

та являлись: внутренние усилия в сечениях стенки (поперечные силы и изгибающие моменты для каждого участка), форма щели и прогибы шпунтовой стенки в каждом. При расчете принято: $\nu_0=0,33$, $E_0=2000 \text{ т/м}^2$, $E_b=4050000 \text{ т/м}^2$, $\alpha=\pi/4$ и $\beta=\pi/4$, $DLINP=8\text{м}$ и $DLINL=4\text{м}$, $P=50 \text{ т}$, $h=0 \text{ м}$.

Стенка по длине была разбита на $n = 20$ участков. При этом сплошной контакт между двумя плоскими клиньями, начиная от вершины щели, был заменен контактом в отдельных точках для пятидесяти участков той же длины [11]. Опираясь на данные упругого расчета [11], номера точек раздела граничных условий k и m можно задавать в определенных пределах, отбросив те значения, для которых результаты заведомо не будут искомыми.

Полученные на линейном этапе результаты согласуются с результатами, полученными при упругом расчете стенки с учетом ее гибкости [11].

На рис. 6 показано изменение контактных напряжений по длине шпунтовой стенки при действии на нее сосредоточенной силы для нескольких итераций на линейном и нелинейном этапах расчета, а также приведены значения максимальных изгибающих моментов. Отсюда можно сделать вывод об искомом решении линейной задачи, причем этому решению соответствуют точки раздела граничных условий $k = 17$ и $m = 18$.

В таблице 1 приведены значения максимального изгибающего момента, максимального контактного напряжения и перемещений вершины стенки на поверхности упругой среды на линейном этапе расчета (итерация №0) и на нескольких последующих итерациях нелинейного расчета (для точек раздела граничных условий $k = 17$ и $m = 18$). Следует отметить, что перемещение стенки на поверхности полуплоскости является относительной величиной.

Отсюда видно, что итерационный алгоритм при данной нагрузке достаточно быстро сходится: на итерациях № 1-2 результаты сходятся с точностью $\varepsilon = 2,51\%$, а уже на итерациях № 7-8 – с точностью $\varepsilon = 0,23\%$. При этом можно сделать следующие выводы:

1) при переходе к расчету физически нелинейной стенки значение максимального изгибающего момента в сечении стенки уменьшается с уменьшением жесткости стенки;

2) при переходе к расчету физически нелинейной стенки значение относительного перемещения вершины на поверхности упругой среды уменьшается, а значение углового перемещения — увеличивается с уменьшением жесткости стенки.

3) по сравнению с линейным решением положение максимального контактного напряжения при нелинейном расчете смещается к вершине стенки.

Следует также отметить, что при переходе от одной близкой к искомому решению итерации к другой величины изги-

бающих моментов и поперечных сил, перемещений вершины стенки на поверхности упругой среды изменяются незначительно.

Заключение

Полученные результаты могут найти применение при строительстве метро неглубокого заложения в условиях плотной городской застройки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Банцури Р. Д. Контактная задача для клина с упругим креплением // Доклады АН СССР. – 1973. – т. 211. – № 4. – С. 797-800.
2. Нуллер Б. М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой // ПММ. – 1974. – т. 38. – вып. 5. – С. 876-882.
3. Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином // ПММ. – 1974. – т. 38. – вып. 2. – С. 312-320.
4. Огранович А. Б., Горбунов-Посадов М. И. Расчет фундаментной стенки на горизонтальную нагрузку с учетом разрыва сплошности основания // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1966. – № 3. – С. 11-14.
5. Огранович А. Б. Расчет гибкой фундаментной стенки на горизонтальную нагрузку с учетом разрыва сплошности основания // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1967. – № 6. – С. 7-9.
6. Какосимида Н. Ф. Расчет фундаментной стенки, заглубленной в упругоползучее основание // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1989. – № 5. – С. 23-24.
7. Лазарева И. В. Расчет методом конечных элементов гибкой стенки, погруженной в грунт // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 1976. – № 2. – С. 27-29.
8. Готман А. Л. Расчет свай переменного сечения на совместное действие вертикальной и горизонтальной нагрузки методом конечных элементов // Основания, фундаменты и механика грунтов. – 2000. – № 1. – С. 6-12.
9. СНБ 5.03.01-02 Бетонные и железобетонные конструкции. – Мн.: Минстройархитектуры Республики Беларусь, 2003. – 139 с.
10. Жемочкин Б. Н., Синицын А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. – М.: Госстройиздат, 1962. – 240 с.
11. Босаков С. В., Дмитриева К. В. Конструктивно нелинейный расчёт горизонтально нагруженной жёсткой стенки в упругой среде // Вестник БГТУ. Строительство и архитектура: Материалы XI Международного научно-технического межвузовского семинара “Перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовке инженерных кадров Республики Беларусь”. – Часть 1. – 25-27 ноября 2004 г. – г. Брест. – С. 121-126.

УДК 725.01/711.3

Мусюк А., Рихтер З.

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ ФЕРМ

Введение

Топологическая оптимизация конструкции основана на поиске наилучшей конфигурации элементов конструкции. Она является наиболее трудным видом оптимизации, т.к. изменение топологии изменяет структуру уравнений математической модели. Кроме того, пространство конструкций имеющих разные топологии дискретно и, следовательно, не име-

ет структуры облегчающей математический анализ и вычисления. С другой стороны, топологическая оптимизация может принести больше пользы, чем оптимизация других параметров конструкции: формы, сечений или материала. Всестороннее обсуждение топологической оптимизации конструкции содержат обзорные работы [1-4].

Фермы были исторически первым предметом топологиче-

Мусюк Адам, ассистент кафедры технической поддержки и проектирования Белостокского технического университета.

Рихтер Зенон, профессор, зав. кафедрой технической поддержки и проектирования Белостокского технического университета. Республика Польша, Белостокская политехника, 15893, г. Белосток, ул. Грюндвальдская 11/15.

ской оптимизации, что отмечено в работах [5,6]. Последние результаты исследований в этой области опубликованы в работах [7-13].

Основные методы, связанные с топологической оптимизацией ферм – это: (i) оптимизация топологии сплошной среды путем удаления материала, (ii) топологическая оптимизация методом удаления стержней из густой статически определимой, т.н. основной, фермы, а также (iii) топологическая оптимизация статически определимых, т.н. ферм Мишелла (Michella) [1-4]. Методы всех трех видов имеют существенные недостатки. Классическая сплошная среда (i), а также «густые» основные фермы (ii) внутренне статически неопределимы. Будучи таковыми, они деформируются под влиянием неравномерного температурного поля или неравномерной осадки опор. Тем временем результатом топологической оптимизации в методах (i) и (ii) в большинстве случаев является ферма внутренне статически определимая, которая приспосабливается без напряжений к температурному полю и неравномерной осадке опор. Кроме того, для вычисления внутренних сил в статически неопределимой системе обязательным является составление деформационных уравнений. Применение методов (i) и (ii) предполагает рассмотрение одновременно как статически определимых, так и статически неопределимых конструкций. Так как статически определимые конструкции принципиально физически отличны от неопределимых, выбор тех или других должен быть завершён *a priori* проектировщиком и конструкции обоих видов не должны выступать одновременно в пространстве поиска.

В методе (iii) оптимизируется топология сетки двух бесконечных семей кривых, удовлетворяющих условиям статической определимости. Оптимальная конфигурация статически определима, но, как правило, она кинематически изменяема, а значит не является устойчивой конструкцией.

Опасность получения неустойчивой фермы существует также в методе (ii), а в методе (i) получается не ферма, а фермоподобная сплошная среда.

Достоинством названных методов является одновременная оптимизация формы и топологии ферм, что может дать больше пользы, чем оптимизация топологии для конкретной формы. Однако гарантии получения правильной, устойчивой конструкции здесь нет.

В настоящей работе принятый подход отличен от трех вышеупомянутых методов. Рассматриваются очень часто встречающиеся в практике фермы с квадратной сеткой горизонтальных и вертикальных стержней, образующих два горизонтальных слоя ячеек и два, либо более, слоя вертикальных ячеек. Этот основной каркас дополняется стержнями-диагоналями, помещенными в ячейках так, чтобы образовалась ферма статически определимая и кинематически неизменяемая.

Множество топологий двухслойных статически определимых ферм можно описать конструктивно. Также фермы можно построить из треугольников, начиная с трех стержней, образующих первый треугольник.

Ферма, построенная из треугольников, кинематически неизменяема, является жесткой конструкцией и всегда внутренне статически определима. Зная множество возможных топологий, можно отыскать топологии оптимальные и антиоптимальные методом полного перебора, который использован в настоящей работе.

Целью оптимизации является минимизация стоимости (например веса), либо максимизация качества (например жесткости).

В настоящей работе мерой качества является основное (минимальное) собственное значение [14] системы уравнения равновесия свободной (безопорной) фермы. Минимальное собственное значение дает наихудший возможный случай нагрузки фермы.

В соответствии с этой мерой качества, ферма лучшей топологии имеет более высокое основное собственное значение, а значит меньшее соотношение внутренних сил к нагрузке для ее изготовления требуется меньше материала.

Обычно основное собственное значение определяется в задачах устойчивости и колебаний. Использование его в настоящей работе по отношению к проблеме статического равновесия, позволяет произвести всестороннюю оценку и сравнение поведения конструкций разных топологий. Такой подход использован и при топологической антиоптимизации, которая основана на исследовании наихудшего случая [15,16].

В настоящей работе оптимизация – это поиск в множестве возможных топологий ферм той, у которой основное собственное значение максимальное. В целях лучшего описания топологии оптимальных ферм, а также оценки их качества, в множестве топологий построены антиоптимальные фермы, соответствующие минимальному основному собственному значению. Соотношение максимального к минимальному основному собственному значению в множестве топологий определяет пределы топологической чувствительности ферм.

Исследуются фермы двухслойные в одном направлении и имеющие от двух до девяти слоев в другом направлении. Далее пропорции фермы изменяются от квадрата до все более удлиненного прямоугольника.

Для реализации задач составлены компьютерные программы в системе MATLAB [17].

Полученные результаты оптимизации, антиоптимизации и анализа топологической чувствительности не зависят от размеров ферм, использованных материалов, геометрии и площади сечений стержней, а также величины нагрузки. С другой стороны, эти результаты не учитывают существенных ограничений, выступающих в проектах конструкций предельно значенных к реализации. Заметим также, что возрастание размера конструкции, с сохранением ее пропорций, вызывает возрастание длины стержней и квадратное увеличение податливости к потере устойчивости и колебаниям. Кроме того, растет удельный вес в действующих нагрузках. Принятие во внимание эффектов потери устойчивости, колебаний и собственного веса может значительно изменить результаты оптимизации.

Топология ферм

Рассматриваемые фермы построены из квадратных ячеек, образующих два слоя горизонтальных ячеек и два или более слоя вертикальных ячеек. Этот основной каркас, узлы которого шарнирные, укрепляет минимальное количество стержней-диагоналей, обеспечивающее стабильность фермы (на рис. 1 представлена 2х3 слойная ферма - из двух горизонтальных и трех вертикальных слоев).

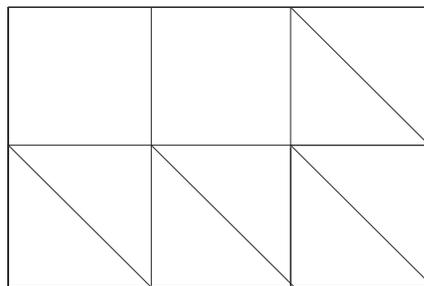


Рис. 1. 2х3 слойная ферма (ячейки с диагоналями образуют форму Г).

В целях обеспечения кинематической неизменяемости фермы каждый слой-столбец должен содержать как минимум одну диагональ. Каждый из двух слоев-строк должен содержать не менее одной диагонали. Из рис. 1 следует, что в случае фермы Г минимальное число диагоналей n , выполняющее эти условия, равно половине числа ячеек плюс один, либо числу верти-

кальных слоев плюс один. В случае изменения расположения диагоналей фермы Γ на любое другое расположение, параметр n не изменяется. В работе размер двухслойной фермы будет определяться параметром n . В ферме Γ один слой-столбец содержит две диагонали. Остальные вертикальные слои содержат по одной диагонали. Это характерно для всех возможных размещений диагоналей. Любой из вертикальных слоев может быть слоем с двумя диагоналями. В каждом из оставшихся вертикальных слоев ячейка с диагональю может занимать одно из двух положений, нижнее либо верхнее. Следовательно, множество F^n возможных положений ячеек с диагоналями в двухслойной ферме, имеющей n диагоналей, а значит $n-1$ вертикальных слоев, можно представить как следующее множество векторов f^n положений ячеек

$$F^n = \left\{ f^n = [f_1, f_2, \dots, f_{n-1}] : f_i \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \right. \\ \left. f_i \in \{0, 1\}, i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \right\}, \quad (1) \\ n \in \{3, 4, \dots\}$$

Составляющая f_1 содержит номер вертикального слоя, в котором находятся две ячейки с диагоналями. Остальные составляющие, f_i , определяют, где в оставшихся вертикальных слоях находятся одиночные ячейки с диагоналями, наверху, $f_i = 0$, или в внизу, $f_i = 1$.

Размер $|F^n|$ множества F^n , т.е. число возможных положений ячеек с диагоналями, равен произведению чисел значений, принимаемых компонентами вектора f^n ,

$$|F^n| = (n-1)2^{n-2}, \quad n \in \{3, 4, \dots\}. \quad (2)$$

Как видно, это число растет экспоненциально с увеличением числа диагоналей. Однако число различных топологий ферм, имеющих n диагоналей, значительно выше, чем число расположений ячеек с диагоналями. Каждая диагональ имеет в своей ячейке два возможных наклона, которым приписываем значения (1, -1). Наклон 1 соответствует диагонали, выходящей из левого верхнего угла ячейки, а наклон -1 относится к диагонали, выходящей из правого верхнего угла. Множество S^n всех возможных наклонов n диагоналей является, таким образом, множеством бинарных векторов s^n , принимающих значения (1, -1),

$$S^n = \left\{ s^n = [s_1, s_2, \dots, s_n] : s_i \in \{1, -1\}, \right. \\ \left. i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}, \quad n \in \{3, 4, \dots\}. \quad (3)$$

Размер $|S^n|$ этого множества является произведением чисел возможных значений всех составляющих вектора s^n , т.е.

$$|S^n| = 2^n, \quad n \in \{3, 4, \dots\}. \quad (4)$$

Это число растет показательно с увеличением числа диагоналей.

Множество K^n ферм имеющих n диагоналей является картезианским произведением множества расположений диагоналей F^n на множество наклонов диагоналей S^n , т.е. множеством всех возможных упорядоченных пар $k^n = (f^n, s^n)$, сложенных из вектора расположений ячеек с диагоналями и вектора наклонов диагоналей,

$$K^n = F^n \times S^n = \\ = \{k^n = (f^n, s^n) : f^n \in F^n, s^n \in S^n\}, \quad n \in \{3, 4, \dots\} \quad (5)$$

Размер $|K^n|$ этого множества является произведением размеров составляющих множеств

$$|K^n| = |F^n| \cdot |S^n| = (n-1)4^{n-1}, \quad n \in \{3, 4, \dots\}. \quad (6)$$

Число ферм резко увеличивается с возрастанием числа диагоналей. В случае 10 диагоналей число это равняется 2359296. Число ферм истинно различных меньше, чем в формуле (6). В этой работе фермы, которые отличаются перемещением жесткого тела, т.е. зеркальным отображением по отношению к вертикальной оси, зеркальным отображением по отношению к горизонтальной оси, либо поворотом на 180 градусов - трактуем как тождественные. Сокращенное множество ферм, сложенное из нетождественных ферм, обозначаем через K_R^n . Это множество можно определить алгоритмически, исключая из множества K^n лишние фермы.

Собственная задача равновесия ферм

Вектор q внутренних сил фермы, имеющей n диагоналей, имеет длину, равную числу стержней

$$|q| = n + 2n + 3(n-1) = 6n - 3, \quad (7)$$

где $2n$ является числом вертикальных стержней, $3(n-1)$ числом горизонтальных стержней. Вектор узловых нагрузок b имеет две слагающие в каждом узле, $3n$ узлов, что дает общее число слагаемых нагрузок

$$|b| = 6n. \quad (8)$$

Уравнения равновесия узлов свободной, безопорной фермы, в матричной постановке следующие

$$Mq = b. \quad (9)$$

Матрица M содержит направляющие косинусы стержней в узлах. Размер матрицы $|b| \times |q| = 6n \times (6n - 3)$, т.е. число уравнений, умноженное на число неизвестных. Матрица не квадратная, имеет на 3 больше строк, чем столбцов, и поставленная задача не может быть решена для любого вектора нагрузки. С целью устранения этой трудности надлежит умножить левостороннее уравнение равновесия (9) на матрицу M^T , полученную транспонированием матрицы M [14], в результате получим уравнение

$$(M^T M)q = M^T b. \quad (10)$$

Матрица $M^T M$ квадратная невырожденная, размера

$$|q| \times |q| = (6n - 3) \times (6n - 3).$$

Система уравнений (10), таким образом, всегда имеет однозначное решение q для любой правой стороны $M^T b$, которая является проекцией нагрузки на векторы-строки матрицы M^T . Эта проекция физически отвечает нагрузкам глобально самоуравновешенным, т.е. учитывающим реакции отброшенных опор.

Информацию обо всех возможных внутренних силах, соответствующих возможным нагрузкам, дает решение собственной задачи [14]

$$(M^T M)q = \lambda q. \quad (11)$$

Согласно (11), собственный вектор - это вектор внутренних сил, который под влиянием линейного оператора $M^T M$ изменяет только свою длину - пропорционально к собственной величине λ .

Собственная задача имеет, как правило, много собственных значений, образующих вектор λ , так называемый спектр. Мы рассмотрим минимальную величину спектра и связанный с ней вектор внутренних сил, а также вызывающий эти силы вектор нагрузки, следующий из уравнения (9),

$$\lambda = \min(\lambda), \mathbf{q} = \mathbf{q}(\lambda), \mathbf{b} = \mathbf{b}(\lambda) = \mathbf{M}\mathbf{q}. \quad (12)$$

Вычитая уравнения (10) и (11), имеем для норм $\|\cdot\|$ обеих сторон полученного равенства

$$\lambda = \|\mathbf{M}^T \mathbf{b}\| / \|\mathbf{q}\|. \quad (13)$$

Согласно этой формуле основное собственное значение фермы равно минимальному соотношению нормы нагрузки к норме внутренних сил для всех возможных нагрузок. Она отвечает максимальному соотношению внутренних сил к нагрузке, следовательно, наибольшему возможному напряжению конструкции при всех возможных нагрузках и, в конечном итоге, наибольшему использованию материала. Это наилучший возможный случай работы конструкции, охватывающий ее наихудшую нагрузку и расположение опор.

Задачи оптимизации и антиоптимизации ферм

За критерий качества фермы \mathbf{K} выбрано ее основное собственное значение $\lambda(\mathbf{K})$. Лучшие фермы имеют большее основное собственное значение. Задача оптимизации заключается в нахождении во множестве ферм \mathbf{K}^n , при данном числе n диагоналей, оптимальной фермы \mathbf{K}_o^n , основное собственное значение λ_o^n которой, является максимальным в этом множестве:

$$\lambda_o^n = \max_{\mathbf{K} \in \mathbf{K}^n} (\lambda(\mathbf{K})), \mathbf{K}_o^n = \arg \max_{\mathbf{K} \in \mathbf{K}^n} (\lambda(\mathbf{K})). \quad (14)$$

Антиоптимизация основывается на определении в множестве \mathbf{K}^n антиоптимальной фермы \mathbf{K}_a^n , которая характеризуется наименьшим основным собственным значением λ_a^n в этом множестве, следовательно наибольшими внутренними силами:

$$\lambda_a^n = \min_{\mathbf{K} \in \mathbf{K}^n} (\lambda(\mathbf{K})), \mathbf{K}_a^n = \arg \min_{\mathbf{K} \in \mathbf{K}^n} (\lambda(\mathbf{K})). \quad (15)$$

Соотношение собственных значений $\lambda_o^n / \lambda_a^n$ определяет пределы топологической чувствительности фермы. Чем выше это соотношение единства, тем ферма оптимальная лучше, в сравнении с антиоптимальной и, следовательно, тем больше пределы возможных улучшений качества фермы путем оптимизации топологии.

Фермы 2x2 слойные

Фермы 2x2 слойные имеют три диагонали, $n = 3$. Число ферм, без исключения ферм отличающихся перемещением жесткого тела и после исключения, определяются:

$$/ \mathbf{K}^3 / = 32, / \mathbf{K}_R^3 / = 6. \quad (16)$$

Оптимальное и антиоптимальное собственные значения и их соотношение будут

$$\lambda_o^3 = 0,12099, \lambda_a^3 = 0,078054, \lambda_o^3 / \lambda_a^3 = 1,5501 \quad (17)$$

Оптимальная ферма лучше антиоптимальной на 55%, т.е. имеет настолько же меньшее соотношение внутренних сил к нагрузке. Такой же предел топологической чувствительности ферм 2x2 слойных.

Оптимальная ферма имеет наклонную внутреннюю балку-ферму (рис. 2а). Внутренние силы наибольшие в стержнях этой балки. Антиоптимальная ферма, рис. 2в, имеет расположение диагоналей в форме наклонного П. Внутренние силы наибольшие во внутренних стержнях этого угла. Эти черты

появляются также в фермах с большим числом диагоналей. Нагрузка оптимальной и антиоптимальной ферм – сдвиговая (рис. 2б,г).

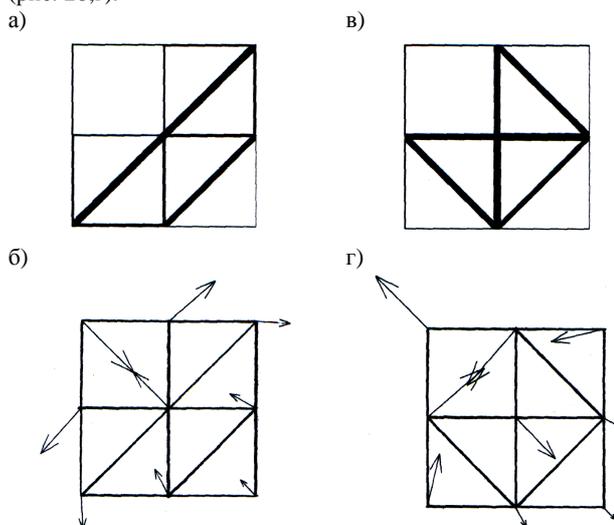


Рис. 2. Фермы 2x2 слойные: (а) внутренние силы оптимальной фермы, (б) нагрузка оптимальной фермы, (в) внутренние силы антиоптимальной фермы, (г) нагрузка антиоптимальной фермы.

Фермы 2x3 слойные

Число диагоналей фермы 2x3 слойной равняется четырем $n = 4$. Числа ферм, без исключения ферм отличающихся перемещением жесткого тела и после исключения, следующие:

$$/ \mathbf{K}^4 / = 192, / \mathbf{K}_R^4 / = 50. \quad (18)$$

Ниже приведены оптимальное собственное значение, антиоптимальное собственное значение и их соотношение

$$\lambda_o^4 = 0,08388, \lambda_a^4 = 0,037788, \lambda_o^4 / \lambda_a^4 = 2,2197. \quad (19)$$

Оптимальная ферма лучше антиоптимальной более чем в два раза, такой же предел топологической чувствительности ферм 2x3 слойных. Фермы 2x3 слойные оптимальная и антиоптимальная хуже, чем их меньшие 2x2 слойные эквиваленты, соответственно на 44% и более чем в два раза (рис. 3).

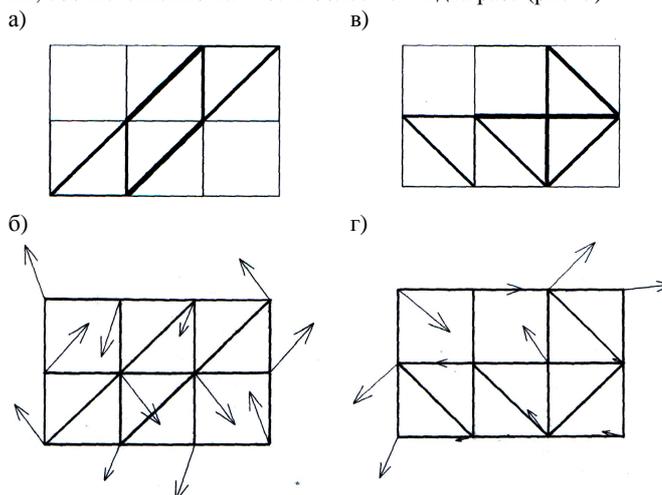


Рис. 3. Фермы 2x3 слойные: (а) внутренние силы оптимальной фермы, (б) нагрузка оптимальной фермы, (в) внутренние силы антиоптимальной фермы, (г) нагрузка антиоптимальной фермы.

Оптимальная ферма имеет наклонную внутреннюю балку-ферму и ячейки с диагоналями расположенными ближе к центру. Внутренние силы наибольшие в стержнях этой балки. Ан-

тиоптимальная ферма имеет расположение диагоналей в форме наклонного П в углу Г. Внутренние силы наибольшие во внутренних стержнях этого угла. Ячейки с диагоналями в этой ферме отодвинуты от центра.

Фермы 2x4 слойные

Фермы 2x4 слойные имеют пять диагоналей, $n = 5$. Число ферм, без исключения ферм отличающихся перемещением жесткого тела и после исключения, равняются:

$$/K^5 / = 1024, /K_R^5 / = 256. \quad (20)$$

Оптимальное собственное значение, антиоптимальное собственное значение и их соотношение ферм 2x4 слойных следующие:

$$\lambda_o^5 = 0,065962, \lambda_a^5 = 0,022651, \lambda_o^5 / \lambda_a^5 = 2,9121. \quad (21)$$

Оптимальная ферма имеет почти в 3 раза меньшее соотношение внутренних сил к нагрузке в сравнении с антиоптимальной фермой. Такой же предел топологической чувствительности ферм 2x4 слойных. Фермы 2x4 слойные оптимальная и антиоптимальная хуже, чем их меньшие 2x3 слойные эквиваленты, соответственно на 27% и на 67% (рис. 4).

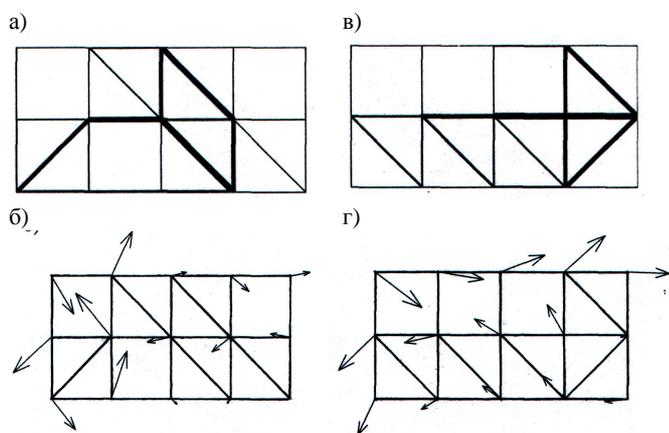


Рис. 4. Фермы 2x4 слойные: (а) внутренние силы оптимальной фермы, (б) нагрузка оптимальной фермы, (в) внутренние силы антиоптимальной фермы, (г) нагрузка антиоптимальной фермы.

Оптимальная ферма имеет наклонную внутреннюю балку-ферму. В этой ферме ячейки с диагоналями расположены ближе к центру. Антиоптимальная ферма имеет расположение диагоналей в форме наклонного П. Ячейки с диагоналями в этой ферме сдвинуты от центра и образуют угловое Г, во внутренних стержнях которого внутренние силы наибольшие.

Фермы 2x5 слойные

В 2x5 слойной ферме находится шесть диагоналей, $n = 6$. Число ферм, без исключения ферм отличающихся перемещением жесткого тела и после исключения, следующие:

$$/K^6 / = 5120, /K_R^6 / = 1288. \quad (22)$$

Оптимальное собственное значение, антиоптимальное собственное значение и их соотношение равняется:

$$\lambda_o^6 = 0,052804, \lambda_a^6 = 0,013753, \lambda_o^6 / \lambda_a^6 = 3,8394 \quad (23)$$

Оптимальная ферма лучше антиоптимальной почти в четверо, т.е. имеет настолько же меньшее соотношение внутренних сил к нагрузке. Такой же предел топологической чувствительности ферм 2x5 слойных. Фермы 2x5 слойные оптимальная и антиоптимальная хуже, чем 2x4 слойные эквиваленты, соответственно на 25% и на 26% (рис. 5).

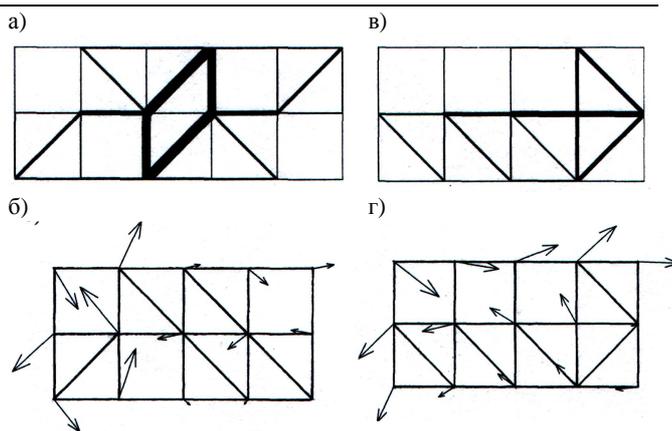


Рис. 5. Фермы 2x5 слойные: (а) внутренние силы оптимальной фермы, (б) нагрузка оптимальной фермы, (в) внутренние силы антиоптимальной фермы, (г) нагрузка антиоптимальной фермы.

Ячейки с диагоналями оптимальной фермы лежат ближе к центру. Наибольшие внутренние силы находятся в двух центральных ячейках. Антиоптимальная ферма имеет расположение диагоналей в форме наклонного П в углу Г. Ячейки с диагоналями в этой ферме сдвинуты от центра, образуя угловое Г. Внутренние силы во внутренних стержнях этого угла наибольшие. Нагрузка антиоптимальной фермы - изгибающая.

Фермы 2x6 слойные

У ферм 2x6 слойных семь диагоналей, $n = 7$. Число ферм, без исключения ферм отличающихся перемещением жесткого тела и после исключения, равняются:

$$/K^7 / = 24576, /K_R^7 / = 6144. \quad (24)$$

Ниже даны оптимальное собственное значение, антиоптимальное собственное значение и их соотношение

$$\lambda_o^7 = 0,041543, \lambda_a^7 = 0,0079068, \lambda_o^7 / \lambda_a^7 = 5,2541. \quad (25)$$

Оптимальная ферма лучше антиоптимальной более чем в пять раз. Такой же предел топологической чувствительности ферм 2x6 слойных. Фермы 2x6 слойные оптимальная и антиоптимальная хуже, чем их 2x5 слойные эквиваленты, соответственно на 27% и на 74% (рис. 6).

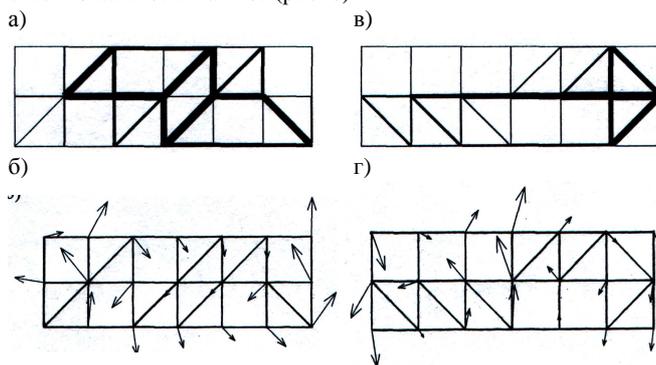


Рис. 6. Фермы 2x6 слойные: (а) внутренние силы оптимальной фермы, (б) нагрузка оптимальной фермы, (в) внутренние силы антиоптимальной фермы, (г) нагрузка антиоптимальной фермы.

Оптимальная ферма имеет наклонную внутреннюю балку-ферму, и ячейки с диагоналями расположены ближе к центру. Антиоптимальная ферма имеет расположение диагоналей в форме наклонного П в углу Г, и ячейки с диагоналями отодвинуты от центра. Наибольшие внутренние силы находятся во внутренних стержнях угла Г. Нагрузка обеих ферм - изгибающая.

Фермы 2x7 слойные

Фермы 2x7 слойные имеют восемь диагоналей, $n = 8$. Числа этих ферм, без исключения ферм отличающихся перемещением жесткого тела и после исключения, следующие:

$$/K^8 \neq 114688, /K_R^8 \neq 28704. \quad (26)$$

Оптимальное собственное значение, антиоптимальное собственное значение и их соотношение ферм 2x7 слойных равняется:

$$\lambda_o^8 = 0,031838, \lambda_a^8 = 0,0050183, \lambda_o^8 / \lambda_a^8 = 6,3444. \quad (27)$$

Оптимальная ферма лучше антиоптимальной более чем в шесть раз, т.е. имеет настолько же меньшее соотношение внутренних сил к нагрузке. Предел топологической чувствительности ферм 2x7 слойных такой же. Фермы 2x7 слойные оптимальная и антиоптимальная хуже, чем 2x6 слойные оптимальная и антиоптимальная, соответственно на 30% и на 58% (рис. 7).

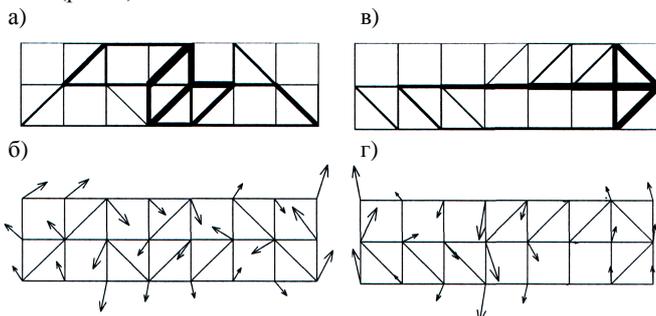


Рис. 7. Фермы 2x7 слойные: (а) внутренние силы оптимальной фермы, (б) нагрузка оптимальной фермы, (в) внутренние силы антиоптимальной фермы, (г) нагрузка антиоптимальной фермы.

Ячейки с диагоналями оптимальной фермы лежат ближе к центру. Наибольшие внутренние силы также располагаются в центральных ячейках. Антиоптимальная ферма имеет расположение диагоналей в форме наклонного П в углу Г. Ячейки с диагоналями в этой ферме отодвинуты от центра и образуют угловое Г, во внутренних стержнях которого силы наибольшие. Нагрузка оптимальной фермы, а также нагрузка антиоптимальной фермы - изгибающая.

Фермы 2x8 слойные

Число диагоналей фермы 2x8 слойной равняется девяти, $n = 9$. Числа ферм, без исключения ферм отличающихся перемещением жесткого тела и после исключения, равняются:

$$/K^9 \neq 524288, /K_R^9 \neq 131072. \quad (28)$$

Оптимальное собственное значение, антиоптимальное собственное значение и их соотношение следующие:

$$\lambda_o^9 = 0,02482, \lambda_a^9 = 0,0032345, \lambda_o^9 / \lambda_a^9 = 7,6735. \quad (29)$$

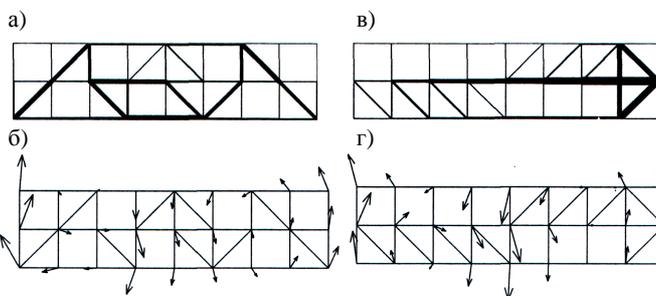


Рис. 8. Фермы 2x8 слойные: (а) внутренние силы оптимальной фермы, (б) нагрузка оптимальной фермы, (в) внутренние силы антиоптимальной фермы, (г) нагрузка антиоптимальной фермы.

Оптимальная ферма лучше антиоптимальной более чем в семь с половиной раз. Такой же предел топологической чувствительности ферм 2x8 слойных. Фермы 2x8 слойные оптимальная и антиоптимальная хуже, чем их меньшие 2x7 слойные эквиваленты, соответственно на 28% и на 50% (рис. 8).

Ячейки с диагоналями располагаются ближе к центру. Распределение внутренних сил - хаотичное. Антиоптимальная ферма имеет расположение диагоналей в форме наклонного П в углу Г. Ячейки с диагоналями в этой ферме сдвинуты от центра, образуя угловое Г. Внутренние силы наибольшие во внутренних стержнях этого угла. Нагрузка обеих ферм - изгибающая.

Фермы 2x9 слойные

Фермы 2x9 слойные имеют десять диагоналей, $n = 10$. Числа ферм, без исключения ферм отличающихся перемещением жесткого тела и после исключения, равняются:

$$/K^{10} \neq 2359296, /K_R^{10} \neq 589952. \quad (30)$$

Оптимальное собственное значение, антиоптимальное собственное значение и их соотношение ферм 2x9 слойных равняется:

$$\lambda_o^{10} = 0,018857, \lambda_a^{10} = 0,0022171, \lambda_o^{10} / \lambda_a^{10} = 8,5052. \quad (31)$$

Оптимальная ферма лучше антиоптимальной более чем в восемь с половиной раз, т.е. имеет настолько же меньшее соотношение внутренних сил к нагрузке. Такой же предел топологической чувствительности ферм 2x9 слойных. Фермы 2x9 слойные оптимальная и антиоптимальная хуже, чем их 2x8 слойные эквиваленты, соответственно на 32% и на 46% (рис. 9).

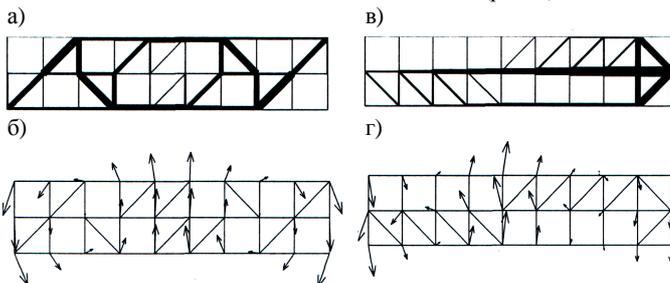


Рис. 9. Фермы 2x9 слойные: (а) внутренние силы оптимальной фермы, (б) нагрузка оптимальной фермы, (в) внутренние силы антиоптимальной фермы, (г) нагрузка антиоптимальной фермы.

Ячейки с диагоналями лежат ближе к центру. Антиоптимальная ферма имеет расположение диагоналей в форме наклонного П в углу Г. Ячейки с диагоналями в этой ферме отодвинуты от центра, образуя угловое Г. Наибольшие внутренние силы находятся во внутренних стержнях угла Г. Нагрузка оптимальной фермы, а также нагрузка антиоптимальной фермы - изгибающая.

Эффект пропорции фермы

График изменения основного собственного значения фермы оптимальной с возрастанием числа диагоналей (и слоев столбцов).

Качество оптимальной фермы, выраженное основным собственным значением, с возрастанием числа диагоналей n подвергается видимому ухудшению. Это означает, что соотношение сил внутренних к нагрузке значительно растет с увеличением числа диагоналей. Этот эффект связан с нарастанием изгиба в фермах длиннейших в сравнении с более короткими. Оптимальная ферма 10-диагональная имеет основное собственное значение, меньшее почти в шесть раз, чем оптимальное собственное значение фермы 3-диагональной.

На рис.11 представлен график изменения основного собственного значения антиоптимальной фермы с возрастанием числа диагоналей.

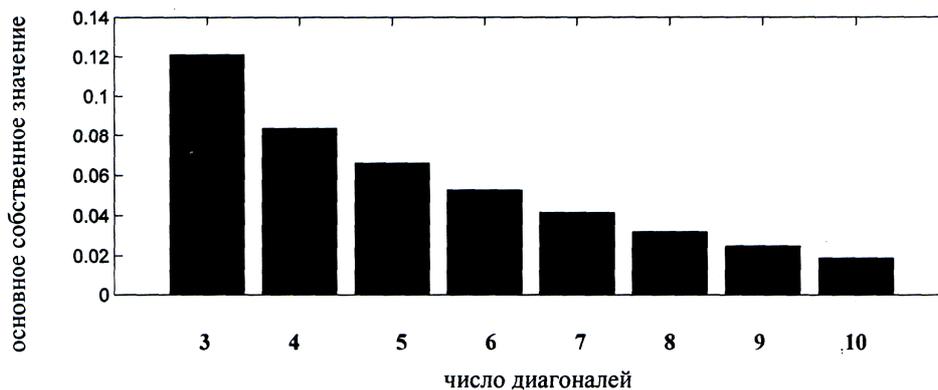


Рис. 10. Зависимость качества оптимальной фермы от числа диагоналей.

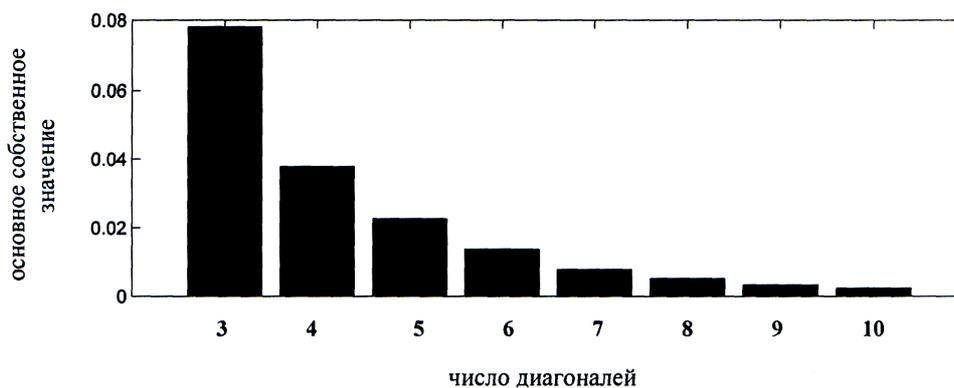


Рис. 11. Зависимость качества фермы антиоптимальной от числа диагоналей.

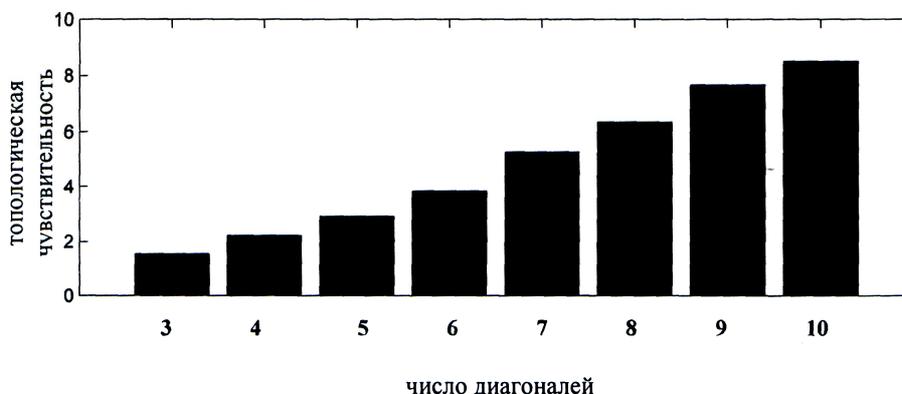


Рис. 12. Зависимость топологической чувствительности ферм от числа диагоналей.

Так же как для ферм оптимальных, с возрастанием числа диагоналей n качество фермы антиоптимальной подвергается большему ухудшению. Антиоптимальная 10-диагональная ферма имеет основное собственное значение меньше более чем в тридцать пять раз, чем оптимальное собственное значение фермы 3-диагональной. Этот эффект связан с нарастанием изгиба в более длинных фермах.

На рис. 12 показано соотношение основного собственного значения оптимальной фермы к основному собственному значению антиоптимальной фермы с возрастанием числа диагоналей, т.е. изменений топологической чувствительности.

С возрастанием числа диагоналей диапазон топологической чувствительности увеличивается. Топологическая чувствительность ферм 10-диагональных более чем в пять раз больше, чем чувствительность ферм 3-диагональных. Изменение квадратной пропорции фермы в направлении все более удлиненных прямоугольников наступает изменение работы оптимальной и антиоптимальной ферм, от сдвига (3-

диагональные фермы) до почти чистого изгиба (10-диагональные).

Выводы

В работе представлены результаты оптимизаций, антиоптимизаций и анализа диапазона топологической чувствительности статически определимых двухслойных ферм, составленных из двух слоев-строк и разного числа слоев-столбцов. Топологическими переменными являются положения ячеек с диагоналями, а также направления диагоналей в ячейках. Критерием качества фермы является основное, т.е. минимальное собственное значение матрицы равновесия свободной фермы. Она представляет наихудший из возможных случаев нагрузки и опирания фермы.

Для ферм от 2x2 слойных до 2x9 слойных методом полного перебора определены топологии оптимальные, топологии антиоптимальные, а также соответствующие им основные собственные значения, внутренние силы и узловые нагрузки.

Исследование изменения качества ферм с возрастанием числа ячеек (длины фермы) показало сильное ухудшение качества ферм оптимальных и антиоптимальных.

Замечено, что с возрастанием числа диагоналей диапазон топологической чувствительности подвергается увеличению.

Установлено, что ухудшение качества связано с изменением работы ферм от чистого сдвига, в случае ферм квадратной конфигурации, до почти чистого изгиба, в случае ферм имеющих форму удлинённого прямоугольника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Eschenhauer H.A., Olhoff N. (2001). *Topology optimization of continuum structures*. Appl. Mech. Rev. 54, 4, 331-390.
2. Kirsch U. (1989). *Optimal topologies of structures*. Appl. Mech. Rev. 42, 8, 223-239.
3. Papdrakakis M., Lagaros N.D., Tsompanakis Y., Plevris V. (2001). Large scale structural optimization: computational methods and optimization algorithms. Arch. Comp. Meth. Engng. 8, 3, 239-301.
4. Rozvany G.I.N., Bendsoe M.P., Kirsch U. (1995). *Layout optimization of structures*. Appl. Mech. Rev. 48, 2, 41-119.
5. Maxwell J.C. (1872). *On reciprocal figures, frames, and diagrams of force*. Trans. Roy. Soc. Edinb. 26, 1.
6. Michell A.G.M. (1904). *The limits of economy of material in frame-structures*. Phil. Mag. 8, 589-597.
7. Beckers M., Fleury C. (1997). *A primal-dual approach in truss topology optimization*. Comp. Struct. 64, 1-4, 77-88.

8. Bennage W.A., Dhingra A.K. (1995). *Optimization of truss topology using tabu search*. Int. J. Num. Meth. Engng. 38, 4035-4052.
9. Deb K., Gulati S. (2001). *Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms*. Finite Elem. Anal. Design 37, 447-465.
10. Kołakowski P., Holnicki-Szulc J. (1997). *Optimal remodelling of truss structures (simulation by virtual distortions)*. Comp. Assist. Mech. Eng. Sci. 4, 257-281.
11. Lewiński T., Zhou M., Rozvany G.I.N. (1994a). *Exact least-weight truss layouts for rectangular domain with various support conditions*. Struct. Optim. 6, 55-67.
12. Lewiński T., Zhou M., Rozvany G.I.N. (1994b). *Extended exact solutions for least-weight truss layouts*. Int. J. Mech. Sci. 36, 375-398.
13. Ohsaki M. (2001). *Random search method based on exact reanalysis for topology optimization of trusses with discrete cross-sectional areas*. Comp. Struct. 79, 673-679.
14. Strang G. (1976). *Linear algebra and its applications*. Academic Press, New York.
15. Gangadharan S.N., Nikolaidis E., Lee K., Haftka R.T., Burdisso R. (1999). *Antioptimization for comparison of alternative structural models and damage detection*. AIAA Journal 36, 7, 857-864.
16. McWilliam S. (2001). *Anti-optimization of uncertain structures using interval analysis*. Comp. Struct. 79, 421-430.
17. MATLAB (2000). *Using MATLAB. Version 6*. The Math Works.

УДК 624.014.27(476.7)

Драган В.И., Шурин А.Б.

КОНСТРУКЦИИ АРОК КОМБИНИРОВАННОГО ПОКРЫТИЯ УНИВЕРСАЛЬНОГО СПОРТИВНОГО КОМПЛЕКСА В г. БРЕСТЕ



Рис. 1. Фасад здания универсального спортивного комплекса.

Драган Вячеслав Игнатьевич, профессор, кандидат технических наук, первый проректор Брестского государственного технического университета.

Шурин Андрей Брониславович, ассистент кафедры строительных конструкций Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.