В качестве основания примем модель Винклера (Winkler E.) [2]. Учитывая, что стержень прикреплен к основанию, величина давления со стороны основания будет иметь вид

$$q_r = \kappa_0 w_2 \ .$$

Решение начально-краевой задачи (5) проводится методом Бубнова – Галеркина. Для этого искомые перемещения $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $w_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ и нагрузка $q(x, t)$ представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций:

$$u_1(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos\frac{\pi m x}{l} T_{m1}(t); \quad u_2(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos\frac{\pi m x}{l} T_{m2}(t);$$

$$w_1(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{\pi m x}{l} T_{m3}(t); \quad w_2(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{\pi m x}{l} T_{m4}(t);$$

$$q(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin\frac{\pi m x}{l} q_m(t), \quad q_m(t) = \frac{2}{l}\int_0^l q(x, t) \sin\frac{\pi m x}{l} dx .$$

В этом случае выполняются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные жесткие опоры.

Функции $T_{mk}(t)$ представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^{4} \delta_{mki}\zeta_{mi} \quad \left(\sum_{i=1}^{4} \delta_{mik}^2 = 1\right),$$

где δ_{mki} – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Выражение для функций $\zeta_{mi}(t)$ принимаются в виде

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi}\cos(\omega_{mi} t) + B_{mi}\sin(\omega_{mi} t) + \frac{1}{\omega_{mi}}\int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau))\tilde{q}_{mi}(\tau) d\tau ,$$

где ω_{mi} – частоты собственных колебаний стержня, A_{mi}, B_{mi} – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

Таким образом, построена математическая модель и решена задача о колебании трехслойного стержня на упругом безынерционном винклеровском основании.

Литература

1. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагружения трехслойных элементов конструкций.– Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.
2. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты, оболочки на упругом основании. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 491 с.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Лигоцкий А. Л., БелГУТ, Гомель

В работе [1] исследован изгиб круглой изотропной трёхслойной пластины, деформирование прямоугольной изотропной пластины при различных граничных условиях. В [2] рассмотрено деформирование трёхслойного стержня с несжимаемым заполнителем при локальных нагрузках.

В данной работе рассмотрена несимметричная по толщине упругая трехслойная ортотропная прямоугольная пластина с жестким заполнителем. Систему координат *x, y, z* свяжем со срединной плоскостью заполнителя. Для описания кинематики пакета будем использовать *гипотезу «ломаной» нормали:* в тонких несущих слоях *1, 2* справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине сравнительно толстом заполнителе *3* нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол ψ, $\psi_x(x,y)$, $\psi_y(x,y)$ – проекции этого угла на плоскости *YOZ* и *XOZ* соответственно. Деформации считаем малыми.

На внешний слой стержня действует распределенная силовая нагрузка $p_x(x,y)$, $p_y(x,y)$, $q(x,y)$. Через $w(x,y)$ и $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ обозначим прогиб и продольное перемещение средней плоскости заполнителя. Так как материалы всех слоев несжимаемы в поперечном направлении, то прогиб в остальных точках стержня совпадает с $w(x,y)$. По контуру предполагаем наличие жестких диафрагм, препятствующих относительному сдвигу слоев, но не мешающих деформированию из своей плоскости.

Используя геометрические гипотезы, продольные перемещения в слоях выразим через пять искомых функций $w(x,y)$ и $u_x(x,y)$, $u_y(x,y)$ $\psi_x(x,y)$, $\psi_y(x,y)$.

Уравнения равновесия трёхслойной пластины в усилиях получим, используя принцип возможных перемещений Лагранжа:

$$\delta W = \delta A\,, \tag{1}$$

где $\delta W, \delta A$ – вариации работ внутренних напряжений и внешних сил.

При определении работы внешних сил считаем, что к серединной поверхности заполнителя приложены произвольные распределённые нагрузки, а по контуру пластины – распределённые по длинам сторон силы и моменты. Вариация работы внешней поверхностной нагрузки представима в виде ($dS=dx\,dy$):

$$\delta A_1 = \iint_S (p_x \delta u_x + p_y \delta u_y + q\delta w)dS$$

Вариация работы внешних сил и моментов по контуру:

$$\begin{aligned}\delta A_2 = &-\int_y (N_x^0 \delta u_x + Q_{xy}^0 \delta u_y - M_{xx}^0 \delta w,_x - M_{xy}^0 \delta w,_y + Q_{xx}^0 \delta w)dy + \\ &+ \int_x (N_y^0 \delta u_y + Q_{xy}^0 \delta u_x - M_{yy}^0 \delta w,_y - M_{xy}^0 \delta w,_x + Q_{yy}^0 \delta w)dx + \\ &+ \int_y (N_x^l \delta u_x + Q_{xy}^l \delta u_y - M_{xx}^l \delta w,_x - M_{xy}^l \delta w,_y + Q_{xx}^l \delta w)dy + \\ &+ \int_x (N_y^l \delta u_y + Q_{xy}^l \delta u_x - M_{yy}^l \delta w,_y - M_{xy}^l \delta w,_x + Q_{yy}^l \delta w)dx,\end{aligned}$$

где $N_i^0, Q_{ij}^0, M_{ij}^0, N_i^l, Q_{ij}^l, M_{ij}^l$ ($i, j = x, y$) – заданные силы и моменты, действующие по контуру пластины ($x = 0$, $x = l$, $y = 0$, $y = l$).

Таким образом, вариация работы суммарной приложенной нагрузки

$$\delta A = \delta A_1 + \delta A_2 .$$

Вариация сил упругости будет следующей:

$$\begin{aligned}\delta W = \sum_{k=1}^{3} \iiint_V \sigma_{ij}^{(k)} \delta\varepsilon_{ij}^{(k)} dV = \iint_S \sum_{k=1}^{3} \Big(\int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta\varepsilon_{xx}^{(k)} dz + \int_{h_k} \sigma_{yy}^{(k)} \delta\varepsilon_{yy}^{(k)} dz + \\ + 2\int_{h_k} \sigma_{xy}^{(k)} \delta\varepsilon_{xy}^{(k)} dz + 2\int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta\varepsilon_{xz}^{(3)} dz + 2\int_{h_3} \sigma_{yz}^{(3)} \delta\varepsilon_{yz}^{(3)} dz\Big)dS\end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений равновесия трёхслойной пластины в усилиях имеет вид:

$$\begin{cases} N_x,_x + Q_{xy},_y + p_x = 0; \\ N_y,_y + Q_{xy},_x + p_y = 0; \\ M_{xx},_{xx} + M_{yy},_{yy} + 2M_{xy},_{xy} + q = 0; \\ H_{xx},_x + H_{xy},_y - Q_{xx} = 0; \\ H_{yy},_y + H_{xy},_x - Q_{yy} = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

И силовые граничные условия:

$$x = 0:\ N_y = N_y^0; Q_{xy} = Q^0_{xy};\ Q_{yy} = Q^0_{yy}; M_{yy} = M^0_{yy};$$
$$M_{xy} = M^0_{xy}; H_{yy} = 0; H_{xy} = 0;$$
$$x = l_x:\ N_y = N_y^l; Q_{xy} = Q^l_{xy};\ Q_{yy} = Q^l_{yy}; M_{yy} = M^l_{yy};$$
$$M_{xy} = M^l_{xy}; H_{yy} = 0; H_{xy} = 0;$$
$$y = 0:\ N_x = N_x^0; Q_{xy} = Q^0_{xy};\ Q_{xx} = Q^0_{xx}; M_{xx} = M^0_{xx};$$
$$M_{xy} = M^0_{xy}; H_{xx} = 0; H_{xy} = 0;$$
$$y = l_y:\ N_x = N_x^l;\ Q_{xy} = Q^l_{xy};\ Q_{xx} = Q^l_{xx}; M_{xx} = M^l_{xx};$$
$$M_{xy} = M^l_{xy}; H_{xx} = 0; H_{xy} = 0.$$

Система дифференциальных уравнений равновесия трехслойной ортотропной прямоугольной пластины в перемещениях получается путём использования закона Гука и уравнений (1):

$$a_1u_x,_{yy} + a_2u_y,_{xy} + a_3u_x,_{xx} + a_4\psi_x,_{yy} + a_5\psi_y,_{xy} + a_6\psi_x,_{xx} - a_7w,_{xxx} - a_8w,_{xyy} + p_x = 0\,,$$
$$a_1u_y,_{xx} + a_9u_x,_{xy} + a_{10}u_y,_{yy} + a_4\psi_y,_{xx} + a_{11}\psi_x,_{xy} + a_{12}\psi_y,_{yy} - a_{13}w,_{yyy} - a_{14}w,_{xxy} + p_y = 0\,,$$
$$a_7u_x,_{xxx} + a_{13}u_y,_{yyy} + a_{15}u_x,_{xyy} + a_{16}u_y,_{xxy} + + a_{17}\psi_x,_{xxx} + a_{18}\psi_y,_{yyy} + a_{19}\psi_x,_{xyy} + a_{20}\psi_y,_{xxy} -$$
$$- a_{21}w,_{xxxx} - a_{22}w,_{yyyy} - a_{23}w,_{xxyy} + q = 0\,,$$
$$a_6u_{x,xx} + a_5u_{y,xy} + a_4u_{x,yy} + a_{24}\psi_{x,xx} + a_{25}\psi_{y,xy} +$$
$$+ a_{30}\psi_{x,yy} - a_{26}w_{,xyy} - a_{27}w_{,xxx} - G^{(3)}_{xz}c\psi_x = 0\,,$$
$$a_{12}u_y,_{yy} + a_{11}u_x,_{xy} + a_4u_y,_{xx} + a_{28}\psi_y,_{yy} +$$
$$+ a_{29}\psi_x,_{xy} + a_{30}\psi_y,_{xx} - a_{31}w,_{yxx} - a_{32}w,_{yyy} - G^{(3)}_{yz}c\psi_y = 0\,,$$

где коэффициенты a_k определяются геометрическими параметрами пластины и упругими параметрами материалов несущих слоёв. Таким образом, добавив к уравнениям (5) граничные условия в перемещения, замкнём задачу об изгибе трёхслойной ортотропной пластины.

Литература

1. Старовойтов Э.И. Основы теории упругости, пластичности и вязкоупругости. –Гомель: БелГУТ, 2001. – 344 с.
2. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагружения трёхслойных элементов конструкций. – Гомель: БелГУТ, 2003. – 367 с.