РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ АНАЛИЗА УПРАВЛЯЕМОСТИ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ СИСТЕМ

Карпенко Ю. В., ГрГУ им. Я. Купалы, Гродно

Задачи, описываемые реальные физические процессы и протекающие различным образом в зависимости от конкретного воздействия на них управляющей стороны, рассматриваются в теории управления. Желанием выяснить, можно ли управлять конкретной системой для достижения заданных целей, если да, то какие усилия для этого потребуются, является проблема управляемости.

Пусть имеем стационарную систему вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\,, \tag{1}$$

где

$$x \in R^n, u \in R^r, A \in R^{n*n}, B \in R^{n*r}$$

Определение. Система (1) называется управляемой на отрезке T= [t_0, t_1], $t_1 > t_0$, если для любых векторов x_0, $x_1 \in R^n$ найдется такое управление u(t), при котором существует решение системы (1). [1]

Хорошо известны ранговые критерии управляемости Калмана, Хаутуса для управляемости линейных стационарных систем. В нашей работе мы будем пользоваться критерием Калмана [1]:

Для управляемости системы необходимо и достаточно, чтобы
rank K = n, где K = (B, AB,…, A^{n-1} B) .

В работе рассматривается проблема управляемости сингулярно возмущенной стационарной системы

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \tag{2}$$

$$\mu * \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u$$

где

$$x_1 \in R^{n1}, x_2 \in R^{n2}, u \in R^r, A_{11} \in R^{n1*n2}, A_{12} \in R^{n1*n2}, A_{22} \in R^{n2*n1}, A_{22} \in R^{n2*n2},$$

$$B_1 \in R^{n1*r}, B_2 \in R^{n2*r}, 0 < \mu < 1$$

Характерной особенностью сингулярно возмущенных систем (СВС) является то, что они описывают процессы, в которых присутствует так называемое явление «жесткости». Это явление состоит в том, что для описания процесса на интервале наблюдения надо использовать функции двух типов: на некоторых малых отрезках – быстро меняющиеся функции с большими производными (быстрые движения на участке погранслоя), а на остальной части – функции с малыми производными (медленные движения на области регулярного решения) [1].

Приведем систему (2) к виду

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u$$

$$\dot{x}_2 = \frac{A_{21}}{\mu}x_1 + \frac{A_{22}}{\mu}x_2 + \frac{B_2}{\mu}u$$

или

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ \dfrac{A_{21}}{\mu} & \dfrac{A_{22}}{\mu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}B_1\\ \dfrac{B_2}{\mu}\end{pmatrix}u$$

Тогда критерий управляемости (2) примет вид

$$\left[\begin{pmatrix}B_1\\ \dfrac{B_2}{\mu}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ \dfrac{A_{21}}{\mu} & \dfrac{A_{22}}{\mu}\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}B_1\\ \dfrac{B_2}{\mu}\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ \dfrac{A_{21}}{\mu} & \dfrac{A_{22}}{\mu}\end{pmatrix}^{n-1} * \begin{pmatrix}B_1\\ \dfrac{B_2}{\mu}\end{pmatrix}\right] \tag{3}$$

Элементы матрицы А могут различаться порядком, этой же особенностью могут обладать и элементы матрицы В. При составлении матрицы управляемости (3) в процессе умножения элементов будет накапливаться погрешность. И при вычислении ранга может возникнуть ошибка. Тогда непосредственно применять критерий Калмана для анализа управляемости может быть затруднительно.

Целью работы является разработка программных средств анализа управляемости сингулярно возмущенных систем.

Пусть у нас есть невырожденные матрицы, имеющие структуру

$lev = diag\left(\frac{1}{\mu}E_{n1} \quad E_{n2}\right)$ и $prav = diag\left(\mu E_m, \mu^2 E_m, \ldots, \mu^n E_m\right)$ причем $lev \in R_{n\times n}, prav \in R_{nr\times nr}$, E_k – единичная матрица размерности k*k. Умножим матрицу управляемости на матрицу lev слева и на матрицу prav справа. В результате получим матрицу

$$K' = K_0+\mu K_1+\ldots+\mu^{n-1}K_{n-1}, \tag{4}$$

где $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ матрицы, полученные из матриц А и В и не содержащие параметра μ.

Из теории матриц известно, что если матрицы $A\in R_{n*n}, B\in R_{n*m}, C\in R_{m*m}$ невырожденные, то rank AB = rank B = rank BP = rank ABP. В силу этого rank K = rank K`. Поэтому справедливо утверждение.

Для управляемости системы (2) необходимо и достаточно, чтобы

rank $K_0+\mu K_1+\ldots+\mu^{n-1}K_{n-1} = n$.

Если система (1) управляема, то при незначительных изменениях элементов системы она останется полностью управляемой. С другой стороны, если система (1) не является полностью управляемой, то всегда можно незначительно изменить ее элементы так, чтобы она стала управляемой [2].

Из предыдущего утверждения следует достаточное условие управляемости:

Если rank K_0 = n, то при достаточно малых $\mu\in(0, \mu^0)$ система будет управляемой.

В последнем утверждении фраза *при достаточно малых $\mu\in(0, \mu^0)$* имеет скорее качественный, чем количественный характер, поскольку словосочетание «достаточно малый» не имеет численного выражения. А нам важно знать, каким же малым должно быть возмущение, чтобы возмущенная система оставалась управляемой.

Определение. Мерой управляемости μ(A, B) системы (1) назовем наименьшее сингулярное число матрицы K.

Такой выбор меры обусловлен тем, что минимальное сингулярное число - это наименьшее возмущение сингулярных чисел (что непосредственно связано с возмущением матрицы), которое превращает невырожденную матрицу в вырожденную. В нашем случае для матрицы управляемости К это минимальное возмущение, которое может превратить ранг в неполный. Значит, можно говорить о том, что чем больше значение μ(A, B), тем более система управляема.

Если система (1) управляема, то при незначительных изменениях элементов системы она останется полностью управляемой. С другой стороны, если система (1) не является полностью управляемой, то всегда можно незначительно изменить ее элементы так, чтобы она стала управляемой [2].

В работе реализованы алгоритмы нахождения максимального значения μ^0, достаточного для управляемости системы (2), в среде MATLAB, т. к. именно в этой среде лучше работать с матрицами.

Литература

1. Афанасьев, Калмановский, Носов. Математическая теория конструирования систем управления – М.:Высш. шк.,1998. – 574с.
2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления / перевод с англ. Л. Л. Леонтьевой изд. - М.:Наука., 1972. - 576с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЛЯСКИ ПРОВОДОВ ВОЗДУШНЫХ ЛЭП

Климкович П. И., Дерюгина Е. А., БНТУ, Минск

Пляска – низкочастотный вид колебаний проводов, характеризующихся значительными амплитудами. Наиболее опасными являются однополуволновые пляски проводов, при которых амплитуды их колебаний и тяжения максимальны. Расчетной моделью провода является абсолютно гибкая, упругая, сопротивляющаяся кручению нить. Для проводов ЛЭП, имеющих относительную стрелу провеса менее 5 %, изменением тяжения вдоль пролета можно пренебречь [1]. Фактором, обусловливающим возбуждение и поддержание пляски проводов, является асимметричный гололедный осадок на них. Основные уравнения движения и кручения проводов с асимметричным гололедным осадком, могут быть получены с использованием принципа Даламбера [2]:

$$\frac{\partial^2 y_c}{\partial t^2}+\frac{\delta}{\rho}\cdot\frac{\partial y_c}{\partial t}-h\sin\theta_G\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-h\cos\theta_G\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{\rho}\left(T\frac{\partial^2 y_c}{\partial s^2}+P_y\right);$$

$$\frac{\partial^2 z_c}{\partial t^2}+\frac{\delta}{\rho}\cdot\frac{\partial z_c}{\partial t}+h\cos\theta_G\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-h\sin\theta_G\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2=\frac{1}{\rho}\left(T\frac{\partial^2 z_c}{\partial s^2}+P_z\right); \qquad (1)$$

$$\left(I_c+\rho h^2\right)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\rho h\left[\cos\theta_G\frac{\partial^2 z_c}{\partial t^2}-\sin\theta_G\frac{\partial^2 y_c}{\partial t^2}\right]+f_c\frac{\partial\theta}{\partial t}=GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial s^2}+M_a+M_\rho,$$

где y_c, z_c – проекции радиуса-вектора положения оси жесткости провода; θ – угол кручения провода; δ – коэффициент демпфирования колебаний; ρ – масса единицы длины провода после растяжения; $h[h_y, h_z]$ – эксцентриситет провода; $\theta_G=\theta_0+\theta$ (θ_0 – начальный угол оледенения провода); $\overline{P}$ – интенсивность внешней нагрузки на единицу длины провода; M_a – аэродинамический момент (АДМ) на единицу длины провода; T – мо-