

Игнатюк В.И., Тур А.В.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСИЛИЙ В ДВУХШАРНИРНЫХ КРУГОВЫХ АРКАХ, ЗАГРУЖЕННЫХ РАДИАЛЬНО ДЕЙСТВУЮЩИМИ РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ НАГРУЗКАМИ

Введение. Ветровые нагрузки на цилиндрические покрытия действуют в радиальных направлениях [1]. Расчет таких покрытий может быть сведен к расчету арочных систем. Поэтому расчет двухшарнирных арок кругового очертания на действие радиально направленных равномерно распределенных нагрузок (рис. 1) актуален и представляет интерес.

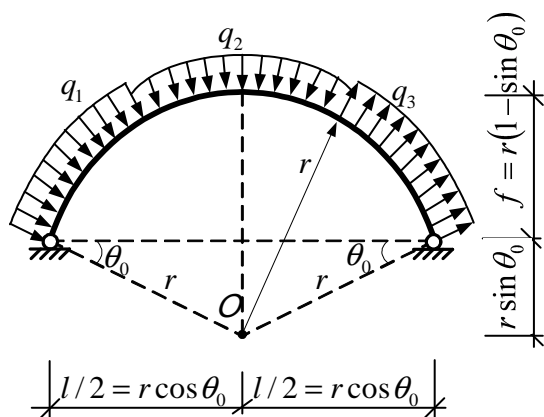


Рис. 1. Расчетная схема

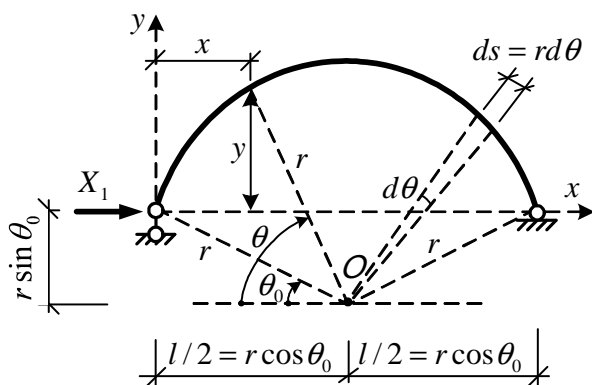


Рис. 2. Основная система метода сил

Постановка задачи. Рассмотрим круговые арки постоянной жесткости (рис. 1), загруженные статическими радиально действующими равномерно распределенными нагрузками. Получим для них выражения внутренних сил – изгибающих моментов, поперечных и продольных сил – в произвольном сечении системы. Расчет выполним методом сил с учетом как изгибающих моментов, так и поперечных и продольных сил. Так как оси рассматриваемых арок изменяются по круговому закону, получение и интегрирование зависимостей удобно выполнять в полярной системе координат. За полюс примем точку в центре окружности (точку O), а в качестве оси, относительно которой будем отсчитывать угол (θ), примем горизонтальную ось, направленную от полюса влево. Зависимость между декартовой (x, y) и полярной (r, θ) системами коор-

динат здесь имеет вид

$$\begin{cases} x = r(\cos \theta_0 - \cos \theta); \\ y = r(\sin \theta - \sin \theta_0). \end{cases} \quad (1)$$

Получение расчетных зависимостей. Двухшарнирная арка как статически неопределимая система имеет одну лишнюю связь. Основную систему метода сил получим, отбросив левую горизонтальную связь (рис. 2). Каноническое уравнение метода сил записывается в виде [2]

$$\delta_{11} X_1 + A_P = 0. \quad (2)$$

Выражения для внутренних усилий в сечениях основной системы метода сил от действия единичного неизвестного ($X_1=1$) записываются в виде:

$$\begin{aligned} \bar{M}_1 &= -y = -r(\sin \theta - \sin \theta_0); \\ \bar{Q}_1 &= -\cos \theta; \quad \bar{N}_1 = -\sin \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Единичное перемещение δ_{11} (2) вычислим по формуле Мора

$$\delta_{11} = \int_0^s \frac{\bar{M}_1^2 ds}{EJ} + \int_0^s \eta \frac{\bar{Q}_1^2 ds}{GA} + \int_0^s \frac{\bar{N}_1^2 ds}{EA}, \quad (4)$$

где: EJ, GA, EA – жесткости сечений арки соответственно на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие; η – коэффициент, учитывающий неравномерность распределения касательных напряжений по высоте сечений при изгибе.

Подставив выражения (3) в (4), учитывая, что $ds = r d\theta$ (рис. 2), и выполнив интегрирование, получим единичное перемещение δ_{11} в виде

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{r^3}{EJ} \left[(\pi - 2\theta_0) (0,5 + \sin^2 \theta_0) - 1,5 \sin 2\theta_0 \right] + \\ &+ \eta \frac{r}{GA} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right] + \\ &+ \frac{r}{EA} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right], \end{aligned} \quad (5)$$

где первое слагаемое учитывает влияние изгибающих моментов, второе и третье – соответственно поперечных и продольных сил.

Для определения грузового перемещения Δ_{1D} (2) по формуле Мора

$$\begin{aligned} A_P &= \sum \int \frac{\bar{M}_1 M_P ds}{EJ} + \sum \int \eta \frac{\bar{Q}_1 Q_P ds}{GA} + \\ &+ \sum \int \frac{\bar{N}_1 N_P ds}{EA}, \end{aligned} \quad (6)$$

Игнатюк Валерий Иванович, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой строительной механики Брестского государственного технического университета.

Тур Андрей Викторович, студент строительного факультета Брестского государственного технического университета. Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

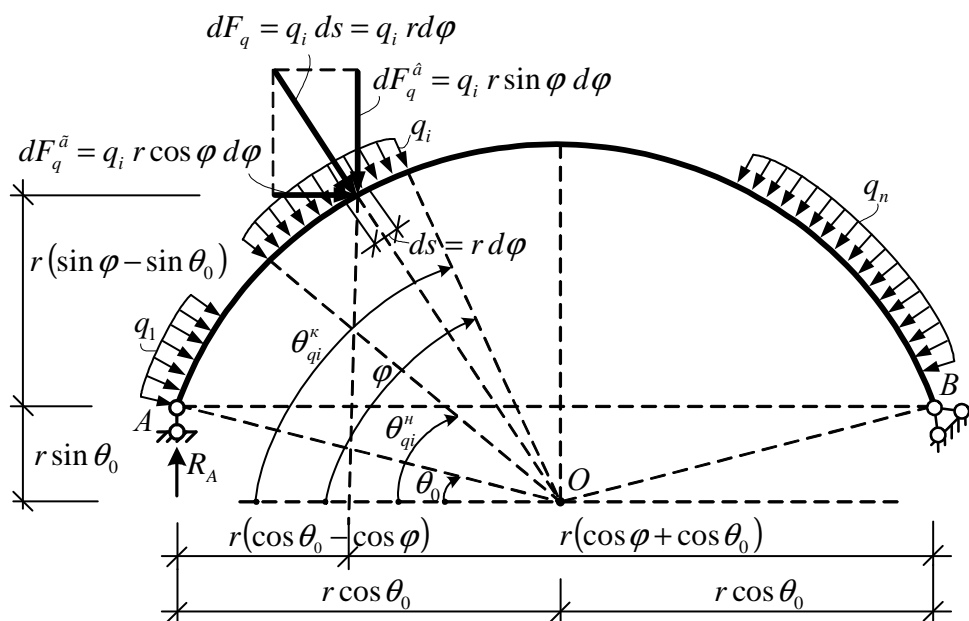


Рис. 3. Расчетная схема для определения опорных реакций

необходимо найти зависимости изменения внутренних сил в сечениях арки от внешних нагрузок. Определим вначале вертикальную реакцию в опоре A , после чего можно будет найти зависимости изменения всех усилий, рассматривая левую часть арки. Для определения опорной реакции R_A составим сумму моментов всех сил, действующих на арку, относительно опорной точки B (рис. 3)

$$R_A \cdot 2r \cos \theta_0 + \sum_{i=1}^{n_q} \int_{\theta_{qi}^n}^{\theta_{qi}^k} [q_i r \cos \varphi \cdot r (\sin \varphi - \sin \theta_0) - q_i r \sin \varphi \cdot r (\cos \varphi + \cos \theta_0)] d\varphi = 0,$$

где n_q – число равномерно распределенных радиально направленных нагрузок, действующих на арку.

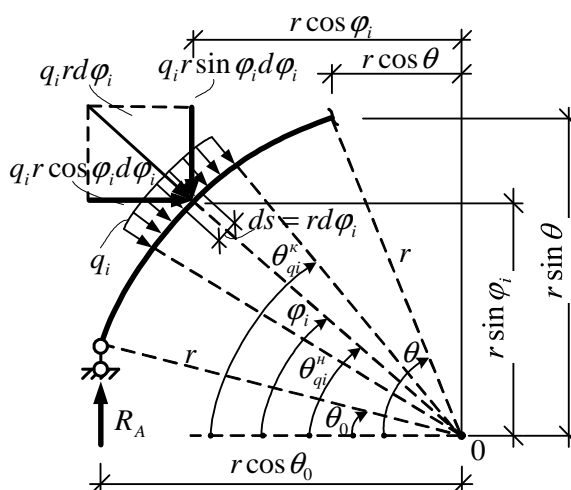
Выполнив интегрирование и решив уравнение относительно R_A , получим

$$R_A = \frac{r}{2 \cos \theta_0} \sum_{i=1}^{n_q} \left\{ q_i \left[(\sin \theta_{qi}^k - \sin \theta_{qi}^n) \sin \theta_0 - (\cos \theta_{qi}^k - \cos \theta_{qi}^n) \cos \theta_0 \right] \right\}, \quad (7)$$

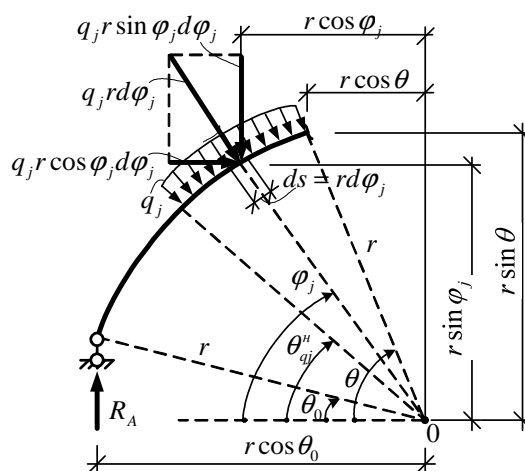
Для получения выражений внутренних сил в произвольном сечении (θ) от действия внешних радиально направленных равномерно распределенных нагрузок рассмотрим равновесие левой части арки относительно сечения и выразим их через элементарные нагрузки на бесконечно малых участках $ds = rd\varphi$ (рис. 4, а, б):

$$M_P = R_A \cdot r (\cos \theta_0 - \cos \theta) - \sum_{i=1}^{n_q} \int_{\theta_{qi}^n}^{\theta_{qi}^k} q_i r [\cos \varphi_i \cdot r (\sin \theta - \sin \varphi_i) + \sin \varphi_i \cdot r (\cos \varphi_i - \cos \theta)] d\varphi_i - \int_{\theta_{qi}^k}^{\theta} q_j r [\cos \varphi_j \cdot r (\sin \theta - \sin \varphi_j) + \sin \varphi_j \cdot r (\cos \varphi_j - \cos \theta)] d\varphi_j;$$

$$+ \sin \varphi_j \cdot r (\cos \varphi_j - \cos \theta)] d\varphi_j; \quad (8)$$



а) сечение на участке, свободном от нагрузки



б) сечение на участке распределенной нагрузки

Рис. 4. Отсечение части арки

$$Q_P = R_A \sin \theta - \sum_{i=1}^{n_q^{лев}} \int_{\theta_{qi}^u}^{\theta_{qi}^к} q_i r (\sin \theta \cdot \sin \varphi_i + \cos \theta \cdot \cos \varphi_i) d\varphi_i - \int_{\theta_{qj}^u}^{\theta} q_j r (\sin \theta \cdot \sin \varphi_j + \cos \theta \cdot \cos \varphi_j) d\varphi_j; \quad (9)$$

$$N_P = -R_A \cos \theta + \sum_{i=1}^{n_q^{лев}} \int_{\theta_{qi}^u}^{\theta_{qi}^к} q_i r (\cos \theta \cdot \sin \varphi_i - \sin \theta \cdot \cos \varphi_i) d\varphi_i + \int_{\theta_{qj}^u}^{\theta} q_j r (\cos \theta \cdot \sin \varphi_j - \sin \theta \cdot \cos \varphi_j) d\varphi_j, \quad (10)$$

где: $q_i, n_{qi}^{лев}$ – нагрузки и их число, которые полностью (от начала до конца) действуют слева от рассматриваемого сечения (рис. 4, а); q_j – нагрузки, которые пересекаются рассматриваемым сечением, в результате чего слева от сечения будет действовать только часть этих нагрузок (рис. 4, б).

Последние слагаемые в этих выражениях будут присутствовать только в случаях, если рассматриваемое сечение находится на участке действия распределенной нагрузки (q_j) (рис. 4, б).

После интегрирования выражений (8) – (10) в пределах участков действия нагрузок, получим:

$$M_P = R_A r (\cos \theta_0 - \cos \theta) - r^2 \sum_{i=1}^{n_q^{лев}} q_i \left[\sin \theta (\sin \theta_{qi}^к - \sin \theta_{qi}^u) + \cos \theta (\cos \theta_{qi}^к - \cos \theta_{qi}^u) \right] - r^2 q_j \left[\sin \theta (\sin \theta - \sin \theta_{qj}^u) + \cos \theta (\cos \theta - \cos \theta_{qj}^u) \right]; \quad (11)$$

$$Q_P = R_A \sin \theta - \sum_{i=1}^{n_q^{лев}} q_i r \left[\cos \theta (\sin \theta_{qi}^к - \sin \theta_{qi}^u) - \sin \theta (\cos \theta_{qi}^к - \cos \theta_{qi}^u) \right] - q_j r (\sin \theta \cdot \cos \theta_{qj}^u - \cos \theta \cdot \sin \theta_{qj}^u); \quad (12)$$

$$N_P = -R_A \cos \theta - \sum_{i=1}^{n_q^{лев}} q_i r \left[\cos \theta (\cos \theta_{qi}^к - \cos \theta_{qi}^u) + \sin \theta (\sin \theta_{qi}^к - \sin \theta_{qi}^u) \right] - q_j r (1 - \cos \theta \cdot \cos \theta_{qj}^u - \sin \theta \cdot \sin \theta_{qj}^u). \quad (13)$$

Каждое из выражений (11) – (13) имеет три слагаемых, которые в зависимости от типа участка, на котором находится сечение, могут присутствовать, а могут и не присутствовать в выражениях. Первое слагаемое определяет влияние на усилие опорной реакции и будет присутствовать всегда. Второе и третье слагаемые отражают воздействие распределенных нагрузок и будут присутствовать, если соответствующая распределенная нагрузка действует слева от сечения. При этом второе слагаемое учитывает распределенные нагрузки, которые полностью действуют слева от сечения (например, нагрузки q_1 и q_2 для сечений 5 и 6 на рис. 5), а третье слагаемое учитывает распределенные нагрузки, действующие частично слева от сечения, то есть находящиеся на участках, в пределах которых проходит рассматриваемое сечение (нагрузка q_1 для сечения 2, q_2 для сечения 4, q_3 для сечения 6 на рис. 5).

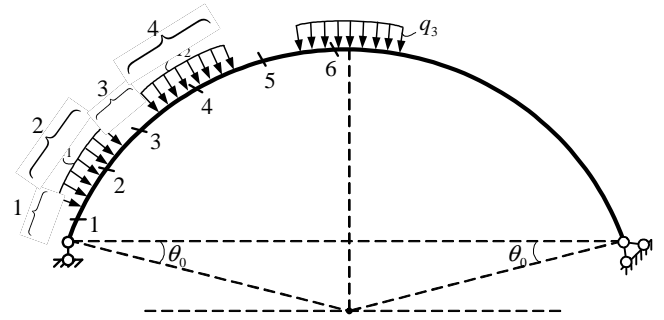


Рис. 5. Схема возможных расположений расчетных сечений

Подставив выражения (3), (11) – (13) в (6) и проинтегрировав по участкам непрерывности эпюр, получим грузовое перемещение, которое также представим в виде трех слагаемых, учитывающих соответственно три вида внутренних сил в арках – усилий M, Q и N

$$A_{1P} = A_{1P}^M + A_{1P}^Q + A_{1P}^N, \quad (14)$$

где:

$$A_{1P}^M = \frac{r^3 R_A}{EJ} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \sin 2\theta_0 - 2 \cos^2 \theta_0 \right] + \frac{r^4}{EJ} \sum_{i=1}^{n_q} q_i \left\{ \frac{1}{4} \sin \theta_{qi}^u (\sin 2\theta_{qi}^к - \sin 2\theta_{qi}^u) - \frac{1}{2} \cos \theta_{qi}^u (\sin^2 \theta_{qi}^к - \sin^2 \theta_{qi}^u) - (\theta_{qi}^к - \theta_{qi}^u) \left(\frac{1}{2} \sin \theta_{qi}^u + \sin \theta_0 \right) + (\sin \theta_{qi}^к - \sin \theta_{qi}^u) \left[\frac{1}{2} (\pi - \theta_0 - \theta_{qi}^к) + \frac{1}{4} (\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta_{qi}^к) - \sin \theta_0 (\cos \theta_0 + \cos \theta_{qi}^к) + \sin \theta_0 \cos \theta_{qi}^к \right] + (\cos \theta_{qi}^к - \cos \theta_{qi}^u) \left[\frac{1}{2} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_{qi}^к) - \sin \theta_0 (\sin \theta_0 - \sin \theta_{qi}^к) - (1 + \sin \theta_0 \sin \theta_{qi}^u) \right] \right\}; \quad (15)$$

$$A_{1P}^Q = \eta \frac{r^2}{GA} \sum_{i=1}^{n_q} q_i \left\{ -\sin \theta_{qi}^u \left[\frac{1}{2} (\theta_{qi}^к - \theta_{qi}^u) + \frac{1}{4} \theta_{qi}^u (\sin 2\theta_{qi}^к - \sin 2\theta_{qi}^u) \right] + \frac{1}{2} \cos \theta_{qi}^u (\sin^2 \theta_{qi}^к - \sin^2 \theta_{qi}^u) + \frac{1}{2} (\sin \theta_{qi}^к - \sin \theta_{qi}^u) \left[(\pi - \theta_0 - \theta_{qi}^к) - \frac{1}{2} (\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta_{qi}^к) \right] - \frac{1}{2} (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_{qi}^к) (\cos \theta_{qi}^к - \cos \theta_{qi}^u) \right\}; \quad (16)$$

$$A_{1P}^N = \frac{r^2}{EA} \sum_{i=1}^{n_q} q_i \left\{ \frac{1}{2} (\cos \theta_{qi}^к - \cos \theta_{qi}^u) (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta_{qi}^к - 2) - \frac{1}{2} \cos \theta_{qi}^u (\sin^2 \theta_{qi}^к - \sin^2 \theta_{qi}^u) - \frac{1}{2} (\theta_{qi}^к - \theta_{qi}^u) \sin \theta_{qi}^u + \frac{1}{4} \sin \theta_{qi}^u (\sin 2\theta_{qi}^к - \sin 2\theta_{qi}^u) + \frac{1}{2} (\sin \theta_{qi}^к - \sin \theta_{qi}^u) \times \left[(\pi - \theta_0 - \theta_{qi}^к) + \frac{1}{2} (\sin 2\theta_0 + \sin 2\theta_{qi}^к) \right] \right\}. \quad (17)$$

