УДК 539.3

Босаков С.В., Мордич Д.М.

ФОРМУЛА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ СИЛЫ НА УПРУГИЙ СЛОЙ

В существующих нормативных документах [1] заложены две модели упругих оснований: линейно-деформируемое полупространство с условным ограничением сжимаемой толщи и линейно-деформируемый слой.

Однако в ныне применяемых программных комплексах [2], [3] используют только одну модель упругого основания с двумя коэффициентами постели, способную учитывать только вертикальные нагрузки при расчете системы “здание + фундамент + основание”, поэтому инженеру – расчетчику при расчете сооружения на действие ветра, горизонтального направления сейсмической волны и т.д. приходится вводить в конструкцию фундамента горизонтальные связи, жесткость которых и места расположения зачастую инженерно не обоснованы, что дает ошибочные результаты в распределении усилий при применении плитных фундаментов.

Авторы предлагают решить этот вопрос следующим образом. Способом Б.Н. Жемочкина [4] рассчитывается фундаментная плита на действие горизонтальной единичной силы. В результате расчета определяется горизонтальное перемещение плиты или ее податливость. Это позволяет поставить в каждом узле конечноэлементной модели фундаментной плиты горизонтальную связь, совместимую с принятой моделью упругого основания. Однако при реализации способа Б.Н. Жемочкина необходимо иметь выражения для горизонтальных перемещений границы основания от действия равномерно распределенной горизонтальной нагрузки. Такая задача решена только для полупространства [4, 5, 6], поэтому ниже авторы выводят выражения для горизонтальных перемещений поверхности упругого слоя от единичной силы, равномерно распределенной по площади прямоугольника на поверхности слоя.

Определение горизонтальных перемещений *u* поверхности упругого однородного изотропного слоя от действия горизонтальной сосредоточенной силы. Путь решения этой задачи (рис. 1) в общем виде указан в монографии Я.С. Уфлянда [7], где решение ищется в виде четырех гармонических функций:

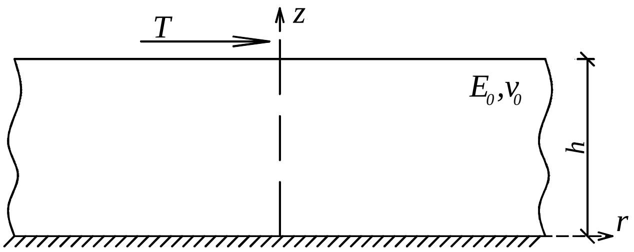

Рис. 1. Действие горизонтальной силы на упругий слой.

$$\Phi_0 = \cos\int_0^\infty A_0 sh\lambda z J_1(\lambda r)\,d\lambda\,; \tag{1}$$

$$\Phi_3 = \cos\int_0^\infty \left(A_3 ch\lambda z + B_3 sh\lambda z\right) J_1(\lambda r)\lambda\,d\lambda\,,$$

причем профессором Я.С. Уфляндом сразу найдено, что

$$\Phi_1 = \frac{T}{4\pi(1-\nu_0)}\int_0^\infty \frac{sh\lambda z}{ch\lambda h}\,J_0(\lambda r)\,d\lambda\,; \tag{2}$$

$$\Phi_2 = 0\,,$$

а остальные коэффициенты A_i, B_i *(1)* находятся из решения системы линейных уравнений следующего вида ($\mu=\lambda h$):

$$\begin{cases} -\left[(1-2\nu_0)sh\mu + \mu ch\mu\right]A_3 + \\ +\left[2(1-\nu_0)ch\mu - \mu sh\mu\right]B_3 = \Psi_1(\mu) \\ -\left[2(1-\nu_0)ch\mu + \mu sh\mu\right]A_3 + \\ +\left[(1-2\nu_0)sh\mu - \mu ch\mu\right]B_3 = \Psi_2(\mu) \end{cases}$$

$$\Psi_1(\mu) = \frac{Th}{4\pi(1-\nu_0)}\left[1 + (1-2\nu_0)\frac{th\mu}{\mu}\right];$$

$$\Psi_2(\mu) = -\frac{Th\cdot th\mu}{4\pi(1-\nu_0)}$$

и $$A_0 = (3-4\nu_0)A_3 - \frac{Th}{4\pi(1-\nu_0)}\cdot\frac{sh\mu}{ch^2\mu} \tag{3}$$

Для горизонтальных перемещений поверхности упругого слоя имеем [7]:

$$2G_0 u = -\frac{\partial F}{\partial x} + 4(1-\nu_0)\Phi_1 =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3\right) + 4(1-\nu)\Phi_1 =$$

$$= (3-4\nu_0)\Phi_1 - x\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_0 + h\Phi_3\right) \tag{4}$$

Раскладываем гиперболический тангенс в ряд [8]:

$$th\mu = 1 + 2\sum_{k=1}^\infty (-1)^k e^{-2k\mu}\,,$$

и для $z=h$ находим после интегрирования

$$\Phi_1 = \frac{T}{4\pi(1-\nu_0)}\int_0^\infty \left[1 + 2\sum_{k=1}^\infty (-1)^k e^{-2k\lambda h}\right] J_0(\lambda_r)\,d\lambda =$$

$$= \frac{T}{4\pi(1-\nu_0)}\left[\frac{1}{r} + 2\sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^k}{\sqrt{4k^2h^2 + r^2}}\right],$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{5}$$

При этом использовались табличные интегралы [8]:

Босаков Сергей Викторович, *доктор технических наук, профессор, профессор кафедры строительной механики Белорусского национального технического университета.*
Беларусь, БНТУ, 220027, г. Минск, пр. Ф.Скорины, 65.
Мордич Дмитрий Михайлович, *инженер 1-кат. лаборатории строительной механики и автоматизации расчета зданий и сооружений отдела строительных конструкций БелНИИС.*
Беларусь, БелНИИС, 220114, г. Минск, Староборисовский тракт, 15.

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)\,d\lambda = \frac{1}{r};\quad \int_0^\infty e^{-2k\lambda h} J_0(\lambda r)\,d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2+4k^2h^2}}.$$

Запишем часть выражения (4) в несколько иной форме, чтобы облегчить дальнейшие выкладки:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi_0 + h\Phi_3\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi_0 + h\Phi_3\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} =$$

$$= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi_0 + h\Phi_3\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\Phi_1 = \cos\varphi\frac{\partial \Phi_1}{\partial r},\ \cos\varphi = \frac{x}{r}.$$

В результате решения системы *(3)* находим

$$A_3 = \frac{Th}{4\pi(1-v_0)}\times$$

$$\times\frac{-2(1-2v_0)^2 ch\mu + 2\left[\mu^2+(1-2v_0)^2\right]sch\mu + 4\mu(1-v_0)sh\mu}{\mu\Delta};$$

$$B_3 = -\frac{Th}{4\pi(1-v_0)}\cdot\frac{4(1-v_0)\left[\mu ch\mu + (1-2v_0)sh\mu\right]}{\mu\Delta};\quad (6)$$

$$\Delta = 5 + 2\mu^2 + 4v_0(2v_0-3) + (3-4v_0)ch2\mu,$$

а затем по (1) определяем A_0. Подставим (6) в (4). После преобразований получаем для $z = h$:

$$\Phi_0 + h\Phi_3 = \frac{Th\cos\varphi}{4\pi(1-v_0)}\int_0^\infty L_u(\mu,v_0)\frac{J_1\left(\mu\frac{r}{h}\right)}{\mu}d\mu,\quad (7)$$

$$L_u(\mu,v_0) =$$

$$= \frac{2\mu\left[\mu^2+(1-2v_0)^2\right]sch^2\mu - (1-2v_0)^2\left[2\mu+(3-4v_0)sh2\mu\right]}{\Delta} +$$

$$\frac{+2(3-4v_0)\left[\mu^2+(1-2v)^2\right]th\mu}{\Delta}.$$

Исследуем асимптотические свойства функции $L_u(\mu, v_0)$ в выражении (7)

$$\lim_{\mu\to\infty} L_u(\mu,v_0) = -(1-2v_0)^2;$$

$$\lim_{\mu\to 0} L_u(\mu,v_0) = \frac{1}{1-v_0}\mu^3.\quad (8)$$

В соответствии с этими асимптотическими свойствами (8) аппроксимируем $L_u(\mu, v_0)$ на полубесконечном интервале выражением:

$$L_u(\mu,v_0) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\mu}\left\{1 + \left[1 + 8(1-v_0)(1-2v_0)^2\right]\frac{\mu^3 e^{-2\mu}}{1-v_0} - (1-2v_0)^2 + th^3 2\mu\right\}\quad (9)$$

На рис. 2 изображены графики точного и аппроксимированного выражений $L_u(\mu, v_0)$. Надо подчеркнуть, что точность аппроксимации $L_u(\mu, v_0)$ не эквивалентна точности вычисления перемещений, она всегда меньше, так как *(7)* составляет часть от полного перемещения u. Далее используем выражение [8].

$$th^3 2\mu = 1 - 6e^{-4\mu} + 18e^{-8\mu} + 0\left(e^{-12\mu}\right)\quad (10)$$

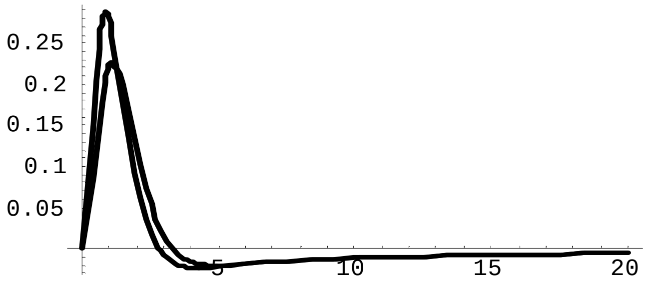

Рис. 2. Графики точного и аппроксимированного выражений ($DELTA = L(\mu, \nu_0)$) при определении искомых горизонтальных перемещений $u(x, y)$.

После реализации вычислений на пакете «Mathematika» [9], окончательно получаем для искомых горизонтальных перемещений:

$$u(r) = \frac{T(1+v_0)}{4\pi(1-v_0)E_0}\times$$

$$\times\left\{\left[\frac{1}{r} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{4k^2h^2+r^2}}\right](3-4v_0) +\right.$$

$$+x^2\left[\frac{1}{r^3} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\left(4k^2h^2+r^2\right)^{3/2}}\right] -$$

$$\left.-\frac{24h^4\left(h^2-r^2\right)\times\left(32v_0^3 - 64v_0^2 + 40v_0 - 9\right)}{r\left(4h^2+r^2\right)^{7/2}(1-v_0)}\right\}\quad (11)$$

Если в полученном выражении для искомых горизонтальных перемещений перейти к пределу при $h\to\infty$, то должны бы получить выражение для горизонтальных перемещений *u* поверхности упругого однородного изотропного полупространства от горизонтальной силы. Нами получено после взятия предела

$$u(r) = \frac{T(1+v_0)}{4\pi(1-v_0)E_0}\left(\frac{3-4v_0}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)\quad (12)$$

На рис. 3 приведены графики перемещений, полученных по формуле *(12)* и точных [6]

$$u(r) = \frac{T}{\pi E_0}\left[\frac{1-v_0^2}{r} + \frac{v_0(1+v_0)x^2}{r^3}\right].\quad (13)$$

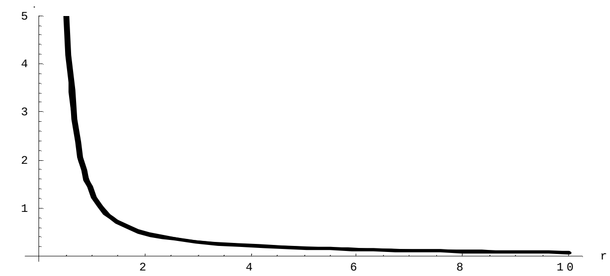

Рис. 3. Графики точного и полученного авторами выражений для горизонтальных перемещений $u(x,y)$ поверхности полупространства при v_0=1/3.

Отметим, что при выбранном значении коэффициента Пуассона графики практически совпадают (v_0=1/3 – наиболее вероятное значение коэффициента Пуассона для широкого класса грунтовых оснований [10]).

Определение горизонтальных перемещений $v(x, y)$ поверхности упругого однородного изотропного слоя от горизонтальной сосредоточенной силы. Выше были получены выражения для гармонических функций, описывающих напряженно-деформированное состояние упругого слоя от действия горизонтальной сосредоточенной силы. Это также позволяет определить перемещения $v(x, y)$ поверхности слоя. Согласно [7], имеем

$$2G_0 v = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi_0 + x\Phi_1 + y\Phi_2 + z\Phi_3\right) + 4\left(1-v_0\right)\Phi_2 =$$
$$= -x\sin\varphi\frac{\partial\Phi_1}{\partial r} - \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi_0 + h\Phi_3\right), \qquad (14)$$
$$\sin\varphi = \frac{y}{r}.$$

Подставляя *(9)*, *(1)* и *(2)* в *(14)*, после преобразований с помощью пакета «Mathematika» получаем выражение для искомых горизонтальных перемещений $v(x, y)$:

$$v(r) = \frac{T\left(1+v_0\right)}{4\pi\left(1-v_0\right)E_0}\left\{\frac{xy}{r^3} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k xy}{\left(4k^2h^2+r^2\right)^{3/2}} - \right.$$
$$-\frac{1+8\left(1-2v_0^2\right)\left(1-v_0\right)}{h\left(1-v_0\right)}\left[\frac{6y}{r\left(4+\frac{r^2}{h^2}\right)^{5/2}} - \frac{30ry}{h^2\left(4+\frac{r^2}{h^2}\right)^{7/2}}\right] -$$
$$-\left(1-2v_0^2\right)\left[\frac{y}{r^2} - \frac{12y}{8h^2\left(1+\sqrt{1+r^2/16h^2}\right)} + \right.$$
$$\left.\left. + \frac{36y}{16h^2\left(1+\sqrt{1+r^2/32h^2}\right)}\right]\right\}$$

Переходя в (15) к пределу при $h\to\infty$, получаем

$$v(r) = \frac{T\left(1+v_0\right)}{4\pi\left(1-v_0\right)E_0}\cdot\frac{xy}{r^3}. \qquad (16)$$

На рис. 4 приведены графики точного [6] и аппроксимированного (16) выражений для перемещений $v(x, y)$ границы однородного изотропного полупространства от действия горизонтальной сосредоточенной силы T при v_0=1/3 и y=2.

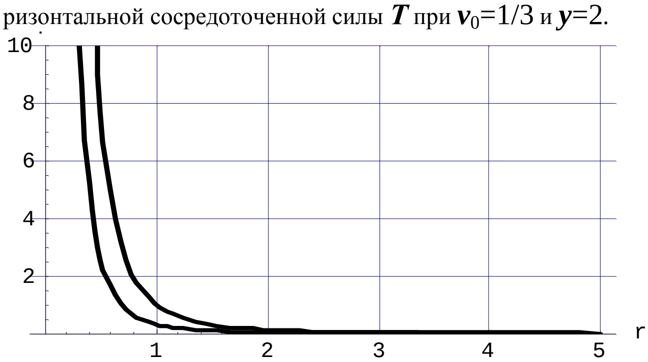

Рис. 4. Графики точного и полученного выражений $v(x, y)$ от действия горизонтальной силы T для упругого полупространства.

Необходимо отметить некоторое различие в перемещениях $v(x, y)$ для полупространства при малых x, то есть вблизи места приложения нагрузки.

Определение горизонтальных перемещений поверхности однородного изотропного слоя от действия равномерно распределенной по площади прямоугольного участка единичной силы. На рис. 5 изображена площадка нагружения, по которой равномерно распределена нагрузка $q = \frac{1}{4ab}$. При определении перемещений от этой нагрузки с помощью формул *(11)* и *(15)* целесообразно точно вычислять только те двойные интегралы, которые содержат сингулярность в знаменателе [4, 5, 6]. Остальные интегрировать численно по квадратурным формулам [11], так как они являются гладкими функциями и их точное вычисление приводит к слишком громоздким формулам. Таким образом, необходимо вычислять точно только следующие интегралы (рис. 5)

$$\int_a^b\int_c^d\frac{d\xi d\eta}{R},\quad \int_a^b\int_c^d\frac{(x-\xi)d\xi d\eta}{R^3},\quad \int_a^b\int_c^d\frac{(x-\xi)(y-\eta)d\xi d\eta}{R^3} \qquad (17)$$

Остальные слагаемые, входящие в формулы для перемещений *(11)* и *(15)*, предлагается вычислять по квадратурной формуле, приведенной в справочнике [11]. Приводим эту формулу ниже (таблица 1).

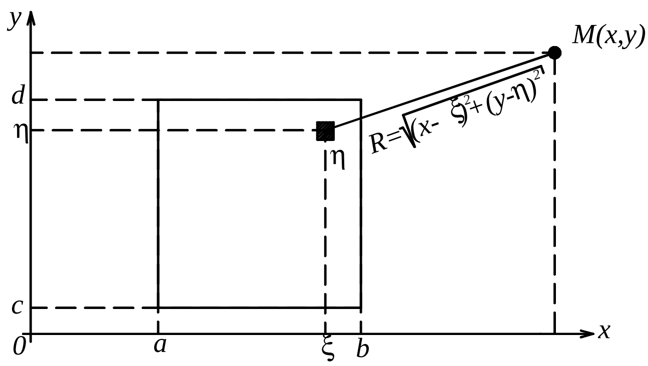

Рис. 5. Область интегрирования для определения перемещений от действия равномерно распределенной нагрузки.

Область интегрирования – квадрат со стороной 2h (рис. 6).

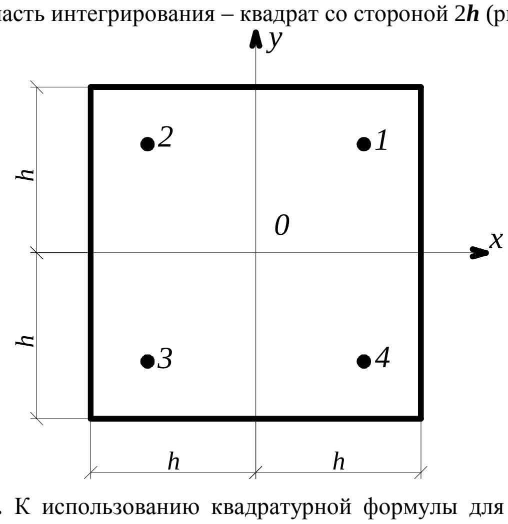

Рис. 6. К использованию квадратурной формулы для двухмерных интегралов.

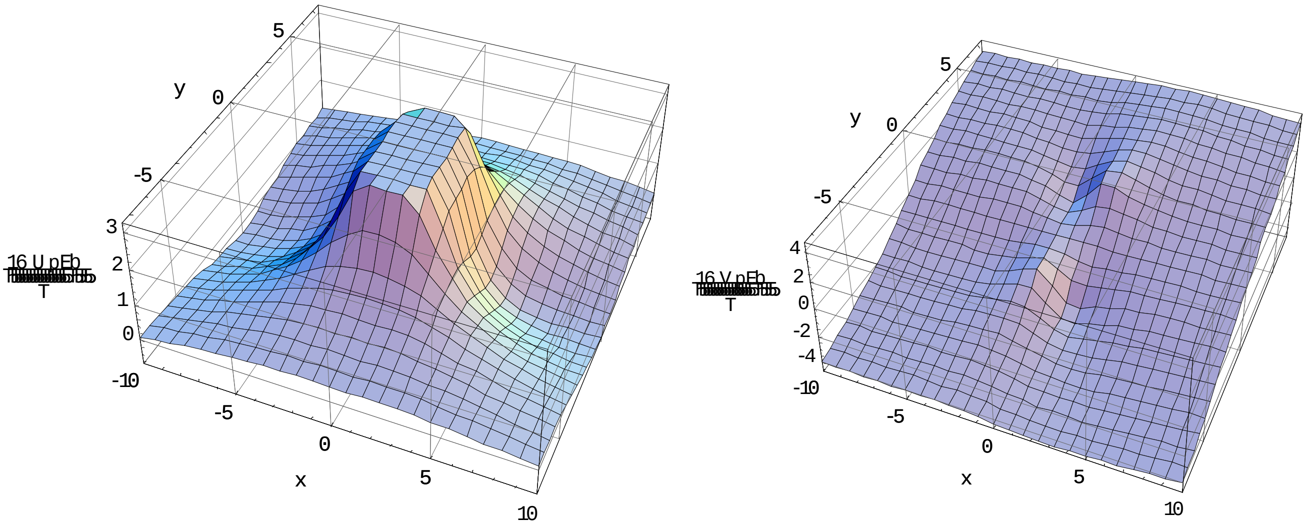

Рис. 7. Поверхности перемещений границы упругого $\boldsymbol{u(x, y)}$ (слева) и $\boldsymbol{v(x, y)}$ (справа) слоя от действия касательной нагрузки с равнодействующей $\boldsymbol{T}$, распределенной по площади квадрата со стороной $2\boldsymbol{a}$ ($\boldsymbol{h}=4\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{v}_0=1/3$).

Двойной интеграл по площади квадрата равен

$$\frac{1}{4h^2}\iint_S f(x,y)\,dxdy=\sum_{i=1}^{4} w_i f(x_i,y_i)+R, \qquad (18)$$

где $\boldsymbol{R}$ - погрешность интегрирования.

Таблица 1

Точки квадрата интегрирования (x_i, y_i)	Весовая функция (w_i)	Точность интегрирования
$\pm h\frac{\sqrt{3}}{3}, \pm h\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{1}{4}$	$R=(h^4)$

Для использования этой квадратурной формулы необходимо эту прямоугольную область [$\boldsymbol{a, b, c, d}$] (рис. 6) привести к квадратной. Это нетрудно выполнить, используя замену переменных в интегралах, по следующей схеме (для простоты выкладок участок нагружения расположен в начале координат и определяется перемещение точки $\boldsymbol{M(x, y)}$).

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} f\left(\overline{x_n}-\bar{\xi},\overline{y_n}-\bar{\eta}\right)\Big|\, d\bar{\xi}d\bar{\eta}=$$

$$=ab\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f\left(a(x_n-\xi),b(y_n-\eta)\right)d\xi d\eta$$

Здесь использовалась подстановка:

$$\bar{\xi}=a\xi;\ \bar{x}=ax;\ d\bar{\xi}=ad\xi; \qquad (19)$$

$$\bar{\eta}=b\eta;\ \bar{y}=by;\ d\bar{\eta}=bd\eta.$$

В итоге получаем с учетом *(18)* для двойного интеграла

$$4ab\sum_{i=1}^{4} w_i f\left(a(x_n-\xi_i),b(y_n-\eta_i)\right),$$

$$\xi_i=\pm\frac{\sqrt{3}}{3};\eta_i=\pm\frac{\sqrt{3}}{3};w_i=\frac{1}{4}.$$

На рис. 7 приведены поверхности перемещений $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ границы упругого однородного изотропного слоя при действии на ее поверхности касательной нагрузки, распределенной по площади квадрата, полученные с помощью пакета «Mathematika». При этом в формулах перемещений от действия единичной силы *(11)* и *(15)* авторы ограничились пятью членами в каждом ряду.

Некоторых пояснений требует принятое авторами ограничение членов ряда в формулах *(11)* и *(15)*. Это вызвано необходимостью соответствия точности вычисления перемещений по формулам *(11)*, *(15)* точности нахождения физической постоянной $\boldsymbol{E}_0$ (модуля деформации грунта), которая определяется в полевых условиях для грунтов с погрешностью до 20% [11].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. СНиП 2.02.01-83. Основания зданий и сооружений. – М.: Строиздат, 1985. – 41с.
2. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчетные модели сооружений и возможность их анализа. Изд. 2. – Киев: изд-во Сталь, 2002. – 467 с.
3. SCAD Structure для пользователя. – Мн., 2002. – 340 с.
4. Жемочкин Б.Н., Синицын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит. – М.: Стройздат, 1960. –. 239 с.
5. Босаков С.В. Статические расчеты плит на упругом основании. – Мн.: БНТУ, 2000. – 128с.
6. Флорин В.А. Основы механики грунтов Т.1. – М.: Гостройиздат, 1959. – 357 с
7. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в теории упругости. – М.: Наука, 1968. – 402с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: ФМ, 1963. – 1100с.
9. Дьяконов В.П. Системы символьной математики. – М.: СК Пресс, 1998. – 328с.
10. Основания, фундаменты и подземные сооружения. Справочник проектировщика. – М.: Стройиздат, 1985. – 479с.
11. Абрамович М. Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука. 1979. – 830 с.