

элементов опорного контура, распределение перемещений происходит как для двух самостоятельных пролетных конструкций, разделенных сквозным отверстием, т.е. наибольшие вертикальные перемещения отмечены в середине каждого полупролета.

В процессе эксперимента исследовалось напряженное состояние пролетной конструкции панели-оболочки с двумя разновеликими отверстиями: малое отверстие расположено вблизи поперечного элемента опорного контура на расстоянии $1/6$ пролета, а большое отверстие расположено в середине пролета. При этом малое отверстие имело два варианта усиления: по верхним и нижним полкам и только по нижним полкам. Распределение напряжений в обоих случаях не имело существенных различий, что подтверждает сделанный ранее вывод о незначительной эффективности усиления отверстий по верхним полкам гофров. Об этом же свидетельствует анализ перемещений. Очевидной особенностью рассматриваемого напряженного состояния является отсутствие резкой концентрации напряжений, что является следствием близкого расположения отверстия к опорному контуру.

Эпюры осевых сил и изгибающих моментов в условных стержнях приведены на рис. 7. Осевые силы в стержнях, прерываемых отверстием, близки к нулю, а осевые силы в стержнях, близлежащих к отверстию, имеют некоторое увеличение, что является следствием концентрации напряжений. Сопоставление эпюр изгибающих моментов, приведенных для панели-оболочки с двумя отверстиями с эпюрами для панели-оболочки с одним центральным отверстием, показывает существенное (в среднем на 36%) уменьшение изгиба в сечении, где расположено второе отверстие. Это является следствием увеличения поперечной жесткости пролетной конструкции за счет стальных полос, обрамляющих отверстие.

Выводы

1. Проведены обширные экспериментальные исследования панелей-оболочек с технологическими отверстиями в пролетной конструкции. Исследования выполнены при

УДК 624

Давыдов Е.Ю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВБЛИЗИ ОТВЕРСТИЙ В СТАЛЬНЫХ ПРОФИЛИРОВАННЫХ ЛИСТАХ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В КАЧЕСТВЕ ПРОЛЕТНОЙ КОНСТРУКЦИИ ПАНЕЛЕЙ-ОБОЛОЧЕК НА ПРОЛЕТ

1. Принятые расчетные предпосылки.

В покрытиях зданий и сооружений технологические отверстия чаще всего имеют форму квадрата, прямоугольника или круга. Расположение отверстий может быть самым разнообразным. Наиболее часто размеры отверстий не превышают $1/5...1/3$ ширины панели-оболочки. Именно для указанных форм и размеров наиболее применимо разработанный в данной работе способ определения напряжений вблизи отверстий. Для инженерного расчета и особенно при индивидуальном проектировании наиболее удобным является использование несложных аналитических формул. В настоящей работе рассматривается именно аналитический вариант решения поставленной задачи по определению напряженного состояния пролетной конструкции панелей-оболочек с отверстиями.

Особенностью поставленной задачи применительно к панелям-оболочкам является ярко выраженная конструктивная анизотропия пролетной конструкции, изготовленной из изотропного материала, и неопределенность степени влияния конструктивной анизотропии на распределение напряжений вблизи отверстий. Поэтому задача рассматривалась в двух

вариантах: как для изотропного, так и для анизотропного материала. Другой особенностью является своеобразная форма распределения основных напряжений по ширине панели-оболочки. При решении задачи использованы следующие расчетные предпосылки:

- контур отверстий свободен от внешних воздействий;
 - на контуре отверстий изгибающие моменты, перпендикулярные сторонам отверстий, равны нулю;
 - направления главных напряжений основного напряженного состояния совпадают с направлением гофров ($\sigma_x = \sigma_k$);
 - основные напряжения вблизи продольных элементов опорного контура панелей-оболочек равны нулю;
 - напряжения, перпендикулярные направлению гофров и касательные напряжения, не оказывают существенного влияния на концентрацию напряжений;
 - в качестве компонентов основного напряженного состояния принимаются напряжения в срединной поверхности.
2. По результатам экспериментальных исследований установлено, что эффективность элементов усиления, располагаемых на периметру при их установке в плоскости нижних граней гофров, профилированных листов, выше, чем при их установке в плоскости верхних граней гофров. В то же время, уменьшение концентрации напряжений при наличии усиления отдельными пластинами не является существенным, прежде всего, из-за податливости соединений.
 3. При наличии сквозного отверстия и при наличии обрамляющих элементов, обладающих изгибной жесткостью, соизмеримой с жесткостью опорного контура, напряженно-деформированное состояние пролетной конструкции может рассматриваться, как для двух взаимно не зависящих частей.
 4. При исследовании панелей-оболочек с двумя отверстиями в пролетной конструкции, расположенными одно от другого на расстоянии $5a$ и более (a - размер отверстия), не было обнаружено их взаимного влияния - значения наибольших напряжений оказались примерно равными напряжениям при одиночных отверстиях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Давыдов Е.Ю. Тонколистовые металлические оболочки в покрытиях зданий и сооружений. - Изд-во "Полымя", 1985, 63 с.
2. Давыдов Е.Ю. Тонколистовые металлические панели-оболочки на пролет для покрытия зданий и сооружений. // Монтажные и спец. работы в стр-ве. N 2. 2002. с.7... 11.

В работе [1] получены результаты, согласно которым утверждается, что, если отношение $r_0/\sqrt{R \cdot h}$ не превышает 0,5, то задачу по определению напряженного состояния вблизи отверстий в оболочках можно свести к плоской задаче (r_0 - размер отверстия, R - радиус кривизны оболочки, h - толщина оболочки). Для исследуемых панелей-оболочек указанное отношение находится в пределах 0,26...0,37, поэтому в дальнейшем не делается различие между полой оболочкой и плоскостью.

Для изотропной среды решение бигармонического уравнения применительно к поставленной задаче сводится, в общем случае, к нахождению двух аналитических функций комплексной переменной [2, 3, 4]

$$U(x, y) = R_e \left[z \cdot \phi_1(z) + \int_0^s \psi_1(z) dz \right], \quad (1)$$

где $\phi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ - искомые функции комплексного переменного z .

При анизотропной среде для решения задачи используется также бигармоническое уравнение, но уже с постоянными коэффициентами

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + (2\mu \cdot a_{22} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \quad (2)$$

где a_{ik} - упругие характеристики материала.

С учетом корней характеристического уравнения функция напряжений представляется в виде

$$U(x, y) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)}, \quad (3)$$

где $\overline{F_1(z_1)}$ и $\overline{F_2(z_2)}$ - функции, сопряженные соответственно функциям $F_1(z_1)$ и $F_2(z_2)$;

$$z_1 = x - S_1 \cdot y; \quad z_2 = x + S_2 \cdot y,$$

S_1, S_2 - корни характеристического уравнения.

Таким образом, и при изотропном, и анизотропном материале решение задачи сводится к отысканию двух функций. Искомые функции взаимосвязаны между собой [5], и поэтому, определив одну из них, можно перейти к другой и наоборот. Искомую функцию можно представить в виде суммы двух функций [6]

$$\phi_1(z) = \phi^0(z) + \phi^x(z), \quad (4)$$

где $\phi^0(z)$ - описывает напряженное состояние в области без отверстий (основное напряженное состояние), а $\phi^x(z)$ - искомая функция, описывающая искажение основного напряженного состояния вблизи отверстий в результате нарушения целостности пролетной конструкции.

Для изотропного материала компоненты напряжений определяются по формуле

$$\sigma = 4R_e \left[\phi^1(\zeta) / \omega^1(\zeta) \right], \quad (5)$$

где $\omega(\zeta)$ - отображающая функция (см. ниже).

Для анизотропного материала компоненты напряжений, выраженные через искомую функцию и корни характеристического уравнения [152], будут равны

$$\sigma_x = 2R_e \left[S_1^2 \cdot \phi^1(z_1) + S_2^2 \cdot \psi^1(z_2) \right], \quad (6)$$

$$\text{где } \phi(z_1) = \frac{\partial F_1}{\partial z_1}; \quad \psi(z_2) = \frac{\partial F_2}{\partial z_2}.$$

Решение задач теории упругости, связанных с концентрацией напряжений осуществляется с помощью математических функций конформно преобразующих напряженное состояние в одной области на напряженное состояние в другой области. В рассматриваемой работе это преобразование напряженного состояния внутри единичного круга на область (пролетную конструкцию) с отверстием. Как известно, концентрация напряжений проявляется только вблизи отверстий и постепенно затухает при удалении от отверстия. Исходя из этого, отображающие функции в данном случае должны быть голоморфными, т.е. затухающими. Определению отображающих функций для конкретных задач посвящены многочисленные работы: [6...12]. В данном разделе используются отображающие функции, приведенные в [6].

В покрытиях зданий и сооружений преимущественно используются, как было сказано выше, отверстия круглые, квадратные и прямоугольные. Наиболее часто технологические отверстия имеют квадратную форму, которым в данной работе уделено наибольшее внимание. При этом, для квадратных и прямоугольных отверстий предполагается, что одна из сторон будет параллельна гофрам. При таком расположении существенно упрощается образование отверстий и их обрамление по контуру. В дальнейшем все математические преобразования будут приведены именно к такому расположению отверстий.

Для круглого отверстия отображающая функция и уравнения контура будут иметь следующий вид:

$$z = \omega(\zeta) = R/\zeta; \quad (7)$$

$$x = R \cdot \cos v, \quad y = R \cdot \sin v,$$

где R - радиус отверстия;

v - угол, отсчитываемый от оси x .

Для квадратного отверстия:

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 \right);$$

$$x = R \left(\cos v + \frac{1}{6} \sin 3v \right); \quad (8)$$

$$y = R \left(-\sin v - \frac{1}{6} \sin 3v \right).$$

где $R \approx 0,6a$ (a - сторона квадрата).

Для прямоугольного отверстия с соотношением сторон 1:2:

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{0,76}{\zeta} + 0,24\zeta - 0,088\zeta^3 - 0,01\zeta^5 \right);$$

$$x = R (\cos v - 0,088 \cos 3v - 0,01 \cos 5v); \quad (9)$$

$$y = R (-0,52 \sin v - 0,088 \sin 3v - 0,01 \sin 5v),$$

где $R = 0,5a$ (a - большая сторона прямоугольника).

Для прямоугольного отверстия с соотношением сторон 1:3,2:

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + 0,5\zeta - 0,125\zeta^3 - 0,038\zeta^5 \right);$$

$$x = R (1,5 \cos v - 0,125 \cos 3v - 0,038 \cos 5v); \quad (10)$$

$$y = R (-0,5 \sin v - 0,125 \sin 3v - 0,038 \sin 5v),$$

где $R = 0,375a$.

Для прямоугольного отверстия с отношением сторон 1:5:

$$z = \omega(\zeta) = R \left(\frac{1}{\zeta} + 0,643\zeta - 0,098\zeta^3 - 0,038\zeta^5 - 0,011\zeta^7 \right);$$

$$x = R (1,643 \cos \nu - 0,098 \cos 3\nu - 0,038 \cos 5\nu - 0,011 \cos 7\nu); \tag{11}$$

$$y = R (-0,357 \sin \nu - 0,098 \sin 3\nu - 0,038 \sin 5\nu - 0,011 \cos 7\nu),$$

где $R = 0,34a$.

В приведенных функциях учтено наименьшее возможное количество членов. Это снижает математическую точность получаемых формул. Например, углы квадрата получаются с закруглениями, радиус которых при удержании 2-х членов равен 0,06а. Но, с другой стороны, уменьшение количества удерживаемых членов существенно упрощает аналитические выражения для определения напряжений.

2. Решение задачи для изотропного материала ($E_x = E_y$)

На основании экспериментальных данных напряженное состояние пролетной конструкции панели-оболочки можно описать двумя эллиптическими зависимостями (см. рис. 1).

$$\sigma_x = \sigma_{x0} \left(1 - 4y^2/b^2 \right)^{1/2}; \tag{12}$$

$$\sigma_y = \sigma_{y0} \left(1 - 4x^2/l^2 \right)^{1/2},$$

где σ_0 - напряжение на центральной оси пролетной конструкции.

Приведенная функция достаточно точно описывает напряженное состояние пролетной конструкции панели-оболочки и имеет существенные отклонения только в мало-напряженных крайних частях пролетной конструкции. На практике отверстия могут не совпадать с центральными осями (см. рис. 1). В этом случае основное напряженное состояние вблизи отверстий и в направлении оси X можно представить в виде суммы двух напряжений:

$$\sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2},$$

где $\sigma_{x1} = \sigma_0 \left(1 - 4d^2/b^2 \right)^{1/2}; \tag{13}$

$$\sigma_{x2} = \sigma_{x1} \cdot y / (0,5b - d). \tag{14}$$

Принятая функциональная сумма удовлетворяет граничным условиям при $y = 0; y = b/2 - d$ и при $d = 0$.

Задача решается дважды: для основного напряженного состояния при $\sigma_x = \sigma_{x1}$ и при $\sigma_x = \sigma_{x2}$, затем результаты суммируются. Такой прием позволяет получить наиболее простые аналитические выражения.

а. Квадратные отверстия

а.1. Основное напряженное состояние характеризуется формулой (13).

Для основного напряженного состояния функция напряжений будет иметь следующий вид

$$U_0 = 0,5\sigma_0 \left(1 - 4d^2/b^2 \right)^{1/2} \cdot y^2. \tag{15}$$

Исходя из (15)

$$\varphi^0(z) = \frac{1}{4} \sigma_{x1} \cdot z. \tag{16}$$

Подставив (16) в (4), получим

$$\varphi_z(z) = \frac{1}{4} \sigma_{x1} \cdot z + \varphi^x(z), \tag{17}$$

то же после замены $z = \omega(\zeta)$

$$\varphi(\zeta) = \frac{1}{4} \sigma_{x1} \cdot \omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta). \tag{18}$$

Функция $\varphi_0(\zeta)$, характеризующая возмущения напряжений, вызванные отверстиями, находится исходя из силовых факторов на контуре отверстия

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + i \cdot f_2^0}{\sigma - \zeta} \cdot d\sigma - \\ & - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \cdot \overline{\varphi_0'(\sigma)} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}, \end{aligned} \tag{19}$$

где γ - окружность единичного радиуса;

σ - координата точки, расположенной на окружности;

$f_1^0 + i \cdot f_2^0$ - приведенное контурное условие для функции

$\varphi_0(z)$;

Для решения рассматриваемой задачи здесь и далее использованы методика и промежуточные результаты, приведенные в работах [6, 13, 14, 15]

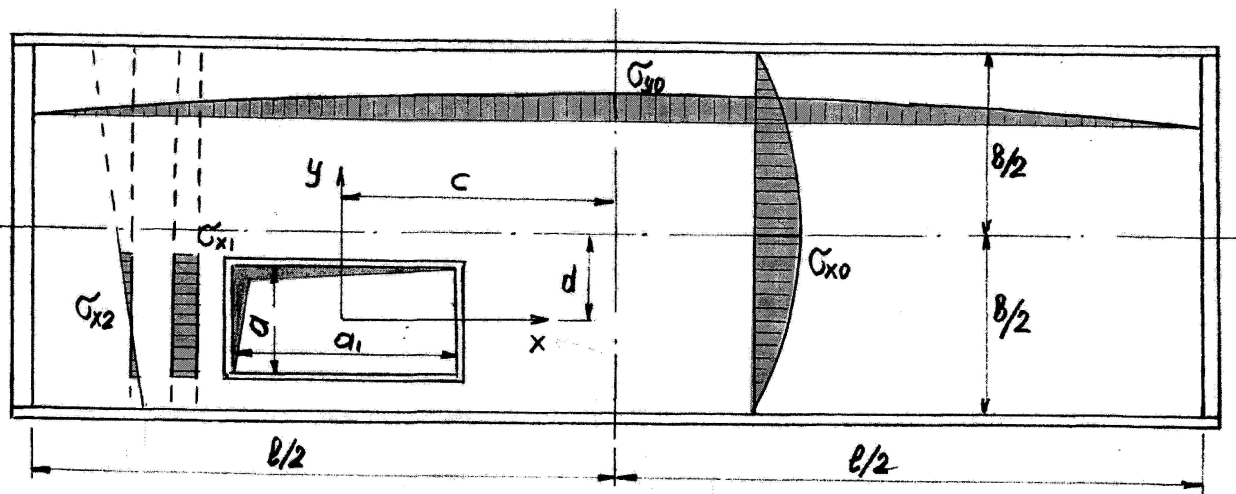


Рис. 1. Панель-оболочка с отверстием

$$f_1^0 + i \cdot f_2^0 = -\frac{\sigma_{x1}}{2} [\omega(\sigma) - e^{-2i\alpha} \omega(\sigma)], \quad (20)$$

где $\omega(\sigma)$ - значение отображающей функции на контуре отверстия.

Тогда функция основного напряженного состояния примет вид

$$\varphi^0(z) = \sigma_{x1} \cdot 0,15\alpha \left(\frac{1}{\zeta} - \zeta^3 / 6 \right). \quad (21)$$

Для определения контурных условий ($\zeta = \sigma$) принимаем

$$\omega(\sigma) = 0,6a \left(\frac{1}{\sigma} - \sigma^3 / 6 \right); \quad \omega(\sigma) = 0,6a \left(\sigma - \frac{1}{6\sigma^3} \right); \quad (22)$$

$$\omega^1(\sigma) = 0,6a \left(\frac{1}{\sigma^2} + \sigma^2 / 2 \right);$$

$$\omega^1(\sigma) = -0,6a \left(\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \right). \quad (23)$$

После подстановки уравнения (20, 21) примут вид:

$$f_1^0 \pm i \cdot f_2^0 = \mp \sigma_{x1} 0,3a \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma^3}{6} - \sigma + \frac{1}{6\sigma^3} \right). \quad (24)$$

Тогда первые интегралы в правой части уравнения (19) будут равны

$$\frac{i}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 \pm i \cdot f_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma = \pm 0,3\sigma_{x1} \cdot a \left(\zeta^3 + 6\zeta \right). \quad (25)$$

При вычислении второго интеграла функция $\varphi_0(\zeta)$ принимается в виде убывающего ряда

$$\varphi_0(\sigma) = \alpha_1 + \frac{2\alpha_2}{\sigma} + \frac{3\alpha_3}{\sigma^2} + \dots \quad (26)$$

После подстановки (25), (26) и (22) в уравнение (19) получим

$$\varphi_0(\zeta) = 0,6a \cdot \sigma_{x1} \left(\frac{3}{7}\zeta + \frac{\zeta^3}{12} \right). \quad (27)$$

Подставив (27) в (18), получим окончательное выражение для функции суммарных напряжений

$$\varphi(\zeta) = 0,6a \cdot \sigma_{x1} \left(\frac{1}{4\zeta} + \frac{3\zeta^3}{7} + \frac{\zeta^3}{24} \right). \quad (28)$$

Наибольшее значения напряжения достигают на краю отверстий, которые могут быть определены по выражению

$$\sigma_v = 4R \cdot e \left[\frac{\varphi^1(\sigma)}{\omega^1(\sigma)} \right]. \quad (29)$$

Для получения уравнения контура в отображающей функции принимается $\sigma = e^{i\nu}$, где ν - угол, отсчитываемый от оси x. При этом показательная функция представляется в виде формулы Эйлера. Подставив соответствующие выражения производных, окончательно получим

$$\sigma_v = \frac{4\sigma_{x1}}{2 + \cos 4\nu} \left[\frac{1}{2} - \frac{6}{7} \cos 2\nu - \frac{1}{4} \cos 4\nu \right]. \quad (30)$$

Так как результаты данной работы ориентированы на применение в инженерных расчетах, то решение с большим количеством удерживаемых членов в отображающих функциях не рассматривается. Кроме того, следует иметь в виду, что математическая точность не всегда приближает теоретические значения к экспериментальным результатам.

Особенностью формулы (30) является то, что она получена для области, размеры которой значительно превышают размеры отверстий. В связи с этим не всегда можно полученные выражения использовать при расчете пролетной кон-

струкции, т.к. отверстия здесь могут иметь размеры, соизмеримые с размерами панелей-оболочек, и особенно с их шириной. В работах [6, 16, 17, 18] приведены результаты теоретических исследований по данной проблеме.

В указанных работах на основе полученных теоретических результатов сделан вывод, что, если ширина рассматриваемой области в 5 и более раз превышает размеры отверстия, то эту область можно рассматривать как бесконечную. При других соотношениях ограничения по ширине уже существенно влияют на концентрацию напряжений, и пренебречь этим фактором не допустимо.

В панелях-оболочках размеры отверстий могут быть как меньше 1/5 от ширины, так и больше. В данной работе предполагается учитывать ограничения только по ширине (на практике размеры отверстий всегда меньше 1/5 длины панелей-оболочек) и предполагается это делать с помощью переходной функции, т.е. результаты, полученные для бесконечной области, приводить к результатам для области конечной ширины, ослабленной отверстием, с помощью специальной функции. В таблице 1 во второй строке приведены наибольшие значения коэффициентов концентрации (к), полученные в работе [6] в зависимости от отношения размера отверстий (а) к ширине рассматриваемой области.

Таблица 1. Значения коэффициентов концентрации

a/b	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
к	3	3,03	3,14	3,36	3,74	4,32
к	3	3,024	3,132	3,362	3,74	4,31

Примечание: коэффициент концентрации, равный 3 (при a/b = 0), получен для бесконечной области.

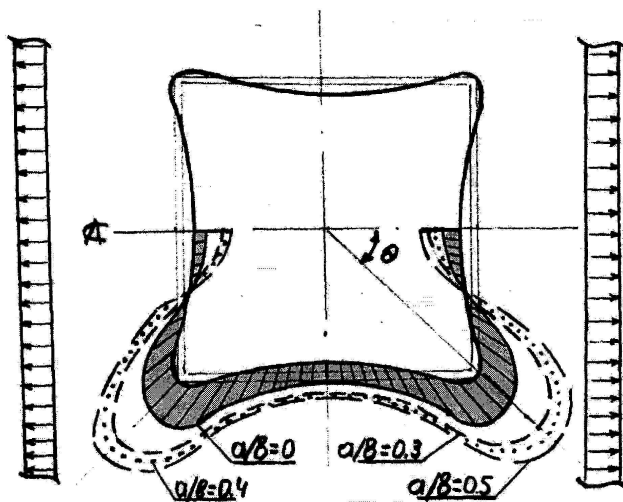


Рис. 2. Эпюры напряжений на контуре отверстия для бесконечной области (a/b = 0) и для полосы конечной ширины при a/b = 0,5, a/b = 0,4, a/b = 0,3.

Зависимость коэффициента концентрации для областей конечной ширины можно аппроксимировать в виде

$$k = k_0 + A \cdot (a/b)^n, \quad (31)$$

где k_0 - коэффициент при a/b = 0.

По результатам проведенных вычислений зависимость (31) можно представить в виде

$$k = k_0 + 7,4(a/b)^{5/2} \quad (32)$$

Если отверстие расположено не по центральной оси, вместо « b » следует подставлять $2b_1$ или $2b_2$ ($b_1 = \frac{b}{2} - d$; $b_2 = \frac{b}{2} + d$). Размеры b и d показаны на рис. 1. В последней строке таблицы 1 приведены значения коэффициентов концентрации, вычисленные по формуле (32) при $\kappa_0 = 3,0$. На рис. 2 показаны напряжения на контуре квадратного отверстия при $a/b = 0$ (сплошная линия) и для полосы конечной ширины при a/b , равном 0,5; 0,4; 0,3.

а.2. Основное напряженное состояние характеризуется формулой (14). Для основного напряженного состояния функция напряжений будет иметь следующий вид

$$U_0 = \sigma_{x1} \cdot y^3 / (0,083b - 0,17d) \quad (33)$$

тогда $\varphi^0(z) = i \cdot \sigma_{x1} (0,5b - d) \cdot z^2 / 8$. (34)

Для области с отверстием после замены переменной z на ζ получим

$$\varphi^0(\zeta) = \frac{1}{8} i \cdot \sigma_{x1} (0,5b - d) \left[0,6 \left(\frac{1}{\zeta} - \frac{\zeta^3}{6} \right) \right]^2 \quad (35)$$

Контурные условия выражаются с помощью функции

$$f_1^0 + i \cdot f_2^0 = -i \cdot \sigma_{x1} [\omega(\sigma) - \omega(\sigma)]^2 / 8(0,5b - d). \quad (36)$$

После подстановки выражения (5.23) получим

$$f_1^0 + i \cdot f_2^0 = \frac{-i \cdot \sigma_{x1}}{8(0,5b - d)} \left[0,6a \left(\frac{1}{\sigma} - \sigma - \frac{\sigma^3}{6} + \frac{1}{6\sigma^3} \right) \right]^2 \quad (36a)$$

В дальнейшем последовательность вычислений такая же, как и в п.1. Искомая функция на области с квадратным отверстием будет иметь вид

$$\varphi(\zeta) = i \frac{\sigma_{x1}}{(0,5b - d)} \cdot 0,045a^2 \left(\frac{1}{\zeta^2} - \zeta^2 - \frac{1}{3}\zeta^4 \right). \quad (37)$$

Суммарное напряжение на контуре определится формулой

$$\sigma_v = \frac{4\sigma_{x1}}{2 + \cos 4v} \left[\frac{1}{2} - \frac{6}{7} \cos 2v - \frac{1}{4} \cos 4v \right] - \frac{\sigma_{x1} \cdot 0,6a}{(0,5b - d)} \left[\frac{14 \sin v - 12 \sin 3v - 2 \sin 5v}{15 + 12 \cos 4v} \right]. \quad (38)$$

В инженерных расчетах интерес представляет наибольшее напряжение, которое будет при $v \approx 45^\circ$. Тогда формула по определению этого напряжения с учетом размеров панели примет вид

$$\sigma_{\max} = \sigma_{x1} \left[\left(3 - \frac{0,55a}{0,5b - d} \right) + 7,4 \left(\frac{a}{2b_1} \right)^{5/2} \right]. \quad (39)$$

В качестве « b_1 » следует принимать расстояние от центра отверстия до опорного контура панели-оболочки. При расположении отверстия не на центральной оси панели-оболочки эти расстояния будут соответственно не одинаковыми.

Полученные функциональные зависимости могут быть использованы для вычисления напряжений по характерным сечениям, прежде всего, при $x=0$. С этой целью необходимо

комплексную переменную ζ выразить через z (см. отображающие функции). Получаемые при этом уравнения отличаются чрезвычайной громоздкостью, что нежелательно при выполнении инженерных расчетов. Для получения более простых зависимостей были использованы результаты экспериментальных исследований:

- вблизи продольных элементов опорного контура напряжения близки к нулю;
- распределение напряжений по ширине пролетной конструкции может быть описано эллиптической функцией (12).

Тогда сумма напряжений в поперечном сечении будет равна

$$F = 2 \int_0^{b/2} \sigma (1 - 4y^2/b^2)^{1/2} \cdot dy = 5\sigma_0 \frac{b}{6} \quad (40)$$

Тоже выше и ниже продольной оси отверстия

$$F_{1,2} = 0,5F \pm \int_0^d \sigma_0 (1 - 4y^2/b^2)^{1/2} dy = \quad (41)$$

$$= \sigma_0 \left[\frac{5b}{12} \pm d \left(1 - \frac{2d^2}{3b^2} \right) \right]$$

Использованные обозначения приведены на рис 3.

Функцию распределения напряжений можно представить в виде степенной функции

$$\sigma = \sigma_{\max} \left(\frac{y}{a_1} \right)^n \quad (42)$$

Показатель степенной функции определяется из равенств

$$\int_0^{a_1} \sigma_{1\max} \frac{y^{n_1}}{a_1^{n_1}} dy = F_1; \int_0^{a_2} \sigma_{2\max} \frac{y^{n_2}}{a_2^{n_2}} dy = F_2 \quad (43)$$

Отсюда

$$n_1 = \sigma_{1\max} \frac{a_1}{F_1}; \quad n_2 = \sigma_{2\max} \frac{a_2}{F_2} \quad (44)$$

В качестве верхних пределов интегрирования были приняты оси продольных элементов опорного контура. Эпюры распределения напряжений представлены на рис.3.

б. Прямоугольные отверстия

Для отверстий прямоугольной формы отображающая функция при одинаковой степени точности получается более сложной, чем для квадратного отверстия, и, кроме того, вид функции зависит от соотношения сторон прямоугольника. Ниже приведено решение задачи для прямоугольного отверстия с соотношением сторон $a/b = 3,2$.

Проделив соответствующие математические действия (см. выше), получим для первого напряженного состояния ($\sigma_x = \sigma_{x1}$)

$$\varphi(\zeta) = 0,6a \cdot \sigma_{x1} \left(\frac{0,25}{\zeta} + 0,338\zeta + 0,023\zeta^3 + 0,0095\zeta^5 \right). \quad (45)$$

Для перехода к напряжениям на контуре отверстия используется та же методика, что и для квадратного отверстия

$$\sigma_v = 4\sigma_{x1} \left(\frac{0,338 - 0,25/\cos 2v + 0,069 \cos 2v + 0,0475 \cos 4v}{0,5 - 1/\cos 2v - 0,375 \cos 2v - 0,19 \cos 4v} \right) \quad (46)$$

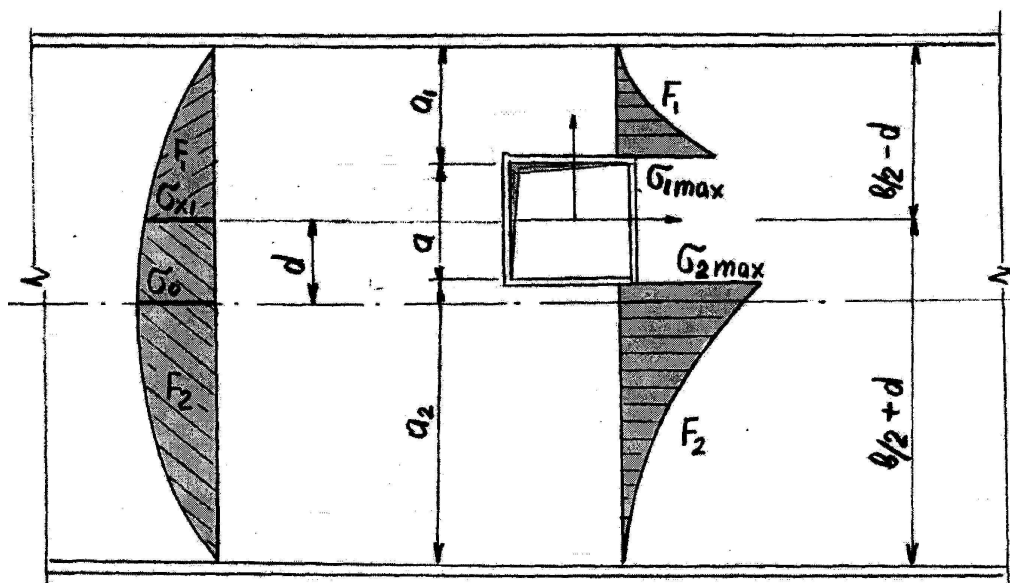


Рис 3. Распределение напряжений поперечных сечений при квадратном отверстии.

Таблица 2. Значения коэффициентов и корней характеристического уравнения для профилированных листов

Тип. профн.	K_1	K_2	β_1	β_2	$E_1, \frac{KH}{CM^2}$	$G_H, \frac{KH}{CM^2}$
H57-750-07 l = 143,5 см	409	14090	6,1	19,3	14,62	503
H57-750-08 l = 143,5 см	409	10785	5,3	19,5	19,1	503
H60-845-07 l = 161 см	412	14906	6,1	19,3	13,82	500
H60-845-08 l = 161 см	412	11444	5,48	19,5	18	500
H60-845-09 l = 161 см	415	9035	4,82	19,7	22,8	500
H75-750-08 l = 137,5 см	470	20000	6,88	20,5	10,3	438
H75-750-09 l = 137,5 см	470	15846	6,0	20,8	13	438

Эпюра напряжений по контуру отверстия приведена на рис. 5.18. Наибольшее напряжение получается при $\nu = 35...32^0$

$$\sigma_{vmax} = \sigma_{x1} \cdot 3,2. \quad (47)$$

Если прямоугольное отверстие развернуть на 90^0 то

$$\sigma_v = \sigma_{x1} \frac{0,63 \cos 2\nu - 0,07 + 0,1 \cos 4\nu}{1,43 - 1,23 \cos 2\nu + 0,56 \cos 4\nu + 0,38 \cos 6\nu}$$

Наибольшее напряжение получается при $\nu = 25^0$

$$\sigma_{vmax} = \sigma_{x1} \cdot 6,77 \quad (49)$$

Для второго напряженного состояния ($\sigma_x = \sigma_{x2}$) функция $\varphi(\zeta)$ будет иметь вид

$$\varphi(\zeta) = i \frac{\sigma_{x1}}{(0,5b - d)} \cdot 0,045 \times \chi a^2 \left[\frac{1}{\zeta^2} - 0,125\zeta^2 - 0,2875\zeta^4 - 0,075\zeta^6 \right], \quad (50)$$

где **a** - сторона отверстия, перпендикулярная оси **x**. Опуская промежуточные вычисления, можно написать формулу по определению напряжений на контуре отверстия

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{x1}}{0,5b - d} \times \times 0,6a \left(\frac{25,6 \sin \nu - 10,2 \sin 3\nu - 2,3 \sin 5\nu - \sin 7\nu}{38 - 32,9 \cos 2\nu + 15 \cos 4\nu + 10 \cos 6\nu} \right)$$

Суммарные напряжения для области конечной ширины определяются сложением результатов, полученных по формуле (46) и (51) или (48) и (51). С учетом первого напряженного состояния (σ_{x1}) и второго (σ_{x2}), а также с учетом конечной ширины пролетной конструкции, формула по определению наибольшего напряжения будет иметь вид

$$\sigma_{max} = \sigma_{x1} \left[3,2 - \frac{0,5a}{0,5b - d} + 7,4 \left(\frac{a}{b - 2d} \right)^{5/2} \right]. \quad (52)$$

Для определения наибольшего напряжения на другом конце отверстия следует в знаменателе второго и третьего слагаемого поменять знак на противоположный.

При круглых отверстиях аналитические зависимости существенно упрощаются. К тому же, имеющиеся решения [6] можно адаптировать к рассматриваемой конструкции. Напряжение на контуре отверстия можно представить в виде

$$\sigma_{\sigma} = \sigma_{x1} (1 - 2 \cos 2\nu) - \frac{\sigma_{x1} \cdot a}{(0,5b - d) \cdot 2} (\sin \nu - \sin 3\nu) \quad (53)$$

где a - диаметр отверстия.

Наибольшее значение напряжения будет при $\nu = 90^{\circ}$

$$\sigma_{\max} = \sigma_{x1} \left[\left(3 - \frac{a}{0,5b - d} \right) + 7,4 \left(\frac{a}{b - 2d} \right)^{5/2} \right], \quad (54)$$

где третье слагаемое учитывает размеры отверстия и ширину пролетной конструкции. При определении напряжения на противоположном конце диаметра нужно в знаменателе второго и третьего слагаемого поменять знак на противоположный.

3. Решение задачи для анизотропного материала

Для решения используется основное уравнение плоской задачи теории упругости (2). Характеристическое уравнение по отношению к (2) после некоторых преобразований будет иметь вид

$$S^4 + K_1 \cdot S^2 + K_2 = 0, \quad (55)$$

где $K_1 = E_x / G - 0,6$; $K_2 = E_x / E_y$;

E_x, E_y, G - модуль деформаций в направлении осей x ,

u и модуль сдвига.

Как показали многочисленные исследования [15], корни характеристического уравнения могут быть только комплексными.

В общем случае корни этого уравнения равны

$$\begin{aligned} S_1 &= \alpha_1 + \beta_1 \cdot i; & S_2 &= \alpha_2 + \beta_2 \cdot i; \\ S_3 &= \alpha_1 - \beta_1 \cdot i \\ S_4 &= \alpha_2 - \beta_2 \cdot i. \end{aligned} \quad (56)$$

Проделанные вычисления применительно к профилированным листам показали, что корни уравнения (55) состоят только из мнимой части. В таблице 2 приведены значения коэффициентов K_1 и K_2 , а также значения мнимых частей корней уравнения (55) для профилированных листов, наиболее часто используемых в качестве пролетной конструкции.

Из таблицы 2 видно, что коэффициенты при мнимых частях не отличаются существенно, и поэтому в дальнейшем представляется возможным иллюстрировать получаемые аналитические результаты по усредненным значениям β_1 и β_2 .

а. Круглые отверстия

Для круглого отверстия функции комплексного переменного, описывающие напряженное состояние рассматриваемой области, имеют следующий вид

$$\varphi(z) = -\frac{i \cdot \sigma_{xi} \cdot R^2 (1 - i \cdot S_1)}{2(S_1 - S_2) \left(z_1 + \sqrt{z_1^2 - R^2 - S_1^2 \cdot R^2} \right)}; \quad (57)$$

$$\psi(z) = \frac{i \cdot \sigma_{xi} \cdot R^2 (1 - i \cdot S_2)}{2(S_1 - S_2) \left(z_2 + \sqrt{z_2^2 - R^2 - S_2^2 \cdot R^2} \right)},$$

где R - радиус отверстия.

Взяв первые производные и подставив их в (6), получим для бесконечной области

$$\sigma_x = \frac{\sigma_{x1}}{2(\beta_1 - \beta_2)} \left[\frac{\beta_1^2}{1 - \beta_1} \left(1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - R^2 - R^2 \cdot \beta_2^2}} \right) - \frac{\beta_2^2}{1 - \beta_2} \left(1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - R^2 - R^2 \cdot \beta_2^2}} \right) \right] \quad (58)$$

Наибольшее напряжение будет при $x=0$ и $y=R$

$$\sigma_{x\max} = \sigma_{x1} (\beta_1 + \beta_2). \quad (59)$$

Если использовать усредненные значения корней характеристического уравнения (см. табл. 2), то формула (59) для области конечной ширины примет вид

$$\sigma_{x\max} = \sigma_{x1} \left[25,6 + 7,4 \left(\frac{a}{b} \right)^{5/2} \right]. \quad (60)$$

В случае если отверстие расположено не по центральной оси, то вместо « b » следует подставить $b-2d$ или $b+2d$ (в зависимости от расположения точки, в которой определяется напряжение).

б. Квадратные отверстия

Для определения концентрации напряжений в анизотропном материале при квадратном отверстии используются результаты исследований, полученные в работе [19]. Напряжения на контуре могут быть определены по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu} &= \frac{\sigma_{x1} B^2}{C^2} + \frac{\sigma_{x1}}{LC^2} \left\langle AD^4 \cdot c_1 + BC^4 n S_1 + \frac{1}{3} \left[AC^4 dknc_1 + \right. \right. \\ &+ 3ADc_3 + BC^4 n (1S_1 + 3S_3) \left. \right] - \frac{1}{81} C^4 n [AK (rc_1 - 3gc_3) + \\ &+ B(SS_1 - 3hS_3) \left. \right] \rangle, \end{aligned} \quad (61)$$

где $c_1 = \cos \nu$; $c_3 = \cos 3\nu$; $S_1 = \sin \nu$; $S_3 = \sin 3\nu$;

$$A = c_1 + \frac{1}{3} c_3; \quad B = S_1 - \frac{1}{3} S_3;$$

$$C^2 = A^2 + B^2; \quad \kappa = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}; \quad n = \beta_1 + \beta_2;$$

$$L = (B^2 + \beta_1^2 \cdot A^2) \cdot (B^2 + \beta_2 \cdot A^2);$$

$$D = -A^4 \cdot \kappa + A^2 \cdot B^2 (1 - 2\kappa - \kappa^2) + B^4 (2 + \kappa - n^2);$$

$$m = 1 + \kappa + n; \quad d = 4/m; \quad l = 2(1 - \kappa - n)/m;$$

$$r = 8(10\kappa - 3 - 3\kappa^2 + n + n\kappa)/m^3; \quad g = 8(1 - \kappa)/m^2;$$

$$S = 2 \left[(\kappa + n)^3 - \kappa(11\kappa + 22n - 27) - 5n^2 + 7n - 3 \right] / m^3$$

$$h = 2 \left[(n + \kappa)^2 + 1 - 2n - 6\kappa \right] / m^2. \quad (62)$$

Анализ формулы (61) показывает, что наибольшее напряжение получается при $\nu = 90^{\circ}$

$$\sigma_{\nu} = \frac{4\sigma_{x1}}{3} \left(\frac{4}{3} + n + \frac{nd}{9} - \frac{5n}{9} - \frac{nS}{81} - \frac{nh}{27} \right). \quad (63)$$

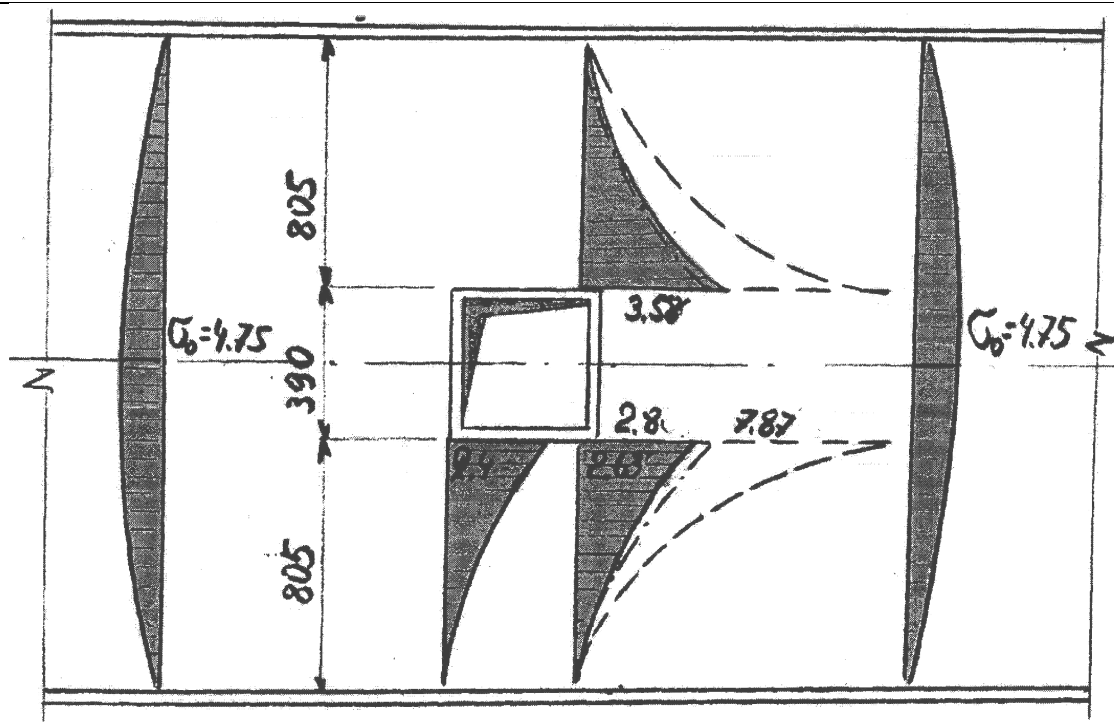


Рис. 4. Сравнение экспериментальных и теоретических коэффициентов концентрации: - экспериментальные результаты; -.- теоретические результаты для изотропного материала; — теоретические материалы для анизотропного материала.

Если использовать усредненные значения корней характеристического уравнения, то значение наибольшего напряжения для профнастила с учетом конечной ширины пролетной конструкции панели-оболочки будет равно

$$\sigma_{\max} = \sigma_{x1} \left[7,87 + 7,4 \left(\frac{a}{2b_1} \right)^{5/2} \right]. \quad (64)$$

Здесь, так же как и в предыдущих результирующих формулах, следует при определении напряжения на противоположном конце отверстия подставить « b_2 » вместо « b_1 ».

Смещение наибольшего напряжения к центру отверстия является следствием приближенности отображающих функций (при решении задачи удерживалось только два члена ряда), и в результате математическая модель выреза в углах имеет закругления (см. выше).

На рис. 4 приведены эпюры отношений $\sigma_{\max}/\sigma_{x1}$ в наиболее напряженных сечениях для квадратных отверстий, вычисленные как для изотропного и анизотропного материала. Наибольшее теоретическое значение коэффициента концентрации для изотропного материала подсчитано по формуле (52), т.е. с учетом неравномерного распределения напряжений по ширине пролетной конструкции и с учетом соотношения размера отверстия и ширины панели-оболочки. Функция распределения коэффициента концентрации принята по выражению

$$k = k_{\max} \left(\frac{y}{a_1} \right)^{n_1}, \quad (65)$$

где согласно формуле (44) с учетом (40) и (41)

$$n_1 = \sigma_{\max} \cdot \frac{a_1}{F_1} = k_{\max} \cdot a_1 \left(5 \frac{b}{12} \right) = 2,5. \quad (66)$$

Сравнение приведенных эпюр показывает, что результаты, полученные экспериментальным путем, в значительно большей степени совпадают с коэффициентами концентрации, вычисленными как для изотропного материала. Таким

образом, исходя из сделанного сопоставления, в практических расчетах следует использовать формулы (39), (52) и (54), а распределение напряжений по наиболее опасному сечению вблизи отверстия определять по формуле (42).

Выводы

1. Получены аналитические зависимости по определению распределения напряжений вблизи отверстий применительно к профилированным листам с учетом размеров отверстий и расположения отверстий по ширине панелей-оболочек, а также в зависимости от значений и схем распределения основных напряжений в пролетной конструкции по ширине и длине панелей-оболочек.
2. При аналитическом определении коэффициентов концентрации напряжений вблизи отверстий пролетную конструкцию панелей-оболочек следует рассматривать как изготовленную из изотропного материала без учета конструктивной анизотропии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Афендик Л.Г., Ершов А.М. Определение напряжений в пластинках с отверстиями оптическим методом. // Горн. журн. 1937, 14.
2. Чаплыгин С.А. Собр. соч. т. III ГТТИ, М.-Л., 1950, с. 306-316.
3. Мусхешвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М, 1954
4. Холстов Ю.Г. Применение электроинтегратора для конформных преобразований односвязных областей. - Изв. АН СССР, ОТН, 1947.
5. Цурпал И. А. Концентрация напряжений квадратного отверстия в физически нелинейной упругой пластинке.// Изв. АН СССР.мех.Д965,6.
6. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. - Киев: "Наукова думка". 1968, с.887.
7. Фильчикова В.П. Конформные отображения областей специального типа. «Наукова думка». КиевЛ972.с.251.
8. Гузь А.М., Чернышенко И.С., Чехов В.Н. Исследования по теории тонких оболочек с отверстиями. //Прикладная механика. 1979 С.3...37.

9. Цурпал И.А. Некоторые задачи физически нелинейной плоской теории упругости. - В кн.: Теория пластин и оболочек. К., Изд-во АН УССР. 1962.
10. Савин Г.Н. Нелинейные задачи концентрации напряжений около отверстий в пластинах. - В кн.: Теория оболочек и пластин, Изд-во АН Арм. ССР Ереван 1964.
11. Миренков В.Е., Шутов В.А. Напряженное состояние полуплоскости ослабленной круговым отверстием. // Известия высших учебных заведений. N 12. 2000 г., с. 12...17.
12. Маховиков В.И. О приближении конформных отображений и их применении в теории упругости. // Прикл. мат. 1957, 3, 1, 20.. 37.
13. Goodier I.N., Phil. Mag., t.22, 1936, p 69.
14. Alblas J. B., Theorie van de driedimensionale Spanningstoestand in een doorborde plaat, Amsterdam, 1957.
15. Jessop H., Snell C., Allison J.M., The stress concentration factors in cylindrical tubes with transverse circular holes.// Aeronaut, Quart, 1959,10,4.
16. Савин Г.Н. Концентрация напряжений возле малых отверстий в неоднородно - напряженном плоском поле. - В кн.: Тр. Днепропетровск. инж.строит.ин-та, 1937, 20.
17. Jindra F. Einige Anwendungen eines nichtlinearen Elastizitätsgesetzes. Ing.Arch., 1954, 22,2.
18. Лехницкий С.Г. Плоская статистическая задача теории упругости анизотропного тела. // Прикладная мат. и мех. М, 1937.
19. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного Физматгиз, М.,1960.

УДК 666.97.546

Левчук Н.В., Добрунова В.М.

МОДИФИЦИРОВАНИЕ ПОРТЛАНДЦЕМЕНТНЫХ СИСТЕМ КОЛЛОИДНЫМИ РАСТВОРАМИ

В развитии технологии бетона на современном этапе основная роль принадлежит модифицированию цементных систем, что подтверждается многочисленными научными исследованиями и практикой. Особое место среди добавок - модификаторов занимают суперпластификаторы и высокодисперсные микрокремнеземсодержащие материалы. Воздействуя на процессы формирования структуры, особенно на начальной стадии коагуляции они, влияют на реологические свойства цементной системы, способствуют сокращению водопотребности.

Чтобы получить бетоны с плотной структурой и наивысшей стойкостью к агрессивным агентам, в цемент вводят добавки, которые не обладают вяжущими свойствами, но которые вступают в химические реакции с гидроксидом кальция с образованием силикатов. Как известно, реакции трехкальциевого силиката с водой имеют существенное значение, так как алит - главный источник механической прочности затвердевших цементов и его гидролиз является наиболее характерным процессом, который сопровождается схватыванием и твердением. Первым отщепляется гидроксид кальция, в результате чего и образуется гидросиликат кальция. Гидроксид кальция, образующийся при гидратации свободной извести, содержание которого должно быть не более 1%, или гидролитического, получающийся в результате гидратации силикатов, осаждается первоначально в виде тонкокристаллической модификации. Образование крупнокристаллического гидроксида кальция в затвердевших цементах вредно отражается на устойчивости бетона, так как он легко разрушается агрессивными водами. Устойчивость затвердевших цементов при нагреве также зависит от присутствия гидроксида кальция. Механическая прочность его нарушается вследствие дегидратации извести. Ссылаясь на ряд авторов, наблюдавших серии кристаллических фаз в системе кремнезём - известь - вода, В.Эйтель подтверждает возможность образования моногидросиликатов типа $2\text{CaOSiO}_2 \cdot \text{H}_2\text{O}$. Поэтому введение добавок, связывающих гидроксид кальция, способствует увеличению механической прочности и стойкости вяжущего, на чем и основано использование различных порошковых добавок с содержанием кремнезёма.

Представленная в конце 80-тых годов классификация минеральных добавок техногенного происхождения, имеющих

одинаковый качественный состав и отличающихся степенью дисперсности, характеризует материалы по степени воздействия на цементные системы. Преобладание диоксида кремния аморфной модификации и высокая дисперсность обуславливают увеличение активности добавки. Высокодисперсные суспензии силикатов приготавливают механическим путем: дроблением, размальеванием, истиранием первоначального материала, при измельчении которых происходит разрушение связей. В основном это такие материалы как шлаки, золы уноса, золы котелен и т.д., с удельной поверхностью от 250 — 350 до 500 м²/кг.

Влияние микрокремнезема на формирование структуры цементной системы зависит от взаимодействия двух факторов - физического и химического. Физические особенности связаны с заполнением ультрадисперсными частицами пространства между частицами цемента и образованием коагуляционных контактов между ними, а также с увеличением плотности системы за счет формирования структуры на более поздних сроках твердения [1, 2].

С точки зрения прохождения химических процессов, как отмечают Каприелов С.С, Батраков В.Г., Шейнфельд А.В., система увеличивает содержание низкоосновных гидросиликатов, вместо образования высокоосновных гидросиликатов и портландита. Такие бетоны обладают комплексом уникальных характеристик, - высокой и сверхвысокой прочностью ($R=80...120$ МПа), низкой проницаемостью ($W 16...W 20$), высокой коррозионной стойкостью и долговечностью. Модификаторы такого рода представляют собой порошковые материалы насыпной плотностью 750-880 кг/м³, состоящие из гранул размером до 100 мкм. Каждая гранула - это агрегат из ультрадисперсных частиц микрокремнезема или золы, покрытых затвердевшей адсорбционной пленкой из молекул суперпластификатора и комплексона и, поэтому приготовление такого рода модификатора связано с определенными технологическими и экономическими трудностями [3].

Теоретические возможности использования модификатора, активно участвующего в процессе гидратации портландцемента, находящегося в высокоактивной мицеллярной форме, показано в работе [4], где авторы попытались показать преимущества введения модификатора в виде коллоидального раствора гидроксида алюминия. Экспериментальные данные

Левчук Наталья Владимировна, аспирант каф. строительных материалов Брестского государственного технического университета.

Добрунова Валентина Михайловна, доцент каф. инженерной экологии и химии Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.