СИНТЕЗ ЗАКОНА УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СМЕСИТЕЛЬНОГО БАКА

Марфин А. В., Калашников А. П., БГТУ, Минск

Рассмотрим смесительный бак с площадью поперечного сечения A_c. Горячий входной поток характеризуется температурой T_H и регулируемым расходом F_H; холодный входной поток - T_c и F_c; возмущением является поток, поступающий из другого аппарата и характеризуемый переменными температурой T_d и расходом F_d. В баке происходит полное перемешивание; выход зависит от высоты жидкости в баке: $F(h) = K\sqrt{h}$.

Зададимся следующими численными значениями:

$A_c = 50 m^2$, $T_H = 363K$, $F_H = 0.4\frac{m^3}{c}$, $T_c = 283K$, $F_c = 0.4\frac{m^3}{c}$, $T_d = 293K$, $F_d = 0.2\frac{m^3}{c}$, $K = 2$

Модель процесса получается из уравнений материального и энергетического балансов в дифференциальной форме[1]:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{Ac}\cdot\left(F_H + F_C + F_d - F(h)\right),$$
$$\frac{d(hT)}{dt} = \frac{1}{Ac}\cdot\left(F_H\cdot T_H + F_C\cdot T_C + F_d\cdot T_d - F(h)\cdot T\right) \tag{1}$$

Эта модель нелинейная, но её можно линеаризовать в окрестности желаемого режима [1] и линеаризованная модель будет иметь вид:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{1}{A_c}\cdot\left[u_1(t) + u_2(t) + d_1(t) - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{F(h_s)}{h_s}\cdot x_1(t)\right],$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{1}{A_c h_s}\cdot\left[(T_H - T_s)u_1(t) + (T_C - T_s)u_2(t) + (T_{ds} - T_s)d_1(t) + F_{ds}d_2(t) - F(h_s)x_2(t)\right]. \tag{2}$$

Если ввести теперь векторы: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$

и матрицы: $A = \begin{pmatrix} -0.00667 & 0 \\ 0 & -0.013 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.02 \\ 0.181 & 0.002889 \end{pmatrix}$, $\Gamma = \begin{bmatrix} 0.02 & 0 \\ -0.04 & 0.0003 \end{bmatrix}$

систему (2) можно записать в векторно-матричной форме

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Gamma d(t), t \geq t_0, x(t) \in R_2, u(t) \in R_2, d(t) \in R_2, x(t_0) = x_0$$
$$y(t) = Cx(t), y(t) \in R_2,$$

Компенсация возмущающих воздействий

Введем компенсирующее устройство.

$u`(t) = u(t) - K\cdot d(t)$,

где K матрица компенсатора, тогда уравнение

$\dot{x}(t) = A\cdot x(t) + B\cdot u`(t) + \Gamma\cdot d(t)$, примет следующий вид:

$\dot{x}(t) = A\cdot x(t) + B\cdot u(t) - B\cdot K\cdot d(t) + \Gamma\cdot d(t)$

Для того, чтобы исключить влияние d(t), нужно чтобы

$$K = \begin{bmatrix} -0.241 & 0.001688 \\ 1.241 & -0.001668 \end{bmatrix} \tag{3}$$

получаем:

$$\dot{x}(t) = A\cdot x(t) + B\cdot u(t). \tag{4}$$

Нахождение закона управления

Линейная система называется *управляемой в момент времени* t_1,если каждое событие (t_0, x_0), где t_0 фиксировано, может быть переведено с помощью управления $u(t)$ в любое наперед заданное состояние $x_1 \in X$.

Проверим условие полной управляемости системы (4), для чего найдем матрицу управляемости [2] P:

$$P = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.02 & -0.0001333 & -0.0001333 \\ 0.181 & 0.002889 & -0.0002409 & -0.00003852 \end{pmatrix}$$

Ранг матрицы P равен 2, значит система является управляемой.

Найдём для нашей системы закон управления, который переводит систему из состояния x_0 при $t = t_0$ в состояние x_1, при $t = t_1 \geq t_0$.Где $x_0 = \begin{bmatrix} h_0 \\ T_0 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} h_1 \\ T_1 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 283 \end{bmatrix}$, $x_1 = \begin{bmatrix} 9 \\ 323 \end{bmatrix}$,

h_0- начальная высота жидкости в баке, T_0- начальная температура жидкости в баке (окружающей среды), h_1- конечная (желаемая) высота жидкости в баке, T_1- конечная температура жидкости в баке.

Управление будем искать по формуле: [2]

$$U(t) = -B'(t) \cdot \Phi'(t_0, t) \cdot x_*, \qquad (5)$$

где x_* удовлетворяет равенству:

$$W(t_0, t_1) \cdot x_* = x_0 - \Phi(t_0, t_1) \cdot x_1 \; ; \qquad (6)$$

откуда

$$x_* = W(t_0, t_1)^{-1} \cdot (x_0 - \Phi(t_0, t_1) \cdot x_1) \qquad (7)$$

$B(t)$ - матрица управления; $\Phi(t_0, t)$ - фундаментальная матрица системы,

$W(t_0, t_1) = \int_0^{t_1} \Phi(t_0, t) B(t) B'(t) \Phi(t_0, t) dt$ - область значений линейного преобразования, которой принадлежит вектор $x_0 - \Phi(t_0, t_1) x_1$ [2].

В конечном виде закон управления примет вид [2]:

$$U(t) = -B' \cdot \Phi'(t_0, t) \cdot W^{-1}(t_0, t_1) \cdot [x_0 - \Phi(t_0, t_1) \cdot x_1] \qquad (8)$$

Используя вычисление фундаментальной матрицы и ее обращение в среде Matlab, была составлена программа расчета программного управления. В частности, было получено управление по двум каналам

$U_1(t) = -3.31 \cdot e^{0.00667 \cdot t} + 1.4644 \cdot e^{0.0133 \cdot t}$,

$U_2(t) = -3.31 \cdot e^{0.00667 \cdot t} + 0.0234 \cdot e^{0.0133 \cdot t}$ соответственно.

Проверка показала, что система попадает в заданное конечное состояние.

Литература

1. Рей У., Методы управления технологическими процессами: Пер. с англ. - М.: Мир, 1983.-386 с., ил.
2. Андреев Ю.Н., Управление конечномерными линейными объектами. - М.: Наука, 1976, 424 стр.
3. Дьяконов В.П., MATLAB 6/6.1/6.5+SIMULINK4/5 в математике и моделировании. Полное руководство пользователя. - М.: СОЛОН-Пресс. – 2003.
4. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. -М.: «Наука», 1972.
5. Филипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001 – 616 с.: ил.