздушных ЛЭП.....	45
<b>Кузнецова А.А.</b> Воздействие сосредоточенной нагрузки на вязкоупругое полупространство при движении по его поверхности.....	47
<b>Леоненко Д.В.</b> Вынужденные колебания трехслойного стержня на безынерционном основании.....	50
<b>Лигоцкий А.Л.</b> Деформирование прямоугольной трёхслойной ортотропной пластины.....	52
<b>Марфин А.В., Калашников А.П.</b> Синтез закона управления для математической модели смешительного бака.....	55
<b>Недабой М.А.</b> Математическое моделирование одиночного трансформатора тока.....	57
<b>Разумейчик В.С., Дереченник А.С.</b> Проблемы решеточного представления внешешеточной модели полидисперсной системы.....	58
<b>Сидоренко Ю.В.</b> To a question on statement of a problem on modelling processes of structurization of foam concretes.....	61
<b>Старовойтов С.А.</b> Моделирование напряженно-деформированного состояния трехслойного стержня на упругом основании при локальных силовых воздействиях.....	64
<b>Томкевич А.П.</b> О принципах выполнения дифференциальной защиты трансформатора.....	66
<b>РАЗДЕЛ IV. СОВРЕМЕННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ</b> .....	68
<b>Артюх А. Е., Дунешенко Я.И., Шумра А. П., Новаш И.В.</b> Разработка и исследование модели трансформаторной подстанции в системе динамического моделирования Simulink MATLAB.....	68
<b>Барбук Е.А., Сазонов И.Е., Ефремов П.В., Сурус И.А., Новаш И.В.</b> Разработка и исследование модели трехфазного тиристорного преобразователя в системе динамического моделирования Simulink MATLAB.....	71
<b>Вельгас С.В.</b> Кластерный алгоритм решения биквадратной задачи о размещении производственных предприятий.....	74
<b>Волков Е.Г., Раткевич А.В.</b> Алгоритмы вычисления характеристик форм двух- и трехмерных объектов.....	76
<b>Горелик С.Г., Михнюк В.Н., Семенченко А.В.</b> Применение прикладных библиотек в САПР.....	78
<b>Григореня А.А., Филипенко К.М., Ковалев В.В., Новаш И.В.</b> Разработка расчетных программ для исследования переходных и установившихся режимов электрических цепей в среде программирования MATLAB.....	80
<b>Добранова Т.В.</b> Разработка программного обеспечения для оценки и вычисления спектра матрицы.....	81
<b>Комар А.В.</b> О задаче исследования влияния округлений чисел с плавающей точкой на результаты итерационных расчетов.....	84
<b>Костюк Д.А., Николаюк Л.Н.</b> Автоматизация обработки экспериментальных данных при акустических спектральных исследованиях.....	85

<b>Куган С.Ф.</b> Современная автоматизация управления в строительной компании.....	88
<b>Куш Д.Д.</b> Оптимизация моделей компьютерных сетей с помощью сетей массового обслуживания.....	90
<b>Левицкий А.А.</b> Использование генетического алгоритма в моделировании учебного плана.....	92
<b>Лысюк С. С., Трофимович И. В., Новаш И.В.</b> Компьютерные пакеты анимационной графики для визуализации электромагнитных процессов.....	94
<b>Парфомук С.И.</b> Применение пространственных корреляционных функций при районировании территории Беларуси по характеру колебания годового стока рек.....	95
<b>Пивень М.В., Бладыко Ю.В.</b> Измерение коэффициентов усиления.....	98
<b>Прожерин И.Г.</b> Решение задачи о назначении методом рычага.....	100
<b>Родич М.Б.</b> Новый метод оптимизации расходов на услуги мобильной связи.....	102
<b>Сидоренко Ю.В.</b> К вопросу об автоматизации расчетов материально-энергетических потоков систем производства штучных строительных материалов в курсовом и дипломном проектировании.....	105
<b>Скороспешкин М.В.</b> Цифровой адаптивный фазовый корректор динамических характеристик систем автоматического регулирования.....	108
<b>Храмова Е.В.</b> Условные распределения биграмм выходных последовательностей одного класса автоматов Мура.....	110
<b>Шандриков А.С.</b> Разрезание графа формированием локальных максимумов.....	112
<b>Ярмола А.Н.</b> Статистическое оценивание параметров MTD-модели временных рядов.....	115
<b>Ярош Л.С.</b> Применение эконометрических методов для анализа потока абитуриентов.....	117
<b>Ярошевич О.В., Казак А.Н., Гришан К.Ю.</b> Создание мультимедийного сопровождения выполнения расчетно-графических заданий по начертательной геометрии в среде Power Point.....	119
<b>РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ</b> .....	122
<b>Барина Ю.А., Ковалева О.С.</b> Вычисление коэффициентов разложения функций в неортогональные ряды.....	122
<b>Валуева Т.А.</b> О неприводимости полиномов специального вида над конечными полями.....	126
<b>Герасимчик И.В., Дейцева А.Г.</b> Численное решение интегральных уравнений в мультивейвлетном и тригонометрическом базисах.....	128
<b>Каримова Т.И.</b> Ассоциированные решения систем стохастических неоднородных уравнений в $\theta$ -интегралах.....	130
<b>Кишилов Д.В.</b> Робастная последовательная проверка простых гипотез о параметрах процесса AR(1).....	132
<b>Кишкевич А.П., Ревотюк М.П.</b> Разностная схема представления состояний решения задачи коммивояжера.....	135
<b>Костевич А.Л., Милованова И.С.</b> Построение одноэтапной процедуры множественной проверки гипотез со «свидетелем».....	137

<b>Костевич А.Л., Шилкин А.В.</b> Построение критерия согласия для цепей Маркова большой связности.....	139
<b>Маслов А.С.</b> О диаметре графа разностных переходов случайной подстановки.....	142
<b>Матысик О.В., Голубцов И.А.</b> К вопросу о сходимости метода итерации решения операторных уравнений в случае не единственного решения.....	143
<b>Новохрост В.Г.</b> Существование и единственность решений одного класса дифференциальных включений.....	145
<b>Савчук В.Ф., Голубцов И.А.</b> О регуляризации операторных уравнений при помощи итеративного метода.....	146
<b>Семенчук Н.В.</b> Построение оценки спектральной плотности с помощью вейвлетов.....	149
<b>Смачек С.Н.</b> Матричный метод реализации алгоритма кристаллизации решения задачи коммивояжера.....	151
<b>Теленкевич Р.С.</b> Способ установления изоморфизма графов.....	154
<b>Филиппович М.М., Густова Г.В.</b> Операторный метод исследования свободных колебаний струны при помощи степенных рядов.....	155
<b>Шлык П.А.</b> Сравнительный анализ робастности двух алгоритмов многомерного байесовского прогнозирования.....	157
<b>Юдов А.А., Шумаков Т.А.</b> О редуцируемости некоторых однородных пространств.....	160
<b>Юхимук М.М.</b> Анализ краевой задачи о скачке для многосвязных и бесконечно связных областей.....	161

Научное издание

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Материалы IV республиканской научной конференции  
молодых ученых и студентов  
28-30 ноября 2005 года

Ответственный за выпуск: **Рубанов В.С.**

Редактор: **Строкач Т.В.**

Компьютерная верстка: **Боровикова Е.А.**

Корректор: **Никитчик Е.В.**

Лицензия ЛВ №382 от 1.09.2000 г.

Лицензия ЛП №178 от 14.01.2003 г.

Подписано к печати 18.11.2005 г. Формат 60x84 1/16. Бумага «Снегурочка». Гарнитура Arial Narrow. Усл.п.л. 9,8. Уч.изд.л. 10,5. Тираж 100 экз. Заказ № 1136.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.