

Рис. 2. Эпюры нормальных σ_y и касательных τ_{xy} напряжений в сечении у оболочки

Выводы

В данной работе решена проблема прочности и несущей способности поперечных сечений толстостенных оболочек при однократном нагружении. Сформулированы прямая и двойственная задачи оптимизации для выпуклых и невыпуклых условий текучести. Получены простые решения в виде формул и в квадратурах. На основе метода множителей Лагранжа численно исследована прочность сечений стальных толстостенных оболочек. Предложенные здесь подходы позволяют оценить решения для тонкостенных элементов; особый интерес эти результаты будут иметь для анизотропных пластин и оболочек из композитных материалов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М., Физматгиз, 1963. – 635 с. = Timoshenko S., Woinowski-Krieger S. Theory of plates and shells. McGraw-Hill Book Company, N. York, 1959.
2. Ильюшин А.А. Конечное соотношение между силами и моментами и связь их с деформациями в теории оболочек // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т. 9. – № 1. – С. 101-110.
3. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
4. Wojewódzki Wiślaw. Nośność graniczna powłok. – Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2002. – 356 s.
5. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.-Л., ГИТТЛ, 1949. – 784 с.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. – 2-е изд. – М., Наука, 1987. – 360 с.
7. Гениев Г.А., Курбатов А.С., Самедов Ф.А. Вопросы прочности и пластичности анизотропных материалов. – М., Интербук, 1993. – 187 с.
8. Węzły i połączenia konstrukcyjne: projektowanie metodą nośności granicznej / red. Henryk Frąckiewicz, Warszawa : Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1985. – 372 s.
9. Szczepiński W., Szalikowski J. Projektowanie konstrukcji metodą granicznych pól naprężeń/ Biblioteka Mechaniki Stosowanej. – Warszawa-Poznań: PWN – Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985. – 334 s.
10. Кончковский З. Плиты: Статические расчеты / Перев. с польск. – М., Стройиздат, 1984. – 484 с.
11. Dem'yanov V.F., Stavroulakis G.E., Polyakova L.N., Panagiotopoulos P.D. Quasidifferentiability and Nonsmooth Modelling in Mechanics, Engineering and Economics / Nonconvex Optimization and Its Applications. Vol. 10. – Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers, 1996. – 348 p.
12. Mason Jayme. Methods of functional analysis for application in solid mechanics / Series: Studies In Applied Mechanics, Vol. 9, Amsterdam et al., Elsevier, 1985. – 392 p.

УДК 624.04

Уласевич В.П., Костюк О.В.

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ ГИБКИХ БАЛОЧНО-ВАНТОВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СРЕДЕ MathCAD

При построении математических моделей конструктивных систем в виде расчетных схем и методов их решения наибольший интерес представляют подходы, пригодные для общего класса задач. Так принятый в свое время концепции о малости перемещений и подчиненности материала линейному закону деформирования позволили для расчетных схем большинства сооружений считать справедливой геометрическую тождественность загруженной системы с незагруженной. Использование этих концепций позволило создать классические методы линейной строительной механики (метод сил, метод перемещений, смешанный метод). Применение в расчетах матричного аппарата и современных средств вычислительной техники позволило сформулировать метод конечных элементов (МКЭ). Применительно к стержневым системам основные положения МКЭ изложены в работах [1, 2]. Наибольшее распространение МКЭ получил в форме метода

перемещений. Его достоинство – универсальность и возможность передать наиболее трудоемкую процедуру составления матрицы жесткости – ЭВМ. Как правило, реализация МКЭ на ЭВМ осуществляется на алгоритмических языках высокого уровня для современных компьютеров. Процедура эта сложная, трудоемкая и длительная. Эта трудоемкость еще более возрастает в связи с необходимостью разработки методик, учитывающих деформированные схемы равновесия. А потребность совершенствовать расчетные модели по-прежнему велика. В этой связи, в наиболее сложной ситуации оказываются те специалисты, которые разрабатывают новые методы расчета с целью построения математических моделей для выполнения численных экспериментов.

Уласевич Вячеслав Прокофьевич, к.т.н., профессор каф. строительных конструкций Брестского государственного технического университета.

Костюк Ольга Васильевна, аспирант каф. строительных конструкций Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

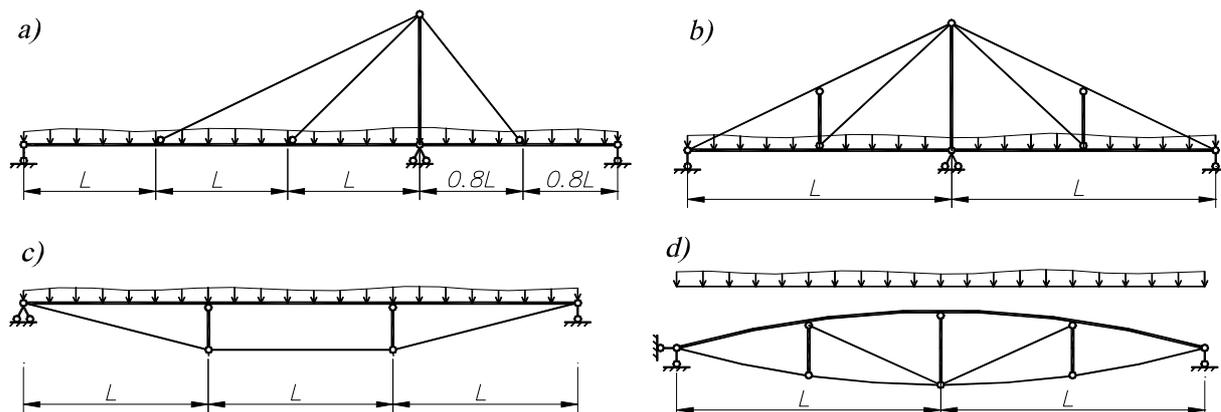


Рис. 1. Примеры расчетных схем гибких балочно-вантовых систем.

В данной работе изложен разработанный авторами расчет гибких балочно-вантовых систем по МКЭ, построенный на основе метода перемещений с учетом деформированной схемы. Разработанный метод реализован в среде MathCAD, обладающей набором средств для работы с матрицами, а также средствами программирования для построения логических процедур. Программа расчета гибких балочно-вантовых систем по МКЭ с учетом деформированной схемы равновесия, представляет собой действующую математическую модель для проведения численных исследований при оценке их напряженно-деформированного состояния.

1. Особенности работы балочно-вантовых систем. Балочно-вантовой стержневой системой будем называть конструктивную схему, состоящую из многопролетных сжатозогнутых разрезных или неразрезных балок, подкрепленных системой гибких или жестких вант (рис. 1).

По определению [3] такие системы относятся к *квазиинвариантным*, т.е. остающимися геометрически неизменяемыми, если в них все ванты заменить стержнями, способными воспринимать сжатие. Это допущение, а также ряд других особенностей, позволяют выделить их в отдельный класс задач. Отметим следующие характерные особенности этих систем.

➤ Балочно-вантовым системам свойственна повышенная деформативность, так как входящие в них ванты, обладая высокими прочностными характеристиками, имеют относительно невысокую продольную жесткость. Эта особенность требует учета их деформированной схемы равновесия;

➤ Деформативность балочно-вантовых систем меньше, чем у мгновенно-жестких вантовых систем. Это позволяет строить методику их деформационного расчета по МКЭ, используя классические методы строительной механики;

➤ Если балочно-вантовые системы статически неопределимы, то они могут быть предварительно напряжены. Это дает возможность регулировать внутренние усилия в таких системах до оптимальных значений;

➤ В статически неопределимых балочно-вантовых системах число независимых самонапряженных состояний только тогда равно числу лишних связей, когда на знаки усилий в вантовых элементах системы не накладываются жесткие ограничения;

➤ Поскольку ванты балочно-вантовых систем являются элементами, обладающими свойствами односторонних связей, то для соблюдения принципа *квазиинвариантности* в процессе расчета на усилие в вантах N_v , необходимо накладывать ограничение $N_v < P_c$, где P_c – критическая сила первого ряда.

Отметим основные расчетные предпосылки:

- все элементы балочно-вантовых систем работают в упругой стадии;
- нагрузки и другие внешние воздействия предполагаются квазистатическими, консервативными, приложенными к элементам, обладающим продольной и изгибной жесткостями, достаточной для уравнивания системы в деформированном состоянии;
- перемещения узлов и поперечные деформации стержней развиваются в пределах, допускаемых нормами;
- все ванты в системе являются пологими, то есть такими, у которых отношение максимальной ординаты прогиба ванты к длине ее хорды не превышает 1/10.

2. Основные уравнения расчета по МКЭ. В МКЭ конструкция или сооружение, имеющие бесконечное число степеней свободы, заменяется системой с конечным числом степеней свободы. Связь конечных элементов между собой описывается в МКЭ уравнениями равновесия и условиями неразрывности перемещений. Замена исходной конструкции набором дискретных элементов подразумевает равенство энергий дискретной модели и исходной системы. Это дает возможность получить основные разрешающие уравнения МКЭ:

Статические, устанавливающие связь между внешними узловыми нагрузками и внутренними силами в узлах. Для системы из n узлов, уравнение ее равновесия в глобальной системе координат имеет вид

$$-\{r\} + \{P\} + \{R\} = 0, \quad (1)$$

где $\{r\}$ – вектор компонентов суммарных реакций всех узлов системы на все примыкающие к ним стержни; $\{P\}$ – вектор всех внешних нагрузок, действующих в узлах системы; $\{R\}$ – вектор опорных реакций, действующих в узлах, на которые наложены соответствующие связи (если в узле нет связей, то соответствующие им величины равны нулю).

Физические, устанавливающие связь между внутренними силами и деформациями системы. Для линейно-деформируемых систем в МКЭ эта связь в матричной форме имеет вид

$$\{r\} = [K] \cdot \{\Delta\}, \quad (2)$$

где $[K]$ – матрица жесткости системы, каждый элемент которой K_{ij} представляет собой реакцию r_i в i -м направлении от единичного перемещения узла в j -м направлении; $\{\Delta\}$ – вектор перемещений узловых точек системы.

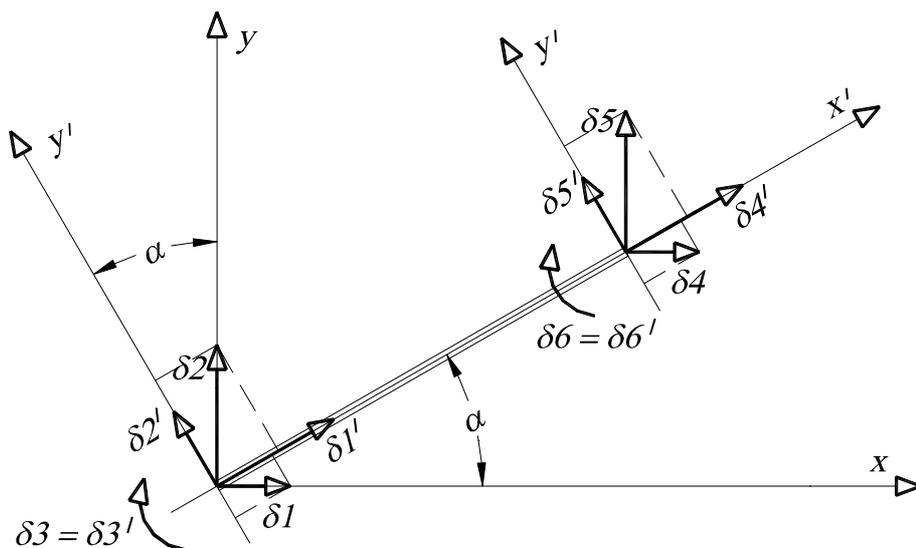


Рис. 2. Связь между перемещениями в локальной и глобальной системах координат

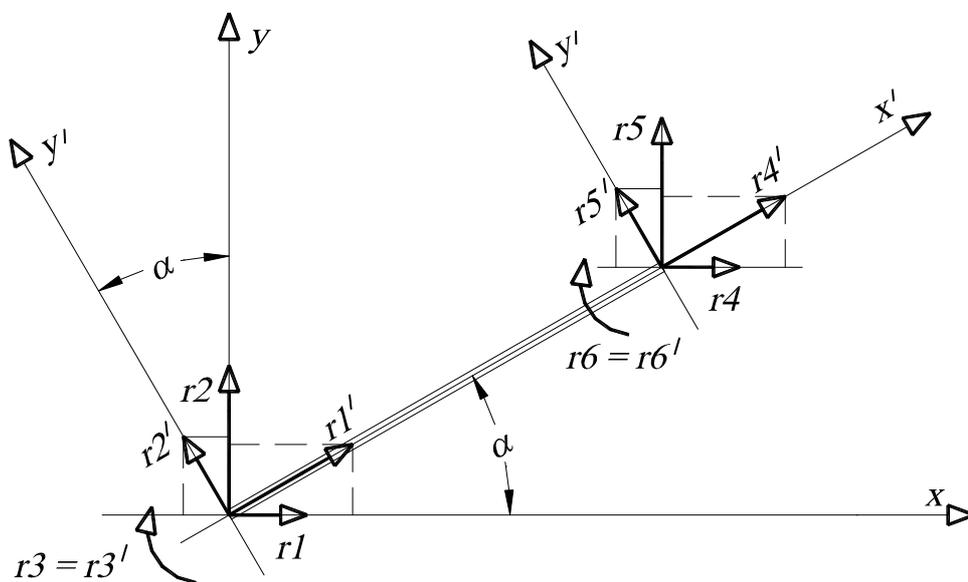


Рис. 3. Связь реакций в локальной и глобальной системах координат.

Геометрические, учитывающие совместность деформаций. Геометрические уравнения описывают связь между деформациями элементов и перемещениями узлов системы. Если считать перемещения и деформации малыми в сравнении с основными размерами конструктивных элементов, то уравнения совместности деформаций становятся линейными.

Перемещения концов стержневой системы в локальных системах координат связаны с перемещениями в глобальной системе координат (рис.2) зависимостью [1]

$$\{\delta'\} = [T_\alpha] \cdot \{\delta\}. \quad (3)$$

Связь реакций узлов всей системы $\{r\}$ с реакциями и перемещениями концов ее элементов с учетом (3) осуществляем по формуле

$$\begin{aligned} \{r\} &= [T_\alpha]^T \cdot \{r'\} = [T_\alpha]^T \times \\ &\times \{ [K'] \cdot \{\delta'\} \} = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot [T_\alpha] \cdot \{\delta\}. \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 3 показана связь реакций начала и конца КЭ в локальной и глобальной системах координат, записанная в (4).

В выражениях (3) и (4): $\{\delta\}$ и $\{\delta'\}$ - вектора перемещений концов элементов системы соответственно в локальной и глобальной системах координат; $\{r'\}$ - вектор реакций концов стержневой от перемещений этих концов в локальной системе координат; $[K']$ - матрица жесткости элементов в локальной системе координат; $[T_\alpha]$ - матрица преобразований (направляющих косинусов) (см. 1.27 [1]); $[T_\alpha]^T$ - транспонированная матрица преобразований.

Анализируя выражение (4) и (2) можно записать

$$[K] = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot [T_\alpha]. \quad (5)$$

Для системы, состоящей из m узлов и n перемещений в каждом узле, получим матрицу жесткости $[K]$ порядка k , где $(k=m \cdot n)$, которая имеет вид

```

1i :=  $\begin{pmatrix} a_i \cdot 3 - 2 \\ a_i \cdot 3 - 1 \\ a_i \cdot 3 \end{pmatrix}$    j1i :=  $\begin{pmatrix} b_i \cdot 3 - 2 \\ b_i \cdot 3 - 1 \\ b_i \cdot 3 \end{pmatrix}$    i2i :=  $\begin{pmatrix} a_i \cdot 3 - 2 \\ a_i \cdot 3 - 1 \\ a_i \cdot 3 \end{pmatrix}$    j2i :=  $\begin{pmatrix} b_i \cdot 3 - 2 \\ b_i \cdot 3 - 1 \\ b_i \cdot 3 \end{pmatrix}$ 
:= 1..k   j := 1..k
K0i,j := 0
K' :=  $\left\{ \begin{array}{l} K \leftarrow 0 \\ s \leftarrow 1 \\ \text{for } s \in 1..z \\ \quad Kb \leftarrow K0 \\ \quad iv \leftarrow 1 \\ \quad \text{for } iv \in 1..n \\ \quad \quad in \leftarrow 1 \\ \quad \quad \text{for } in \in 1..n \\ \quad \quad \quad Kb [(i1_s)_{iv}], [(i2_s)_{in}] \leftarrow (Km_s) \left[ \begin{array}{c} \overrightarrow{[(i1-h)_s]_{iv}} \\ \overrightarrow{[(i2-h)_s]_{in}} \end{array} \right] \\ \quad \quad \quad Kb [(j1_s)_{iv}], [(j2_s)_{in}] \leftarrow (Km_s) \left[ \begin{array}{c} \overrightarrow{[(j1-g)_s]_{iv}} \\ \overrightarrow{[(j2-g)_s]_{in}} \end{array} \right] \\ \quad \quad \quad Kb [(i1_s)_{iv}], [(j1_s)_{in}] \leftarrow (Km_s) \left[ \begin{array}{c} \overrightarrow{[(i1-h)_s]_{iv}} \\ \overrightarrow{[(j1-g)_s]_{in}} \end{array} \right] \\ \quad \quad \quad Kb [(j1_s)_{iv}], [(i1_s)_{in}] \leftarrow (Km_s) \left[ \begin{array}{c} \overrightarrow{[(j1-g)_s]_{iv}} \\ \overrightarrow{[(i1-h)_s]_{in}} \end{array} \right] \\ \quad \quad \quad in \leftarrow in + 1 \\ \quad \quad \quad iv \leftarrow iv + 1 \\ \quad \quad K_s \leftarrow Kb \\ \quad \quad s \leftarrow s + 1 \\ K \end{array} \right.$ 

```

Рис. 4. Фрагмент программы в командах MathCAD для формирования матрицы $[K]$.

$$[K] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{k1} & A_{k2} & A_{k3} & \dots & A_{kk} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

При наличии матрицы жесткости системы из (2) вектор перемещений в глобальной системе координат будет определен по выражению

$$\{\Delta\} = [K]^{-1} \cdot \{r\}. \quad (7)$$

3. Построение матрицы жесткости системы в MathCAD. Покажем порядок построения матрицы жесткости системы $[K]$ через матрицы жесткости конечных элементов

$[K_s]$, которые для расчетной дискретной модели s -го элемента имеют следующую блочную структуру

$$[K_s] = \begin{bmatrix} A_{aa}^s & A_{ab}^s \\ A_{ba}^s & A_{bb}^s \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Здесь A_{aa}^s (A_{bb}^s) – блок реакций в a -м (b -м) конце s -го элемента, описывающий связь с перемещениями a -го (b -го) узла. A_{ab}^s (A_{ba}^s) – блок реакций в a -м (b -м) конце s -го элемента, описывающий связь с перемещениями b -го (a -го) узла.

Для плоской стержневой системы с жестким сопряжением стержней в узлах размер этих блоков равен 3×3 по числу независимых перемещений в узле (см. рис. 2). Для стержней с другими условиями закрепления размер этих блоков так же принят 3×3 , но при этом в строки и столбцы, соответствующие отсутствующему перемещению, записываются нули.

Сложность автоматического формирования матрицы жесткости системы на ПК состоит в том, что если в узле сойдется несколько элементов, то на местах, соответствующих

этому узлу должна стоять сумма соответствующих блоков матриц жесткости отдельных стержней, сходящихся в этом узле. Такой алгоритм дает наглядное представление о структуре матрицы $[K]$, однако трудно реализуем средствами программирования системы MathCAD.

Нами разработан и реализован в программе для MathCAD следующий алгоритм формирования матрицы $[K]$, не нарушающий принцип блочности, присущий матрице $[K_s]$:

3.1. Вычисляется z матриц $[K_m]$, учитывающих тип конечного элемента и z матриц преобразования $[T_a]$;

3.2. По исходной информации о геометрии системы строятся векторы $\{i1\}$ и $\{j1\}$, учитывающие связь номера КЭ с номерами его начала и конца соответственно, а также векторы $\{h\}$ и $\{g\}$, осуществляющие связь положения элементов матрицы $[K_s]$ с учетом его номера начала и конца соответственно и положением этих же элементов в матрице $[K']$ (см. рис. 4);

3.3. Формируется z матриц $[K']$ (6) порядка k ($k=m \cdot n$) с нулевыми блоками;

3.4. Для каждого КЭ системы нулевая матрица $[K']$ заполняется блоками матрицы $[K_m]$, с индексами, соответствующими выражению (8) (Порядок выполнения данной процедуры см. по тексту фрагмента программы, представленному на рис. 4);

3.5. Формируется матрица преобразований $[T_{afull}]$, для чего выполняются процедуры, аналогичные, изложенным в пп. 3.3 и 3.4;

3.6. Осуществляется перевод сформированных по п. 3.4. матриц $[K']$ из локальной системы координат в глобальную по выражению (5);

3.7. Теперь для того, чтобы получить матрицу жесткости системы $[K_{full}]$ в глобальной системе координат в виде (6), z матриц жесткости КЭ, полученные в п. 3.6, складываются;

3.8. Матрица жесткости $[K]$, учитывающая наличие опорных связей, формируется путем исключения из матрицы $[K_{full}]$ строк и столбцов, соответствующих нулевым перемещениям. Одновременно из вектора нагрузок $\{P_{full}\}$ путем исключения строк, соответствующих нулевым перемещениям, получают вектор $\{P\}$.

3.9. Сформированная матрица жесткости системы позволяет вычислить по выражению (7) вектор перемещений узлов системы $\{\Delta\}$.

3.10. Наличие z матриц $[T_{afull}]$, z матриц $[K']$ и вектора $\{\Delta_{full}\}$, восстановленного по вектору $\{\Delta\}$ до порядка k путем добавления необходимых нулевых строк, позволяют вычислить z векторов $\{r'_s\}$ внутренних усилий в узлах системы в локальной системе координат по формуле

$$\{r'_s\} = [K'_s] \cdot [T_{afull,s}] \cdot [\Delta_{full}] - \{P'_{qs}\}, \quad (s=1, \dots, z), \quad (9)$$

где $\{P'_{qs}\}$ - вектор реакций в узлах КЭ от нагрузки, действующей по длине КЭ.

4. Учет деформированной схемы равновесия. Повышенная деформативность балочно-вантовых систем определена особенностями их напряженно-деформированного состояния, изложенными в п. 1 настоящей работы. Суть этих особенностей в том, что хотя в физических уравнениях линейного расчета и учитываются деформации системы, но в нем внутренние силы и перемещения определялись по недеформированной схеме. В результате, в линейном расчете не могут быть учтены приращения внутренних сил, связанные с изменением геометрии

системы по отношению к ее исходному состоянию за счет деформаций ее стержней. В балочно-вантовых системах приращения внутренних сил за счет учета деформированной схемы могут оказаться соизмеримыми с полученными по недеформированной схеме. Так, в расчетных схемах балочно-вантовых систем, представленных на рис. 1, изгибающими моментами от продольных сжимающих сил пренебречь нельзя, так как они существенно влияют на устойчивость отдельных элементов системы. С учетом допущений, оговоренных в п. 1, нами предложена и реализована в программе на MathCAD следующая методика расчета по деформированной схеме способом последовательных приближений:

4.1. Выполняется расчет балочно-вантовой системы с учетом недеформированной схемы по МКЭ, изложенному в п. 3 настоящей работы, и определяются z векторов $\{r'_{s,0}\}$ согласно (9).

4.2. С учетом перемещений, полученных в результате расчета по недеформированному состоянию, корректируются координаты узлов конечно-элементной модели рассматриваемой системы, что ведет к корректировке матрицы жесткости системы $[K]$, матрицы преобразований $[T_a]$ и вектора узловых нагрузок $\{P\}$. Это определяет деформированное состояние первого приближения.

4.3. После корректировки геометрии первого приближения:
 ➤ Выполняется расчет по деформированному состоянию первого приближения с целью определения z векторов внутренних усилий в КЭ системы $\{r'_{s,1}\}$ и определяются z векторов приращений внутренних усилий первого приближения

$$\{\Delta r'_{s,1}\} = \{\Delta r'_{s,1}\} - \{\Delta r'_{s,0}\}. \quad (10)$$

➤ Выполняется расчет по деформированному состоянию первого приближения на приращения внутренних усилий $\{\Delta r'_{s,1}\}$, и с учетом полученных перемещений узлов согласно п. 4.2, корректируется состояние геометрии системы второго приближения.

4.4. По аналогии с вышесказанным для откорректированной геометрии i -го приближения:

➤ Выполняется расчет по деформированному состоянию i -го приближения с целью определения z векторов внутренних усилий в КЭ системы $\{r'_{s,i}\}$ и определяются z векторов приращений внутренних усилий i -го приближения

$$\{\Delta r'_{s,i}\} = \{\Delta r'_{s,i}\} - \{\Delta r'_{s,i-1}\}. \quad (11)$$

➤ Выполняется расчет по деформированному состоянию i -го приближения на приращения внутренних усилий $\{\Delta r'_{s,i}\}$, и с учетом полученных перемещений узлов согласно п. 4.2, корректируется состояние геометрии системы $(i+1)$ -го приближения.

И так до достижения требуемой точности.

Если стержням системы не грозит потеря устойчивости 2-го рода, то процесс сходится с достаточной степенью точности уже после трех итераций.

Для определения деформированного состояния стержней между узлами системы воспользуемся уравнениями в квадратах [4], [5], пригодными для произвольных функций поперечной нагрузки, которые после преобразований с учетом замены сплошной нагрузки i -го КЭ эквивалентной ей системой сосредоточенных сил P_{iq} с привязками их ξ к началу КЭ в местной системе координат, имеют нижеследующий вид.

Изгибающие моменты M_i в i -м гибком стержне системы

$$M_i = \begin{cases} \frac{r_i}{a_i} \sin(a_i x) - \frac{1}{a_i} \sum_{iq=1}^{n_x} P_{iq} [\sin a_i (x - \xi)] + \frac{M_i^a}{\sin(a_i l_i)} \sin[a_i (l_i - x)] + \frac{M_i^b}{\sin(a_i l_i)} \sin(a_i x), & \text{если } N_i < 0 \\ \frac{r_i}{a_i} \operatorname{sh}(a_i x) - \frac{1}{a_i} \sum_{iq=1}^{n_x} P_{iq} \operatorname{sh}[a_i (x - \xi)] + \frac{M_i^a}{\operatorname{sh}(a_i l_i)} \operatorname{sh}[a_i (l_i - x)] + \frac{M_i^b}{\operatorname{sh}(a_i l_i)} \operatorname{sh}(a_i x), & \text{если } N_i > 0, \end{cases} \quad (12)$$

где: $a_i = \sqrt{\frac{|N_i|}{E_i I_i}}$, $r_i = \begin{cases} \frac{1}{\sin(a_i l_i)} \sum_{iq=1}^{n_x} P_{iq} \sin[a_i (l_i - \xi)], & \text{если } N_i < 0 \\ \frac{1}{\operatorname{sh}(a_i l_i)} \sum_{iq=1}^{n_x} P_{iq} \operatorname{sh}[a_i (l_i - \xi)], & \text{если } N_i > 0, \end{cases}$ $0 \geq x \geq l_i$
 $0 \geq \xi \geq x$

Прогибы в гибком стержне

$$v_i = -\frac{1}{N_i} \left[\frac{1}{l_i} \left(\sum_{iq=1}^n P_{iq} (l_i - \xi) \right) \cdot x - \sum_{iq=1}^{n_x} P_{iq} (x - \xi) + M_i^a - \frac{M_i^a - M_i^b}{l_i} - M_i \right]. \quad (13)$$

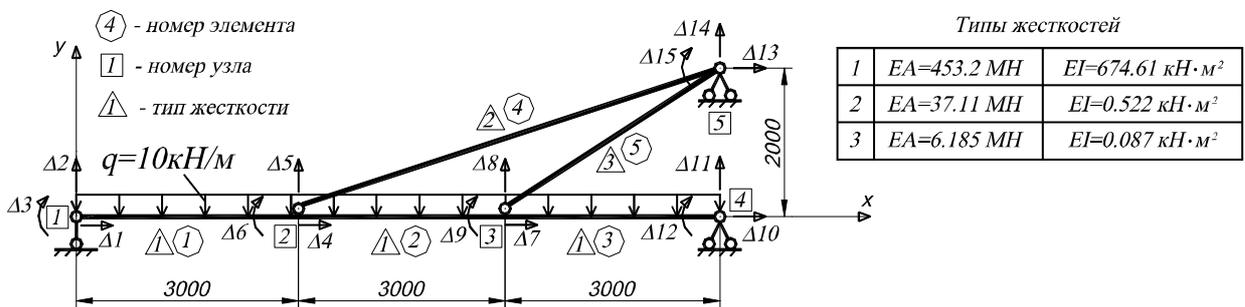


Рис. 5. Расчетная схема гибкой балочно-вантовой системы

Таблица 1. Расчет по недеформированной схеме

№ узла	Δ_x , см	Δ_y , см	φ , рад	№ эл-та	N_a , кН	Q_a , кН	M_a , кН·м	N_b , кН	Q_b , кН	M_b , кН·м
1	0.156	0.000	3.319	1	0.000	13.665	0.000	0.000	16.335	4.006
2	0.156	-5.846	0.875	2	94.668	15.221	-4.006	-94.668	14.779	3.345
3	0.093	-5.993	-0.826	3	141.01	16.115	-3.345	-141.01	13.885	0.000
4	0.000	0.000	-3.417	4	-99.789	0.000	0.000	99.789	0.000	0.000
5	0.000	0.000	0.000	5	-55.695	0.000	0.000	55.695	0.000	0.000

Таблица 2. Деформационный расчет

№ узла	Δ_x , см	Δ_y , см	φ , рад	№ эл-та	N_a , кН	Q_a , кН	M_a , кН·м	N_b , кН	Q_b , кН	M_b , кН·м
1	0.163	0.000	3.266	1	0.319	13.564	-0.000	-0.319	16.442	4.318
2	0.163	-5.824	0.960	2	93.622	15.614	-4.318	-93.622	14.379	2.465
3	0.100	-6.306	-0.799	3	141.80	15.820	-2.465	-141.80	14.176	0.000
4	0.000	0.000	-3.587	4	-98.341	0.000	0.000	98.341	0.000	0.000
5	0.000	0.000	0.000	5	-58.771	0.000	0.000	58.771	0.000	0.000

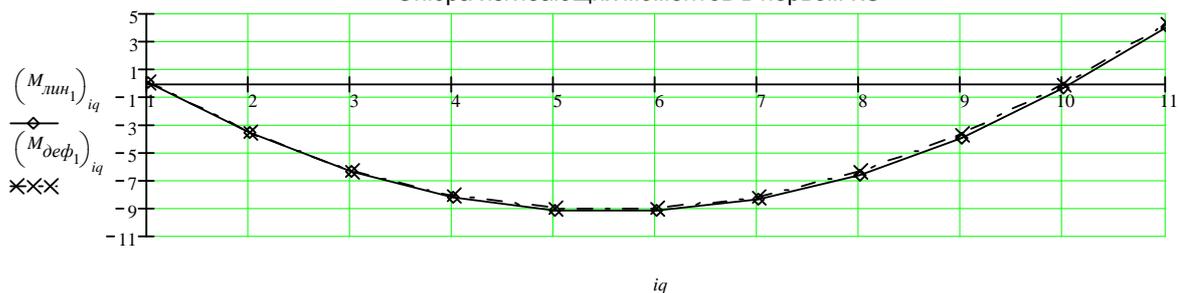
Момент в первом КЭ по недеформированной схеме:

$$M_{лин1}^T = (0 \ -3.651 \ -6.401 \ -8.252 \ -9.202 \ -9.251 \ -8.4 \ -6.649 \ -3.998 \ -0.446 \ 4.006) \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Момент в первом КЭ по деформированной схеме:

$$M_{деф1}^T = (0 \ -3.621 \ -6.342 \ -8.162 \ -9.081 \ -9.099 \ -8.217 \ -6.434 \ -3.751 \ -0.167 \ 4.318) \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эпюра изгибающих моментов в первом КЭ



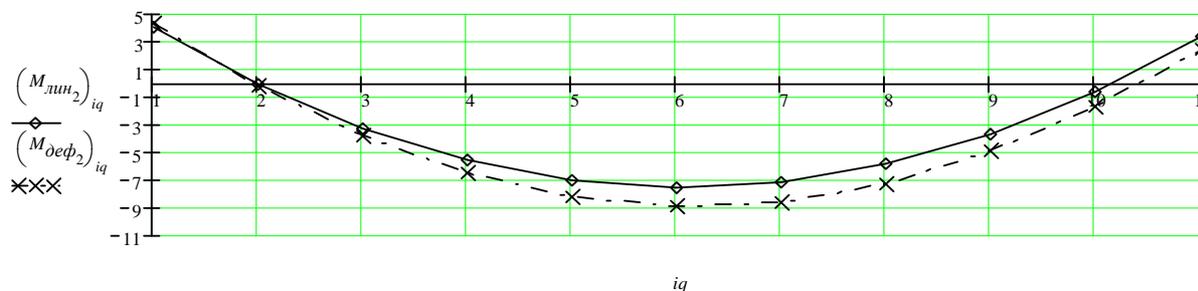
Момент во втором КЭ по недеформированной схеме:

$$M_{лин_2}^T = (4.006 \quad -0.108 \quad -3.323 \quad -5.638 \quad -7.054 \quad -7.57 \quad -7.186 \quad -5.903 \quad -3.72 \quad -0.638 \quad 3.345) \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Момент во втором КЭ по деформированной схеме:

$$M_{деф_2}^T = (4.318 \quad -0.214 \quad -3.843 \quad -6.526 \quad -8.227 \quad -8.928 \quad -8.617 \quad -7.3 \quad -4.993 \quad -1.724 \quad 2.465) \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эпюра изгибающих моментов во втором КЭ



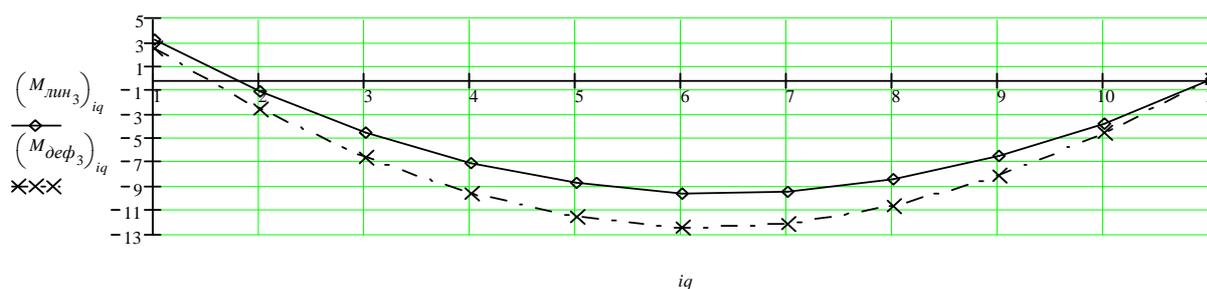
Момент в третьем КЭ по недеформированной схеме:

$$M_{лин_3}^T = (3.345 \quad -1.039 \quad -4.523 \quad -7.107 \quad -8.791 \quad -9.575 \quad -9.46 \quad -8.444 \quad -6.529 \quad -3.715 \quad 0) \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Момент в третьем КЭ по деформированной схеме:

$$M_{деф_3}^T = (2.465 \quad -2.537 \quad -6.592 \quad -9.623 \quad -11.574 \quad -12.406 \quad -12.106 \quad -10.678 \quad -8.149 \quad -4.567 \quad 0) \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Эпюра изгибающих моментов в третьем КЭ



Необходимость и эффективность расчета гибких балочно-вантовых систем по деформированной схеме продемонстрирована на примере расчета комбинированной системы, конечно-элементная модель для которой с нумерацией узлов, нумерацией КЭ с типами жесткости, а также геометрия системы и нагрузка, представлены на рис. 5.

Величины перемещений в узлах системы, полученные по недеформированной и деформированной схемам равновесия, представлены в табл. 1. и табл. 2. соответственно.

Анализ результатов расчета позволяет сделать вывод, что при расчете гибких балочно-вантовых систем необходим учет деформированной схемы равновесия. Так, в данном примере под действием *исходной нагрузки* величина максимального изгибающего момента в 3-м КЭ системы больше полученного по линейному расчету на 30%. В процессе численного эксперимента установлено, что при увеличении в данном примере *исходной нагрузки* на 25% изгибающий момент возрастает на 40%, при увеличении нагрузки в два раза изгибающий момент в сравнении с линейным расчетом возрастает до 80%. Таким образом, очевидна актуальность разработанного метода рас-

чета и необходимость учета геометрической нелинейности при расчете гибких балочно-вантовых систем.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александров А.В., Лашеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы /Под ред. А.Ф. Смирнова. –М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
2. Игнатюк В.И. Расчет плоских стержневых систем методом конечных элементов с использованием ЭВМ. Учебное издание. – Брест: БрПИ, 1990. – 43 с.
3. Перельмутер А.В. Основы расчета вантово-стержневых систем. – М.: Стройиздат, 1969. – 544 с.
4. Уласевич В.П. Расчет однопоясных распорных систем из гибких стержней по деформированной схеме. Изв. вузов. Строительство и архитектура, № 1, 1977. с. 38-45.
5. Уласевич В.П. Деформационный расчет и исследование напряженно-деформированных состояний пологих однопоясных распорных систем. Автореф. диссерт. – М.: ЦНИИСК им. Кучеренко, 1984. – 24 с.