

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Чирас А.А. Теория оптимизации в предельном анализе твердого деформируемого тела. – Вильнюс, Изд-во „Минтис“, 1971. – 124 с.
2. Каменярж Я.А. Предельный анализ тел и конструкций. – М., Наука. Физматлит, 1997. – 512 с.
3. Быковцев Г.И., Ивлев Д.Д. Теория пластичности. – Владивосток, Дальнаука, 1998. – 528 с.
4. Алявдин П.В. Несущая способность и оптимальное проектирование упругопластических конструкций/ Белорусский политехнический институт, Минск, 1990. - Деп. во ВНИ-ИНТПИ 14.10.90, № 10856. - 436 с.
5. Алявдин П.В. Приспособляемость элементов конструкций в общем случае нагружения // Теоретическая и прикладная механика, вып. 14, Минск: Выш. школа, 1987, с. 95-100.
6. Гохфельд Д.А., Чернявский О.Ф. Несущая способность конструкций при повторных нагружениях. Москва: Машиностроение, 1979. 263 с.
7. Gokhfeld D.A. and Cherniavsky O.F. Limit Analysis of Structures at Thermal Cycling. Sijthoff-Noordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands, 1980.
8. König J.A. Shakedown of Elastic-plastic Structures. PWN, Warszawa, Elsevier, Amsterdam, 1987. – 214 p.
9. Inelastic behaviour of structures under variable loads / ed. by Zenon Mroz ... //Zenon Mroz ; Dieter Weichert; Stanislaw Dorosz / Euromech Colloquium (298, 1992, Warszawa) / Solid mechanics and its applications : SMIA; 36: Kluwer Academic Publishers, 1995, XVII, 496 p.
10. Inelastic Analysis of Structure Under Variable Loads: Theory and Engineering Applications/ Ed. by D. Weichert, G. Maier. Kluwer Academic Publishers, 2000. (Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 83). - 380 p.
11. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.-Л., ГИТТЛ, 1949. – 784 с.
12. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. – 2-е изд. – М., Наука, 1987. - 360 с.
13. Ильюшин А.А. Конечное соотношение между силами и моментами и связь их с деформациями в теории оболочек // Прикладная математика и механика. - 1945. – Т. 9. – № 1. – С. 101-110.
14. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
15. Wojewódzki Wiesław. Nośność graniczna powłok. - Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2002. – 356 s.
16. Węzły i połączenia konstrukcyjne: projektowanie metodą nośności granicznej / red. Henryk Frąckiewicz, Warszawa : Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1985. – 372 s.
17. W. Szczepiński, J. Szalikowski. Projektowanie konstrukcji metodą granicznych pól naprężeń/ Biblioteka Mechaniki Stosowanej. – Warszawa-Poznań: PWN – Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985. – 334 s.
18. Алявдин П.В., Гариб Мохамед. Определение несущей способности конструкции с учетом изменения ее формы // Строительство и архитектура (Известия высш. учеб. завед.). – 1990. – № 8. – С. 114-117.
19. Aljawdin P., Werner F. Auswahl maßgebender Lastkombinationen für große Tragwerke // Bauingenieur, Band –72, Heft 7/8, Juli/Aug. 1997. - S. 355 – 361.
20. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. – М., Наука, 1971. – 352 с.
21. Kączkowski Zbigniew. Płyty – obliczenia statyczne, Wydawnictwo Arkady, Warszawa, 1980. = Кончковский З. Плиты: Статические расчеты. Перев. с польск.: – М., Стройиздат, 1984. – 484 с.
22. Dem'yanov V.F., Stavroulakis G.E., Polyakova L.N., Panagiotopoulos P.D. Quasidifferentiability and Nonsmooth Modelling in Mechanics, Engineering and Economics / Nonconvex Optimization and Its Applications. Vol. 10. – Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers, 1996. – 348 p.
23. Alyavdin P.V., Simbirkin V.N. Limit analysis of reinforced concrete cross-sections under cyclic loading // Statiba, 1999, T. V, Nr. 5. – Civil Engineering, 1999, Vol. V, No 5. – Vilnius, “Technika”, 1999. - P. 335-339.
24. Kuczma M.S., Stein E. Nonconvex problems in the theory of plasticity / Arch. Mech., 46, 1994, pp. 505-529.
25. L. Bousshine, A. Chaaba, G. De Saxce. A new approach to shakedown analysis for non-standard elastoplastic material by the bipotential / International Journal of Plasticity, Vol. 19, No. 5, May, 2003, pp. 583-598.
26. V.F. Demyanov. Quasidifferentiable optimization: Algorithms for QD functions. In: Encyclopedia of optimization. Editors C.A.Floudas, P.M.Pardalos / Kluwer Academic publishers. Dordrecht /Boston/London 2001, Vol. 4, pp. 458-464.
27. Mason Jayme. Methods of functional analysis for application in solid mechanics / Series: Studies In Applied Mechanics, Vol. 9, Amsterdam et al. Elsevier, 1985. - 392 p.
28. Polizzotto Castrenze, Borino Guido. Shakedown and steady-state responses of elastic-plastic solids in large displacements / Int. J. Solids Structures, Vol. 33, No. 23, 1996. pp. 3415-3437.

УДК 624.012.45: 666.972.07: 539.4

Алявдин П.В.

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СЕЧЕНИЙ ОБОЛОЧЕК. 2. ОДНОКРАТНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ СЕЧЕНИЙ

Введение

В данной работе на основе подхода автора (Статья-1) сформулирована и решена проблема прочности и несущей способности поперечных сечений однородных изотропных оболочек различной толщины (толстостенных, средней толщины и тонкостенных) при однократном нагружении, монотонно возрастающем во времени. Для данной проблемы представлены прямая и двойственная формулировки, а также обобщенная задача Лагранжа. Численно исследована прочность сечений стальных толстостенных оболочек. Полученные здесь результаты позволяют оценить многочисленные существующие решения для несущей способности тонких

оболочек при однократном нагружении (см. [1-4]), а также возможные новые решения для оболочек средней толщины [5]. Такой подход будет особенно важным для анизотропных пластин и оболочек из композитных материалов, рассчитываемых по уточненным теориям [6, 7], а также для анализа стыков и соединений стержневых или оболочечных элементов [8, 9].

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения несущей способности сплошных поперечных сечений как элемента оболочек при однократном нагружении. Оболочки выполнены из однородно-

го идеально пластического материала. Несущую способность элемента определяем на основе теории предельного равновесия. Геометрические нелинейные эффекты не учитываем.

Примем ортогональную систему координат $Oxyz$ (криволинейная система координат рассмотрена, например, в [5]). Учитываем, хотя это и не обязательно, только статические граничные условия на поверхности S_f , кинематические граничные условия не рассматриваем. Вектор напряжений σ содержит все шесть компонент, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, $\sigma \in R^6$, при $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, и задача для элемента не отличается от задачи для сплошного тела. Распределение напряжений σ_z по толщине оболочки считаем заданным; других предпосылок, в том числе гипотезы о плоских нормальных, не используем.

Вектор S усилий (внутренних сил) оболочки включает десять компонент: шесть сил (нормальных N_x, N_y , касательных или сдвигающих N_{xy}, N_{yx} и поперечных Q_x, Q_y) и четыре момента (изгибающих M_x, M_y и крутящих M_{xy}, M_{yx}) относительно соответствующих осей x, y сечения, $S = (N_x, M_x, M_{xy}, N_{xy}, Q_x, N_y, M_y, M_{yx}, N_{yx}, Q_y)$, $S \in R^{10}$.

2. Определяющие соотношения задачи

Примем, что оболочка подвергается однократному монотонно возрастающему нагружению, в результате вектор усилий S в сечении так же монотонно возрастает до некоторого предельного значения S^* .

Сформулируем исходную задачу для толстостенных оболочек. Вектор усилий оболочки $S = (N_x, M_x, M_{xy}, N_{xy}, Q_x, N_y, M_y, M_{yx}, N_{yx}, Q_y)$, $S \in R^{10}$, статически эквивалентен заданной плотности поверхностных f сил в сечениях с нормальными x, y . Вектор напряжений σ содержит все шесть компонент, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, $\sigma \in R^6$, при $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$. В этом случае многопараметрическая задача для сечения оболочки имеет такой же вид, как и для сплошного тела:

$$\left(\int_V t_g^T \cdot g dV + \int_{S_f} t_f^T \cdot f dS_f \right) \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\varphi(\sigma, K) \leq 0, \quad (2) \quad (1)$$

$$\varphi \sigma = g, \quad \forall x \in V, \quad (3)$$

$$\varphi_S \sigma^r = f, \quad \forall x \in S_f. \quad (4)$$

Здесь t_g, t_f – векторные поля весовых коэффициентов соответственно для плотности объемных (массовых) g и поверхностных f сил; $g(x), f(x) \in R^3$, $x := (x, y, z)$. Вектор $K \in R^{kf}$ включает в себя константы пластичности; его размерность kf , например, для материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию, $kf = 2$; для обычных материалов $kf = 1$.

Уравнения (1)₃, (1)₄ определяют равновесие напряжений σ и сил g, f в объеме элемента V и на поверхности сечения S_f оболочки; φ, φ_S – соответственно дифференциальный и алгебраический операторы этих уравнений.

Неизвестными в задаче (1) будут векторные поля объемных g и поверхностных f сил, а также векторное поле напряжений σ .

В дальнейшем решение задачи предельного равновесия оболочек рассматриваем на основе следующей (хотя и не обязательной) гипотезы для векторного поля напряжений σ :

$$\sigma_z = f_z(z), \quad (2)$$

где $f_z(z)$ – заданная функция, соответствующая задаче (1). Тогда вектор искомых напряжений будет $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$, $\sigma \in R^5$. Заметим, что для тонкостенных оболочек вместо условия (2) принимают $\sigma_z = 0$. Гипотезы о плоских нормальных здесь не используем.

Расчет оболочки сводим к анализу ее поперечного сечения, при этом никаких ограничений на очертание и характер нагружения оболочки не накладываем. Математически это означает, что задача (1) теории оптимального управления системой, состоянием которой описывается дифференциальными уравнениями в частных производных (1)₃ и алгебраическими уравнениями (1)₄, заменяется следующей (также многопараметрической) задачей бесконечномерного математического программирования:

$$T^T S \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\varphi(\sigma, K) \leq 0, \quad \forall z \in A, \quad (2) \quad (3)$$

$$\int_A \beta \cdot \sigma dA - S = 0, \quad (3)$$

$$S \geq 0. \quad (4)$$

Здесь T – вектор весовых коэффициентов для обобщенных усилий S , $T \in R^{10}$; вектор $x := z \in R^1$; $S_f := A = [-h/2; h/2]$; h – толщина оболочки. Объемные (массовые) силы g здесь исключены (их учет представлен в [10]).

В задаче (3) состояние системы описывается интегральными уравнениями равновесия (3)₃ с 10×5 -матрицей β . Эти уравнения в развернутой форме для сечений оболочки с нормальными x, y имеют соответственно вид: для нормальных N_x, N_y , касательных N_{xy}, N_{yx} и поперечных сил Q_x, Q_y

$$-N_x + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz = 0, \quad (4)$$

$$-N_y + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz = 0; \quad (5)$$

$$-N_{xy} + \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz = 0, \quad (6)$$

$$-N_{yx} + \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz = 0; \quad (7)$$

$$-Q_x + \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz = 0, \quad (8)$$

$$-Q_y + \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz = 0, \quad (9)$$

а также для изгибающих M_x, M_y и крутящих M_{xy}, M_{yx} моментов относительно соответствующих осей x, y

$$-M_x + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) z dz = 0, \quad (10)$$

$$-M_y + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) z dz = 0; \quad (11)$$

$$-M_{xy} + \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) z dz = 0, \quad (12)$$

$$\beta^T = \begin{bmatrix} 1 + \frac{z}{r_y} & (1 + \frac{z}{r_y})z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{z}{r_x} & (1 + \frac{z}{r_x})z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \frac{z}{r_y})z & 1 + \frac{z}{r_y} & 0 & 0 & 0 & (1 + \frac{z}{r_x})z & 1 + \frac{z}{r_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{z}{r_x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 + \frac{z}{r_y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

$$-M_{yx} + \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} (1 + \frac{z}{r_x}) z dz = 0. \quad (13)$$

Откуда транспонированная 10x5-матрица уравнений (3)₃ (14).

Если вектор обобщенных усилий S определяется с точностью до одного параметра F_0 , следует принять

$$S = F_0 \bar{S}, \quad (15)$$

где \bar{S} – значения вектора S при $F_0 = 1$, $\bar{S} \in R^{10}$. Параметр F_0 представляет собой коэффициент запаса действующих на сечение усилий по отношению к их предельным значениям.

Тогда целевая функция в задаче (3) будет следующей:

$$F_0 \rightarrow \max, \quad (16)$$

к ограничениям (3)₂, (3)₃ добавляется равенство (14), а вместо (3)₄ будет

$$F_0 \geq 0. \quad (17)$$

Практически важной будет другая однопараметрическая задача, в которой отыскивается некоторый (выбранный постановщиком) t -й компонент S_t вектора усилий S ,

$$S_t := \int_A \beta_t \cdot \sigma dA \rightarrow \max, \quad (18)$$

$$\varphi(\sigma, K) \leq 0, \quad \forall z \in A, \quad (19)$$

$$\int_A \beta_p \cdot \sigma dA - S_p = 0. \quad (20)$$

Остальные компоненты вектора усилий S , составляющие вектор S_p , известны, $S = (S_t, S_p)$. Здесь через β_t обозначен t -

я строка матрицы β (14); β_p - 9x5-матрица, $\beta = \begin{bmatrix} \beta_t \\ \beta_p \end{bmatrix}$.

Неизвестными в задаче (15)–(17), (3)₂, (3)₃ будут параметр F_0 и векторное поле напряжений $\sigma(z) \in R^5$; в задаче (18)–(20) – только поле $\sigma(z) \in R^5$.

Для пологих и сферических ($r_x = r_y$) оболочек, при $N_{xy} = N_{yx}$ и $M_{xy} = M_{yx}$, вектор усилий будет иметь меньшую размерность, $S = (N_x, M_x, M_{xy}, N_{xy}, Q_x, N_y, M_y, Q_y)$, $S \in R^8$. Тогда в матрице β^T в (14) необходимо исключить восьмой и девятый столбцы. Для пологих оболочек в уравнениях (3)₃ и (4) – (14) следует отбросить слагаемые, содержащие радиусы кривизны r_x, r_y . Полученные зависимости будут применимы также для пластин, работающих одновременно при изгибе и при плоском напряженном состоянии.

Задачи оптимизации (1), (3), (16) и (18) представляют собой статическую формулировку проблемы. Им можно придать энергетический смысл (см. Статью-1), при котором максимизируется мощность усилий в сечении оболочки.

Кинематическую формулировку проблемы можно получить путем построения двойственных задач оптимизации. Покажем это на примере задачи (18)–(20). Для нее функционал Лагранжа имеет вид:

$$L(\sigma, \lambda, \dot{u}_p) = \int_A \beta_t \cdot \sigma dA + \int_A \lambda \varphi(\sigma, K) dA + \dot{u}_p^T (\int_A \beta_p \cdot \sigma dA - S), \quad (21)$$

где $\lambda \in R^1$, $\dot{u}_p \in R^9$ – соответственно скалярное поле λ и вектор \dot{u}_p множителей Лагранжа; вектор \dot{u}_p имеет смысл скорости перемещений, двойственным усилиям S_p .

Тогда кинематическая формулировка проблемы (18)–(20) будет следующей

$$\int_A \left[\lambda \frac{\partial \varphi(\sigma, K)}{\partial \sigma} \right]^T \cdot \sigma dA + \int_A \lambda \varphi(\sigma, K) dA \rightarrow \min, \quad (22)$$

$$\beta_t^T + \beta_p^T \dot{u}_p - \lambda \frac{\partial \varphi(\sigma, K)}{\partial \sigma} = 0, \quad (23)$$

$$\lambda \geq 0 \quad \forall z \in A. \quad (24)$$

Обобщенная задача Лагранжа для проблем (18)–(20) и (22)–(24) примет вид:

$$\varphi(\sigma, K) \leq 0, \quad (25)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (26)$$

$$\lambda \varphi(\sigma, K) = 0, \quad (27)$$

$$\beta_t^T + \beta_p^T \dot{u}_p - \lambda \frac{\partial \varphi(\sigma, K)}{\partial \sigma} = 0, \quad \forall z \in A, \quad (28)$$

$$\int_A \beta_p \cdot \sigma dA - S_p = 0. \quad (29)$$

Если функция текучести в (19) в сформулированных выше задачах выпуклая, то для оптимального решения условие (19) превратится из неравенства в равенство для всего сечения; тогда получаем классические задачи оптимизации с ограничениями-равенствами. Если же функция текучести в (19) невыпуклая [11], то необходимо решать задачи математического программирования в функциональных пространствах [12].

Ниже в качестве неравенств (19) в задачах (1),..., (18) принято условие текучести Губера-Мизеса, записанное в системе координат $Oxuz$:

$$\varphi(\sigma, K) := (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) - k^2 \leq 0, \quad (30)$$

или в сокращенной записи $s_{ij}s_{ij} - 2k_1^2 \leq 0$, где $k^2 = 2f_y^2 \cdot f_y$ – предел текучести, $k_1 = f_y/\sqrt{3}$. Закон течения для условия (30) предполагаем ассоциированным.

3. Методы решения задач

1. Сведение к конечномерным задачам математического программирования изложено выше в Статье-1.

2. Решение бесконечномерных задач. В данной работе использован более простой и точный метод множителей Лагранжа, при этом решения получены аналитически или в квадратурах.

Покажем решение задачи (18)-(20). Здесь функция текучести в (30) выпуклая, поэтому для оптимального решения условие (30) превратится из неравенства в равенство. Тогда в обобщенной задаче Лагранжа останутся только уравнения (25), (28) и (29), первое уравнение также вместо неравенства, с неизвестными $\sigma \in R^5$, $\lambda \in R^1$, $\dot{u}_p \in R^9$.

Выразим из уравнения (28) вектор σ и подставим его в уравнения (25) и (29). Из этих десяти нелинейных алгебраических уравнений найдем искомые неизвестные λ , \dot{u}_p , а затем вектор σ и компонент S_i вектора усилий S .

Задачи (18)-(20) и (25), (28), (29) можно упростить, исключив из уравнения (25) одну из компонент σ_i вектора σ , $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. Тогда останутся только неизвестные $\sigma_p \in R^4$, $\dot{u}_p \in R^9$;

после исключения вектора σ_p из уравнения (28) останется решить девять нелинейных алгебраических уравнений (29) относительно скорости перемещений \dot{u}_p .

Отметим, что возможен обратный метод решения последней задачи, когда задается вектор скорости перемещений \dot{u}_p и отыскивается вектор усилий S_p . В этом случае решение нелинейных уравнений заменяется непосредственным интегрированием в (29).

Как для прямого, так и для обратного метода сложность заключается в выборе области определения вектора \dot{u}_p или начального приближения итерационного процесса; в общем случае эта область неединственная. Для выбора начального приближения вектора \dot{u}_p можно использовать численный подход (п. 3.1) или упрощенные расчетные модели оболочек [1-4], а также решения для сечений стержневых конструкций (Статья-1).

Дальнейшее упрощение задачи возможно на основе дополнительной гипотезы $\tau_{xz} = \tau_{xz}^e, \tau_{yz} = \tau_{yz}^e$, где τ_{xz}^e, τ_{yz}^e – известные „упругие“ касательные напряжения, получаемые для оболочки из идеально упругого материала. Тогда искомый вектор напряжений будет $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$, $\sigma \in R^3$.

Предложенный метод реализован в виде компьютерной программы.

4. Численные результаты

Оценим прочность (несущую способность) поперечных сечений стальной пологой толстостенной оболочки на основе задачи (18)-(20). Учитываем нормальные силы N_x, N_y , а также изгибающие M_x, M_y и крутящие $M_{xy} = M_{yx}$ моменты, $S = (N_x, M_x, M_{xy}, N_y, M_y)$, $S \in R^5$. В качестве неизвестного

выберем усилие M_{xy} , тогда заданным будет вектор $S_p = (N_x, M_x, N_y, M_y)$. Примем согласно с (2) напряжение $\sigma_z = 0$. Искомым будет вектор напряжений $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$, $\sigma \in R^3$, и вектор скорости перемещений $\dot{u}_p := (\varepsilon_x, u_x, \varepsilon_y, u_y)$. $\dot{u}_p \in R^4$, двойственным усилиям S_p .

Перейдем к относительным усилиям $n_x, m_x, m_{xy}, n_y, m_y$, где $n_x = N_x/N_{x0}, \dots, m_{xy} = M_{xy}/T_0, \dots, m_y = M_y/M_{y0}$. Здесь $N_{x0} = N_{y0} := N_0, M_{x0} = M_{y0} := M_0, T_0$ – предельные значения усилий (нормальных сил N_0 , изгибающих M_0 и крутящего T_0 моментов). Они вычисляются через предел текучести f_y и высоту сечения оболочки h ; в расчетах принято $f_y = 240$ МПа, $h = 0,2$ м.

Исключим из уравнения (25) с учетом (30) напряжение σ_x , а оставшийся вектор $\sigma_p = (\sigma_y, \tau_{xy})$ исключим из уравнения (28). Формулы для напряжений примут вид

$$\sigma_x = f_y T_0 [(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y)M_0 + (u_x + 2u_y)N_0 z + 3M_0 \sqrt{T_0^2 (\varepsilon_x M_0 + u_x N_0 z)^2}] / K$$

$$\sigma_y = 2f_y T_0 [(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y)M_0 + (u_x + 2u_y)N_0 z] / K; \quad (31)$$

$$\tau_{xy} = f_y N_0 M_0 z / K,$$

$$K = \sqrt{3} \sqrt{4(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2)M_0^2 T_0^2 + 4(u_x(2\varepsilon_x + \varepsilon_y) + u_x(\varepsilon_x + 2\varepsilon_y))M_0 N_0 T_0^2 z + N_0^2 (M_0^2 + 4(u_x^2 + u_x u_y + u_y^2)T_0^2)z^2}.$$

Подставив (31) в (29), получим четыре нелинейных алгебраических уравнений относительно скорости перемещений $(\varepsilon_x, u_x, \varepsilon_y, u_y)$.

На основе обратного метода в уравнениях (29) приняты следующие скорости перемещений:

$$\varepsilon_x = 0,07; \quad u_x = 0,57; \quad \varepsilon_y = 0,45; \quad u_y = 0,06,$$

откуда получены значения относительных нормальных сил и изгибающих моментов в сечениях оболочки

$$n_x = 0,159732; \quad m_x = 0,623578; \quad n_y = 0,552888; \quad m_y = 0,292573.$$

Выражения (31) позволяют построить эпюры напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, показанные на рис. 1 и 2 (эпюра σ_x на рис. 1 содержит только абсолютные значения напряжений). Положение нулевых точек на эпюрах напряжений σ_x, σ_y находим из формул (31)₁, (31)₂. Координаты этих точек равны соответственно $z := \eta_k = -0,00614035$; $z := \eta_k = -0,0702899$.

Крутящий момент в целевой функции (18) задачи с учетом полученных напряжений будет равным $m_{xy} = 0,765393$.

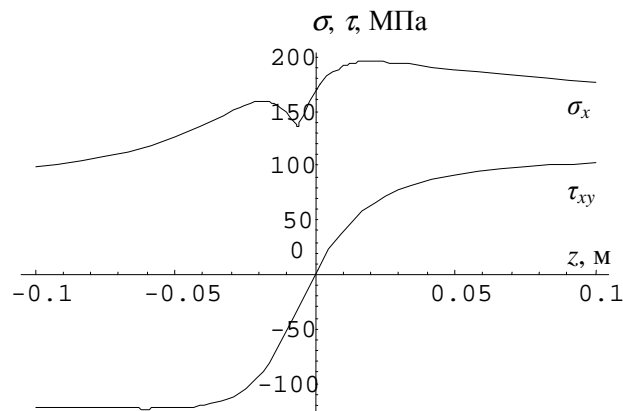


Рис. 1. Эпюры нормальных (по абсолютной величине) σ_x и касательных τ_{xy} напряжений в сечении x оболочки

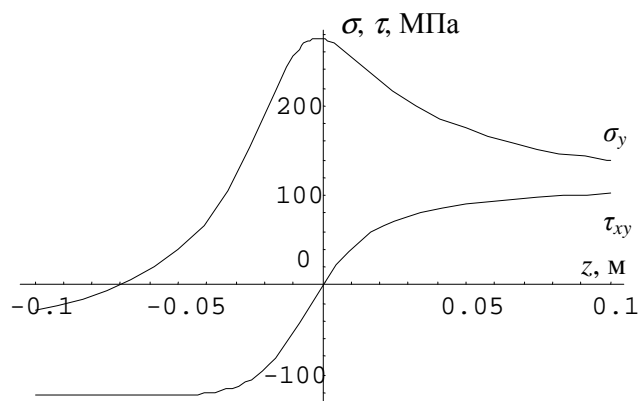


Рис. 2. Эпюры нормальных σ_y и касательных τ_{xy} напряжений в сечении у оболочки

Выводы

В данной работе решена проблема прочности и несущей способности поперечных сечений толстостенных оболочек при однократном нагружении. Сформулированы прямая и двойственная задачи оптимизации для выпуклых и невыпуклых условий текучести. Получены простые решения в виде формул и в квадратурах. На основе метода множителей Лагранжа численно исследована прочность сечений стальных толстостенных оболочек. Предложенные здесь подходы позволяют оценить решения для тонкостенных элементов; особый интерес эти результаты будут иметь для анизотропных пластин и оболочек из композитных материалов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – М., Физматгиз, 1963. – 635 с. = Timoshenko S., Woinowski-Krieger S. Theory of plates and shells. McGraw-Hill Book Company, N. York, 1959.
2. Ильюшин А.А. Конечное соотношение между силами и моментами и связь их с деформациями в теории оболочек // Прикладная математика и механика. – 1945. – Т. 9. – № 1. – С. 101-110.
3. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
4. Wojewódzki Wiesław. Nośność graniczna powłok. – Warszawa: Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2002. – 356 s.
5. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложения в технике. – М.-Л., ГИТТЛ, 1949. – 784 с.
6. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин: Прочность, устойчивость и колебания. – 2-е изд. – М., Наука, 1987. – 360 с.
7. Гениев Г.А., Курбатов А.С., Самедов Ф.А. Вопросы прочности и пластичности анизотропных материалов. – М., Интербук, 1993. – 187 с.
8. Węzły i połączenia konstrukcyjne: projektowanie metodą nośności granicznej / red. Henryk Frąckiewicz, Warszawa : Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, 1985. – 372 s.
9. Szczepiński W., Szalikowski J. Projektowanie konstrukcji metodą granicznych pól naprężeń/ Biblioteka Mechaniki Stosowanej. – Warszawa-Poznań: PWN – Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1985. – 334 s.
10. Кончковский З. Плиты: Статические расчеты / Перев. с польск. – М., Стройиздат, 1984. – 484 с.
11. Dem'yanov V.F., Stavroulakis G.E., Polyakova L.N., Panagiotopoulos P.D. Quasidifferentiability and Nonsmooth Modelling in Mechanics, Engineering and Economics / Nonconvex Optimization and Its Applications. Vol. 10. – Dordrecht/Boston/London, Kluwer Academic Publishers, 1996. – 348 p.
12. Mason Jayme. Methods of functional analysis for application in solid mechanics / Series: Studies In Applied Mechanics, Vol. 9, Amsterdam et al., Elsevier, 1985. – 392 p.

УДК 624.04

Уласевич В.П., Костюк О.В.

ДЕФОРМАЦИОННЫЙ РАСЧЕТ ГИБКИХ БАЛОЧНО-ВАНТОВЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СРЕДЕ MathCAD

При построении математических моделей конструктивных систем в виде расчетных схем и методов их решения наибольший интерес представляют подходы, пригодные для общего класса задач. Так принятый в свое время концепции о малости перемещений и подчиненности материала линейному закону деформирования позволили для расчетных схем большинства сооружений считать справедливой геометрическую тождественность загруженной системы с незагруженной. Использование этих концепций позволило создать классические методы линейной строительной механики (метод сил, метод перемещений, смешанный метод). Применение в расчетах матричного аппарата и современных средств вычислительной техники позволило сформулировать метод конечных элементов (МКЭ). Применительно к стержневым системам основные положения МКЭ изложены в работах [1, 2]. Наибольшее распространение МКЭ получил в форме метода

перемещений. Его достоинство – универсальность и возможность передать наиболее трудоемкую процедуру составления матрицы жесткости – ЭВМ. Как правило, реализация МКЭ на ЭВМ осуществляется на алгоритмических языках высокого уровня для современных компьютеров. Процедура эта сложная, трудоемкая и длительная. Эта трудоемкость еще более возрастает в связи с необходимостью разработки методик, учитывающих деформированные схемы равновесия. А потребность совершенствовать расчетные модели по-прежнему велика. В этой связи, в наиболее сложной ситуации оказываются те специалисты, которые разрабатывают новые методы расчета с целью построения математических моделей для выполнения численных экспериментов.

Уласевич Вячеслав Прокофьевич, к.т.н., профессор каф. строительных конструкций Брестского государственного технического университета.

Костюк Ольга Васильевна, аспирант каф. строительных конструкций Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.