Частоты исследовались для кольцевой пластинки типа: металл – полимер – металл. В качестве металла принимался дюралюминий, заполнитель – фторопласт. Соответствующие механические характеристики материалов приведены в [3].

Полученное в работе решение задачи о поперечных колебаниях кольцевой трехслойной пластинки, а также проведенное исследование частот собственных колебаний может быть использовано, например, при расчете панелей с иллюминаторами.

Литература

1. Старовойтов Э. И. Осесимметричные колебания круглой трехслойной пластинки, возбужденные тепловым ударом. // Изв. АН БССР. Сер. физ.-техн. наук - 1988, № 3, С. 3–10.
2. Громыко Ю. В. Собственные колебания пластины с отверстием. // Материалы молодежной научно-технической конференции вузов приграничных регионов славянских государств, 23-24 окт. 2001 г. – БГТУ: Брянск, 2002. – С. 9–15.
3. Старовойтов Э. И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. Гомель: БелГУТ, 2001. 344 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований РБ (проект Т04М–002).

ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВЕКТОРНЫХ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПРОПУЩЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Гурин А.С., БГУ, Минск

Введение

При анализе и моделировании динамических процессов, временных рядов в экономике, медицине, защите окружающей среды, а также при создании систем искусственного интеллекта задача прогнозирования является одной из часто встречающихся. Можно предложить ряд ее решений в том случае, если данные наблюдаются без "пропусков". Наличие же пропущенных наблюдений значительно усложняет поиск и реализацию оптимальных алгоритмов прогнозирования и исследование их свойств. Результаты решения этой проблемы представлены в настоящей статье для модели векторной авторегрессии наблюдаемых временных рядов на основе методов робастного статистического анализа данных [1, 2].

Математическая модель

Пусть наблюдаемый d-векторный $(d \geq 1)$ временной ряд $Y_t = (Y_{t1}, \ldots, Y_{td})' \in \mathbf{R}^d$ описывается моделью VAR(1) векторной авторегрессии первого порядка [3]:

$$Y_{t+1} = BY_t + U_{t+1},\ t \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

где $\mathbf{Z}$ – множество целых чисел, $B \in \mathbf{R}^{d \times d}$ – матрица коэффициентов авторегрессии, спектральный радиус которой $\lambda_0 = \lambda_0(B) < 1$, $\{U_t \in R^d : t \in Z\}$ – независимые в совокупности случайные векторы с нормальным распределением: $\mathcal{L}\{U_t\} = \mathcal{N}_d(0_d, \Sigma)$, $t \in \mathbf{Z}$. В наблюдениях $\{Y_t\}$ имеются “пропуски”. Шаблоном “пропусков” назовем последовательность двоичных векторов $O_t = (O_{ti})$, $t \in \mathbf{Z}$, где $O_{ti} = 1$, если Y_{ti} наблюдается, $O_{ti} = 0$, если Y_{ti} не наблюдается. Обозначим минимальный и максимальный моменты времени с наблюдаемыми компонентами: $t_- = \min\{t : \sum_{i=1}^{d} O_{ti} > 0\}$, $t_+ = \max\{t : \sum_{i=1}^{d} O_{ti} > 0\}$; без ограничения общности $t_- = 1$, $t_+ = T$. Отметим, что авторегрессионные модели AR(p), VAR(p) порядка p сводятся к VAR(1) изменением пространства наблюдений [3]. Задача состоит в построении статистических оценок модельных параметров B, Σ по наблюдаемому временному ряду $\{Y_t\}_{t=1,\ldots,T}$ с шаблоном “пропусков” $\{\mathrm{O}_t\}_{t=1,\ldots,T}$, построении прогнозов временного ряда (1) и исследовании их асимптотического поведения.

Оценки параметров, основанные на выборочных ковариациях

Сформулируем дополнительные предположения о шаблоне $\{\mathrm{O}_t\}$.

П1. При $T \to \infty$ число наблюдаемых пар компонент векторов в один и тот же и соседние моменты времени бесконечно увеличивается: $\sum_{t=1}^{T-k} \mathrm{O}_{t+k,i}\mathrm{O}_{tj} \to \infty$, $i, j \in \{1,\ldots,d\}$, $k \in \{0,1\}$.

П2. При $T \to \infty$ имеет место асимптотическое поведение шаблона $\{O_t\}$:

$$\sum_{t=1}^{T-k} \mathrm{O}_{t+k,i}\mathrm{O}_{tj} \big/ (T-k) \to \vartheta_{k,i,j} \in (0,1],$$

$$\sum_{t,t'=1}^{T-1} \mathrm{O}_{t+k,i}\mathrm{O}_{tj}\mathrm{O}_{t'+k',i'}\mathrm{O}_{t'j'}\delta_{t-t',\tau} \big/ (T-|\tau|-1) \to \tilde{\vartheta}_{\tau,k,k',i,j,i',j'} \in [0,1],$$

$\vartheta_{k,i,j}$ – предельная частота наблюдения пары компонент (i, j) в моменты времени, сдвинутые на k, $\tilde{\vartheta}_{\tau,k,k',i,j,i',j'}$ – предельная частота наблюдения пары (i, j) совместно с парой (i', j') в моменты времени, сдвинутые на $\tau + k - k'$ и τ единиц времени от первой пары, где $\tau \in \mathbf{Z}$, $i, j, i', j' \in \{1,\ldots,d\}$, $k, k' \in \{0,1\}$, $\delta_{a,b}$ – символ Кронеккера.

Обозначим ковариации: $g_{t-t',k,k',i,j,i',j'} = \mathrm{Cov}\{Y_{t+k,i}Y_{tj}, Y_{t'+k',i'}Y_{t'j'}\}$, $G_k = \mathrm{Cov}\{Y_{k+1}, Y_1\} \in R^{d\times d}$, $t, t' \in Z$, $i, j, i', j' \in \{1,\ldots,d\}$, $k, k' \in \{0,1\}$. Назовем

$$T_0 = \inf\left\{T' \in N : \min_{i,j\in\{1,\ldots,d\},k\in\{0,1\}} \sum_{t=1}^{T'-k} \mathrm{O}_{t+k,i}\mathrm{O}_{tj} > 0\right\}$$

критическим временем наблюдения для заданного шаблона $\{O_t\}$. Для $T \ge T_0$ определим предельные характеристики шаблона ($\tau \in Z$, $i, j, i', j' \in \{1,\ldots,d\}$, $k, k' \in \{0,1\}$):

$$C_{\tau,k,k',i,j,i',j'} = \tilde{\vartheta}_{\tau,k,k',i,j,i',j'} \big/ \left(\vartheta_{k,i,j}\vartheta_{k',i',j'}\right),$$

выборочные ковариации $\hat{G}_k = \left((\hat{G}_k)_{ij}\right)$:

$$(\hat{G}_k)_{ij} = \sum_{t=1}^{T-k} Y_{t+k,i}Y_{tj}\mathrm{O}_{t+k,i}\mathrm{O}_{tj} \Big/ \sum_{t=1}^{T-k} \mathrm{O}_{t+k,i}\mathrm{O}_{tj}, \qquad (2)$$

и при $|\hat{G}| \ne 0$ статистики, основанные на выборочных ковариациях (2):

$$\hat{B} = \hat{G}_1\hat{G}_0^{-1}, \ \hat{\Sigma} = \hat{G}_0 - \hat{G}_1\hat{G}_0^{-1}\hat{G}_1'. \qquad (3)$$

Состоятельность и асимптотическая нормальность оценок $\hat{B}, \hat{\Sigma}$

Теорема 1. Для модели (1) статистики (2) являются несмещенными оценками матриц G_k, $k \in \{0,1\}$: $E\{\hat{G}_k\} = G_k$. Если к тому же выполнено П1, то при $T \to \infty$ оценки (2) состоятельны в среднем квадратическом: $\hat{G}_k \xrightarrow{L_2} G_k$, а статистики (3) являются состоятельными (по вероятности) оценками параметров B, Σ: $\hat{B} \xrightarrow{P} B$, $\hat{\Sigma} \xrightarrow{P} \Sigma$.

Пусть последовательность случайных векторов $\xi_t = (\xi_{ti}) \in \mathbf{R}^d$ при $t \to \infty$ сходится по распределению к случайному вектору $\xi \in R^d$, имеющему ковариационную матрицу $\Sigma = (\Sigma_{ij}) = \mathrm{Cov}\{\xi, \xi\}$. Тогда асимптотическими ковариациями случайного вектора ξ_t будем называть ковариации случайного вектора ξ и обозначать: $\mathrm{aCov}\{\xi_{ti}, \xi_{tj}\} = \Sigma_{ij}$; аналогично определим асимптотические дисперсию и математическое ожидание: $\mathbf{aD}\{\xi_{ti}\} = \Sigma_{ii}$, $\mathbf{aE}\{\xi_t\} = \mathbf{E}\{\xi\}$, $i, j \in \{1, ..., d\}$.

Теорема 2. Если для модели (1) выполнено П2, то при $T \to \infty$ вектор, составленный из элементов матрицы $\sqrt{T}(\hat{B} - B)$, распределен асимптотически нормально с нулевыми математическими ожиданиями и ковариациями $(i, j, i', j' \in \{1, ..., d\})$:

$$\mathrm{aCov}\left\{\sqrt{T}(\hat{B}-B)_{ij}, \sqrt{T}(\hat{B}-B)_{i'j'}\right\} = \sum_{k,k'=0}^{1} \sum_{n,m,n',m'=1}^{d} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+k'} \left(B^{1-k}\right)_{in} \left(B^{1-k'}\right)_{i'n'} \times$$
$$g_{\tau,k,k',n,m,n',m'} C_{\tau,k,k',n,m,n',m'} \left(G_0^{-1}\right)_{mj} \left(G_0^{-1}\right)_{m'j'}.$$

Прогнозирование при известных параметрах и его риск

Определим конечное множество $M = \{(t,i), t \in \mathbf{Z}, i \in \{1, ..., d\} : O_{ti} = 1\}$; элементы этого множества лексикографически упорядочены в возрастающем порядке; $K = |M|$ – общее число регистрируемых компонент. Определим биекцию $M \leftrightarrow \{1, ..., K\} : k = \chi(t, i)$ и обратную функцию $(t, i) = \overline{\chi}(k)$. Составим K-вектор всех наблюдаемых компонент: $X = (X_1, ..., X_K)' \in \mathbf{R}^K$, $X_K = Y_{\overline{\chi}(k)}$, $k = 1, ..., K$.

Пусть $Y_{T+\tau} \in R^d$ – “будущий вектор”, который необходимо предсказать для глубины прогнозирования $\tau \geq 1$. Определим $(d \times d)$-матричный риск R и (скалярный) риск r прогнозирования: $R = E\left\{\left(\hat{Y}_{T+\tau} - Y_{T+\tau}\right)\left(\hat{Y}_{T+\tau} - Y_{T+\tau}\right)'\right\}$, $r = tr(R) \geq 0$. Обозначим ковариации: $F = \mathrm{cov}\{X, X\} \in R^{K \times K}$, $H = \mathrm{cov}\{X, Y_{T+\tau}\} \in R^{K \times d}$, $A_0 = A_0(B, \Sigma) = H'F^{-1} \in R^{d \times K}$.

Теорема 3. Если для модели (1) $|F| \neq 0$, то МП-прогноз и его риск имеют вид:

$$\hat{Y}_{T+\tau} = E\{Y_{T+\tau} \mid X\} = A_0 X, \; R = G_0 - H'F^{-1}H \geq 0, \; r = tr(G_0) - tr\left(F^{-1}HH'\right).$$

Литература

1. Харин Ю.С. Робастность в статистическом распознавании образов. – Минск: "Университетское", 1992, 225с.
2. KharinYu.S. Robustness in Statistical Pattern Recognition. – Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers, 1996, 302p.
3. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – Москва: "Мир", 1976, 755с.

ИЗГИБ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Доровская Е.П., БелГУТ, Гомель

Значительное распространение трехслойных конструкций во многих отраслях промышленности привело к необходимости разработки методов их расчета. В условиях деформации изгиба они оказываются наиболее рациональными.

Рассмотрена постановка задачи об изгибе несимметричной по толщине трехслойной пластины с жестким заполнителем, лежащей на упругом основании. Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол. Воздействие основания описывается моделью Винклера. Деформации считаем малыми.