Аналогично, система (10) распадается на два независимых (векторных) уравнения $\left(\Delta - k_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\overline{U_k'} = 0,\ (k = 1, 2)$. Что касается системы (точнее, пары уравнений) (11), то она ничем не отличается от случая упругой постановки.

Используя формулы [2], запишем выражения для действительной и мнимой части нормального перемещения поверхности упругого подпространства под движущейся нагрузкой

$$U_{1z} = \frac{4P(1-\nu)}{\pi^2 b}\int_0^\infty \frac{S_1(u)du}{E'u + \varepsilon_1 u^2(u^2 - \delta^2)S_1(u)},\ \text{где}\ S_1(u) = \frac{k^2}{1-\nu}\int_0^\infty \frac{D_1 \sin(u\tau)d\tau}{\tau\left[4D_2(D_1 - D_2)D_0^2 - k^4\right]},$$

$$D_0 = \sqrt{1+\tau^2},\ D_1 = \sqrt{1+\tau^2 - h_1^2},\ D_2 = \sqrt{1+\tau^2 - k_1^2},\ \varepsilon_1 = \frac{32(1-\nu^2)B}{\pi b^4},\ \delta = \frac{bc\sqrt{\rho_b}}{2\sqrt{B}}.$$

Таким образом, задача в наследственно-упругой постановке распалась на пару независимых задач, по виду совпадающих с задачей в упругой постановке. Поэтому формулы для перемещений, деформаций и напряжений, полученные в монографии [1], с некоторыми уточнениями применимы в нашем случае.

Литература

1. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем – М.: Машиностороение, 1970. – 734 с.
2. Чигарев А.В., Липень Б.И. Воздействие сосредоточенной нагрузки при движении на упругое полупространство при движении по его поверхности. – Мн.: Машиностроение, 1999, стр. 69-74. 3. Амензаде Ю.А. Теория упругости. – М.: Высш. Школа, 1976. – 272 с.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА БЕЗЫНЕРЦИОННОМ ОСНОВАНИИ

Леоненко Д. В., БелГУТ, Гомель

В монографии [1] исследованы нагружения трехслойных стержней, пластин и оболочек при локальных воздействиях. Здесь рассматриваются поперечные колебания несимметричного по толщине трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем, расположенного на упругом основании.

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. К внешней поверхности первого несущего слоя приложена динамическая поверхностная нагрузка $q(x, t)$. На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция основания $q_r(x,t)$ (рисунок 1). Через $w_k(x, t)$ и $u_k(x, t)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных линий несущих слоёв. Все перемещения и линейные размеры стержня отнесены к его длине l.

Перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ выражаются через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$:

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,x}; \quad w^{(1)} = w_1 \quad (c \le z \le c + h_1);$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,x}; \quad w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \le z \le -c);$$

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4}w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4}w_{2,x}\right);$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right) w_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right) w_2 \quad (-c \le z \le c).$$

Здесь z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной плоскости заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

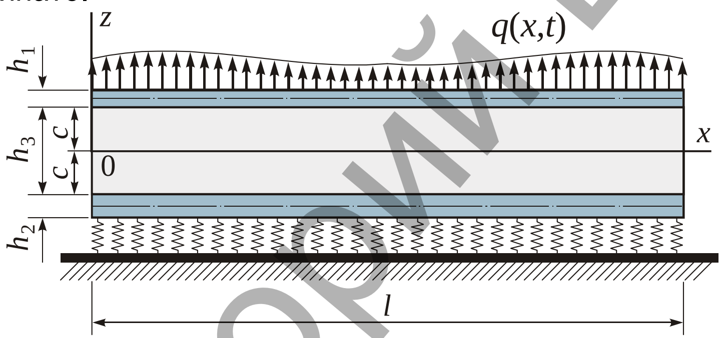

Рисунок 1. Трехслойный стержень со сжимаемым заполнителем

Уравнения движения рассматриваемого трехслойного стержня получим, используя вариационный принцип Лагранжа с учетом работы сил инерции

$$\delta A - \delta W = \delta A_I \tag{1}$$

где δA – вариация работы внешних сил; δW – вариация работы внутренних сил упругости; δA_I – вариация работы сил инерции.

После подстановки значений вариаций работ в (1) получим систему дифференциальных уравнений движения в частных производных:

$$a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 = 0;$$

$$-a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 = 0;$$

$$-a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + a_{15} w_{1,xxxx} - a_{16} w_{2,xxxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \ddot{w}_1 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} = q;$$

$$-a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - a_{16} w_{1,xxxx} + a_{13} w_{2,xxxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 + m_2 \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} = -q_r. \tag{2}$$

В качестве основания примем модель Винклера (Winkler E.) [2]. Учитывая, что стержень прикреплен к основанию, величина давления со стороны основания будет иметь вид

$$q_r = \kappa_0 w_2 \ .$$

Решение начально-краевой задачи (5) проводится методом Бубнова – Галеркина. Для этого искомые перемещения $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $w_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ и нагрузка $q(x, t)$ представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций:

$$u_1(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos\frac{\pi m x}{l} T_{m1}(t); \quad u_2(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos\frac{\pi m x}{l} T_{m2}(t);$$

$$w_1(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{\pi m x}{l} T_{m3}(t); \quad w_2(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{\pi m x}{l} T_{m4}(t);$$

$$q(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{\pi m x}{l} q_m(t), \quad q_m(t) = \frac{2}{l}\int_0^l q(x,t)\sin\frac{\pi m x}{l} dx .$$

В этом случае выполняются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные жесткие опоры.

Функции $T_{mk}(t)$ представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^{4} \delta_{mki}\zeta_{mi} \quad \left(\sum_{i=1}^{4} \delta_{mik}^2 = 1\right),$$

где δ_{mki} – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Выражение для функций $\zeta_{mi}(t)$ принимаются в виде

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi}\cos(\omega_{mi}t) + B_{mi}\sin(\omega_{mi}t) + \frac{1}{\omega_{mi}}\int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau))\tilde{q}_{mi}(\tau)d\tau ,$$

где ω_{mi} – частоты собственных колебаний стержня, A_{mi}, B_{mi} – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

Таким образом, построена математическая модель и решена задача о колебании трехслойного стержня на упругом безынерционном винклеровском основании.

Литература

1. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций.– Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 491 с.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Лигоцкий А. Л., БелГУТ, Гомель

В работе [1] исследован изгиб круглой изотропной трёхслойной пластины, деформирование прямоугольной изотропной пластины при различных граничных условиях. В [2] рассмотрено деформирование трёхслойного стержня с несжимаемым заполнителем при локальных нагрузках.

В данной работе рассмотрена несимметричная по толщине упругая трехслойная ортотропная прямоугольная пластина с жестким заполнителем. Систему координат *x, y, z*