чи объектов материального учета, а именно – заполняются поля «дата операции», «оправдательный документ», «именование операции», «кто», «кому», «что» и «сколько». Отметим, что в рамках модели на примере кодирования документа и кодирования объектов отрабатывается методика двухуровневого кодирования объектов (вид документа, номер документа; вид объекта, код объекта).

Формирование специального промежуточного набора данных Книга счетов обусловлено тем, что классический Регистрационный журнал не приспособлен к использованию генераторов отчетов для формирования печатных форм с использованием уровней отчета. Для использования генераторов отчетов необходима фиксация поля выборки по условию (поле уровня отчета) и фиксация поля суммирования по признаку «только увеличение» и «только уменьшение». Отметим, что формирование Книги счетов является классической реализацией метода объектного учета движения материальных ценностей, называемого «двойная запись». Формирование записей по методу «двойная запись» в Книге счетов выполняется следующим образом: из записи {дата, операция, кто, кому, что, сколько} формируются две записи {дата, операция, кто (агент), кому (контрагент), что, 0, сколько (расход)} и {дата, операция, кому (агент), кто (контрагент), что, сколько (приход), 0}. Данная процедура позволяет выделить поля уровней отчета (агент, контагент) и поля суммирования по уровням отчета (приход, расход). Из Книги счетов с помощью классических: выборки, сортировки, суммирования по уровням отчета легко формируются списковые и итоговые отчетные формы. Отметим, что в рамках нашей модели можно отработать эти процедуры с использованием классических языков программирования с целью разъяснения принципов работы генераторов отчетов.

Для формирования развернутых и итоговых отчетных форм используется классический механизм использования запросов с использованием Управляющего набора данных для задания фильтров и при описании выходных форм с помощью шаблонов формирования отчетных форм.

То есть в рамках предлагаемой модели легко отрабатываются типовые схемы обработки данных, а именно:

- классическое сопровождение картотеки (добавить, удалить, изменить и позиционировать карточку);
- классический просмотр картотеки (посмотреть и позиционировать карточку);
- классическое сопровождение набора управляющих данных;
- установить поле в текущей карточке с использованием выборки данных из другой картотеки (использование справочников);
- создать или изменить карточку в другой картотеке на основании данных текущей карточки (разноска данных);
- создать программно на основании картотеки или картотек новую картотеку (формирование или преобразование картотек базы данных);
- создать на основании картотеки и управляющего набора линейную отчетную форму с использованием выборки по фильтру с использованием управляющего набора данных, сортировки рабочего набора по указанным полям и формированием списковой отчетной формы;
- создать на основании картотеки и управляющего набора итоговую отчетную форму с использованием выборки по фильтру с использованием управляющего набора данных, сортировки рабочего набора по указанным полям и формированием итоговой отчетной формы.

Отметим тот факт, что на базе вышеуказанных типовых элементов работы с базами данных можно разрабатывать системы обработки данных практически любой сложности и прикладной направленности.

Заключение. Использование вышеуказанной модели классической документарной передачи материальных ценностей при обучении студентов технических специальностей в курсах, связанных с изучением технологий использования баз данных, позволит приблизить учебный процесс к сложившимся производственным информационным технологиям и обеспечить более качественный уровень подготовки специалистов.

Материал поступил в редакцию 29.10.11

MUKHOV S.V., MURAVJOV G.L., SAVITSKY Yu.V. Use of classical model of material assets transfers for databases skill building

In this article we propose to use the classical model of material assets transfer in teaching technical students databases. This model allows you to make almost all standard data processing procedures at the scope of activity of future masters and heads of technical departments.

УДК 551.492

Волчек А.А., Гладкий И.И., Махнист Л.П., Рубанов В.С.

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ДИФФУЗИОННОЙ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ГИДРОЛОГИИ

Введение. Рассмотрим марковский процесс для описания колебаний речного стока, используемый в стохастической гидрологии.

Пусть $\overline{V}$ – среднегодовой расход воды, а V_t – расход воды в момент времени t. Тогда, полагая $X_t = (V_t - \overline{V}) / \overline{V}$, процесс многолетних колебаний стока можно описать с помощью стационарного решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Орнштейна–Уленбека с непрерывным временем [1]:

$$dX_t = -kX_t dt + \sigma dW_t , \qquad (1)$$

где W_t – стандартный винеровский процесс (так что $\dfrac{dW_t}{dt} = W_t'$ – обобщенный случайный процесс белого шума с параметром $\sigma = C_V \sqrt{2k}$), C_V – коэффициент вариации, k^{-1} – время релаксации речного стока.

Орнштейна–Уленбека процесс является однородным по времени марковским процессом диффузионного типа с коэффициентом сноса $a(t,x) = -kx$ и диффузии $\sigma(t,x) = \sigma^2$, переходная плотность вероятности $p(t, x, y)$ которого является фундаментальным решением соответствующего уравнения Фоккера–Планка (т.е. пря-

***Волчек Александр Александрович**, д.г.н., профессор, декан факультета водоснабжения и гидромелиорации Брестского государственного технического университета.*

***Гладкий Иван Иванович**, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*

***Махнист Леонид Петрович**, к.т.н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики Брестского государственного технического университета.*

***Рубанов Владимир Степанович**, к.ф.-м.н., доцент, проректор по научной работе Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

мого уравнения Колмогорова) вида

$$\frac{\partial p}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial y}(yp) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2},$$

где коэффициент k определяется по формуле $k = -\ln r$, так как автокорреляционная функция колебаний стока имеет вид $e^{-k\tau}$, а r – коэффициент автокорреляции годового стока.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ сток равен x, а x_* – некоторое фиксированное значение стока. Выясним, за какой промежуток времени значение V будет находиться в полуинтервале $[x_*, \infty)$ при условии, что $x \in [x_*, +\infty)$. Решить эту задачу можно с помощью обратного уравнения Колмогорова. Так как случайные колебания стока, описываемые СДУ, однородны по времени, обратное уравнение Колмогорова для процесса (1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t,x,y) = -kx\frac{\partial}{\partial x}p(t,x,y) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 p(t,x,y)}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Пусть T – момент времени, в который значение V покинет промежуток $[x_*, +\infty)$. Тогда

$$prob(T \ge t) = G(t,x), G(t,x) = \int_{x_*}^{+\infty} p(t,x,y)dy.$$

Интегрируя (2) по y на интервале от x_* до $+\infty$, получаем

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = -kx\frac{\partial G(t,x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 G(t,x)}{\partial x^2}.$$

Учитывая условия отражения на бесконечности и поглощения в точке $x = x_*$, получим следующие краевые условия:

$$G(t,x)\big|_{x=x_*} = 0, \frac{\partial G(t,x)}{\partial x}\bigg|_{x=+\infty} = 0.$$

Так как функция $1 - G(t,x)$ является распределением случайной величины T, то моменты n-ого порядка времени достижения границы x_* определяются соотношениями

$$T_k = -\int_0^{+\infty} t^k \frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt = \int_0^{+\infty} kt^{k-1}G(t,x)dt.$$

Интегрируя по t на интервале от 0 до $+\infty$ соотношение

$$nt^{n-1}\frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = -kx\frac{\partial}{\partial x}\left(nt^{n-1}G(t,x)\right) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial}{\partial x^2}\left(nt^{n-1}G(t,x)\right)$$

и учитывая, что

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial G(t,x)}{\partial t}dt = G(+\infty,x) - G(0,x) = -1,$$

получаем следующие уравнения для T_1 и T_n:

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_1}{dx^2} - kx\frac{dT_1}{dx} = -1, \text{ при } \frac{dT_1}{dx}(+\infty) = 0,\ T_1(x)\big|_{x=x_*} = 0,$$

$$\frac{\sigma^2}{2}\frac{d^2T_n}{dx^2} - kx\frac{dT_n}{dx} = -nT_{n-1}, \text{ при } \frac{dT_n}{dx}(+\infty) = 0,\ T_n(x)\big|_{x=x_*} = 0.$$

Введя безразмерные величины

$$kT_1 = \theta_1,\ k^2T_2 = \theta_2,$$

$$x\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x}{C_V} = \xi,\ x_*\frac{\sqrt{2k}}{\sigma} = \frac{x_*}{C_V} = \xi_*,$$

приходим к системе для оценки математического ожидания T_1 и среднего квадратичного отклонения $\sqrt{T_2 - T_1^2}$:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \frac{d\theta_1}{d\xi}(+\infty) = 0, \theta_1(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0,$$
$$\frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} - \xi\frac{d\theta_2}{d\xi} = -2\theta_1, \frac{d\theta_2}{d\xi}(+\infty) = 0, \theta_2(\xi)\big|_{\xi=\xi_*} = 0. \quad (3)$$

Система (3), приведенная в [1], при решении различных прикладных задач, например, в [2], интегрировалась численными методами. В данной работе рассматриваются вопросы сходимости решения системы (1), записанного в виде степенных рядов [5]:

$$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*),$$

$\theta_2(\xi) = 2\left(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right)$, где

$$S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}, \quad (4)$$

$$S_2(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}}\left(\ln\left(2 - 2\left\{\frac{k-1}{2}\right\}\right) - \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\frac{1}{m - \left\{\frac{k}{2}\right\}}\right)\frac{(-1)^{k-1}\xi^k}{(k-1)!!k}, \quad (5)$$

а $[t]$ и $\{t\}$ – целая и дробная часть числа t соответственно.

Степенной ряд (4) получен в [3]. В [4] предложено теоретическое обоснование асимптотического поведения математического ожидания, рассматриваемого распределения вероятностей многолетних колебаний речного стока, широко используемого в практике гидрологических расчетов. Предлагаемая в [3] методика решения уравнений вида (3) обобщена на более широкий класс уравнений такого типа, для чего исследовались функции специального вида, связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией [6].

О сходимости решений уравнений модели. Исследуем решение $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$ на сходимость. Ряд $S_1(\xi)$ можно записать в виде

$$S_1(\xi) = A_1(\xi) - B_1(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} - ,$$
$$-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$$

где общие члены этих рядов $a_n^{(1)} = a_n^{(1)}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$ и $b_n^{(1)} = b_n^{(1)}(\xi) = \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям $a_{n+1}^{(1)} = \frac{(2n+1)\xi^2}{(2n+2)(2n+3)}a_n^{(1)}$,

$$a_0^{(1)} = \xi\sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad b_{n+1}^{(1)} = \frac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)}b_n^{(1)},$$

$b_0^{(1)} = \frac{\xi^2}{2}$. Эти соотношения можно использовать для вычисления значений частичных сумм рядов $A_1(\xi)$, $B_1(\xi)$.

Отметим некоторые свойства рядов $A_1(\xi)$, $B_1(\xi)$:

1. $a_n^{(1)}(\xi) > 0$, $b_n^{(1)}(\xi) > 0$, для любого $\xi > 0$, $a_n^{(1)}(0) = 0$, $b_n^{(1)}(0) = 0$,

2. $a_n^{(1)}(-\xi) = -a_n^{(1)}(\xi)$, $A_1(-\xi) = -A_1(\xi)$, $b_n^{(1)}(-\xi) = b_n^{(1)}(\xi)$, $B_1(-\xi) = B_1(\xi)$,

3. $S_1(\xi) + S_1(-\xi) = -2B_1(\xi)$,

$S_1(\xi) - S_1(-\xi) = 2A_1(\xi)$.

Исследуем на сходимость ряды $A_1(\xi)$, $B_1(\xi)$. Используя признак Д'Аламбера, имеем $\left|\frac{a_{n+1}^{(1)}}{a_n^{(1)}}\right| = \frac{\xi^2(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} < \frac{\xi^2}{2n+3} < q < 1$,

если $n > \frac{\xi^2}{2q} - 1{,}5$ и $\frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} = \frac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)} < \frac{\xi^2}{2n+4} < q < 1$,

если $n > \frac{\xi^2}{2q} - 2$.

Следовательно, для любого числа q, $0 < q < 1$, существует натуральное число, например, $n_0 = \left[\frac{\xi^2}{2q}\right]$, такое, что для любого $n \ge n_0$ выполняются неравенства $\left|\frac{a_{n+1}^{(1)}}{a_n^{(1)}}\right| < q$, $\frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} < q$.

Тогда остатки рядов $A_1(\xi)$, $B_1(\xi)$ удовлетворяют неравенствам: $\left|\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k^{(1)}\right| < \frac{\left|a_n^{(1)}\right|}{1-q}$, $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} b_k^{(1)} < \frac{b_n^{(1)}}{1-q}$ и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q.

Таким образом, значения рядов $A_1(\xi)$, $B_1(\xi)$, с заданной точностью $\varepsilon > 0$, можно получить, вычисляя n-ые частичные суммы этих рядов $A_n^{(1)}(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^{(1)}$, $B_n^{(1)}(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k^{(1)}$, если выполняются неравенства:

$$\left|a_n^{(1)}\right| < \varepsilon(1-q),\ b_n^{(1)} < \varepsilon(1-q), \text{ и } n \ge n_0 = \left[\frac{\xi^2}{2q}\right]. \quad (6)$$

Так, например, для $q = 0{,}5$ неравенства принимают вид: $\left|a_n^{(1)}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$, $b_n^{(1)} \le \frac{\varepsilon}{2}$, и $n \ge n_0 = \left[\xi^2\right]$.

Таким образом, точность 2ε вычисления значений $S_1(\xi)$ обеспечивается вычислением n-ых частичных сумм рядов $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^{(1)}(\xi)$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k^{(1)}(\xi)$ при выполнении условий (6), что гарантирует точность 4ε вычисления значения $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$.

Учитывая следствие формулы Стирлинга: $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} < n! < n^n\sqrt{2\pi n}\, e^{-n+\frac{1}{12n}}$, имеем

$$\left|\frac{a_n^{(1)}}{b_n^{(1)}}\right| = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n+1)!!(2n+2)}{|\xi|(2n)!!(2n+1)} = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n)!(2n+2)}{|\xi|2^{2n}(n!)^2} >$$

$$> \frac{\sqrt{\pi}}{|\xi|\sqrt{2}}\frac{(2n+2)(2n)^{2n}e^{-2n}2\sqrt{\pi n}}{2^{2n}n^{2n}2\pi n e^{-2n+\frac{1}{6n}}} = \frac{(n+1)\sqrt{2n}}{n e^{\frac{1}{6n}}|\xi|} > \frac{\sqrt{2n}}{e^{\frac{1}{6}}|\xi|} \ge 1,$$

если $n \ge \frac{\sqrt[3]{e}\,\xi^2}{2}$. Следовательно, для любого $n \ge n_0 = \left[\xi^2\right]$ выполняется неравенство $\left|a_n^{(1)}\right| > b_n^{(1)}$. Это неравенство позволяет упростить проверку условий (6) при вычислении n-ых частичных сумм рядов $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k^{(1)}(\xi)$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} b_k^{(1)}(\xi)$.

Исследуем решение $\theta_2(\xi) = 2\left(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi)\right)$, $S_2(\xi) = A_2(\xi) - B_2(\xi) =$

где

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\ln 2 - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} +$$

$$+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$$ на сходимость.

Общие члены этих рядов

$$a_n^{(2)} = a_n^{(2)}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\ln 2 - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1}\right)\frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$$

и $b_n^{(2)} = b_n^{(2)}(\xi) = \left(\sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{2m}\right)\frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ удовлетворяют соотношениям $a_n^{(2)} = c_n a_n^{(1)}$,

$$a_{n+1}^{(2)} = \frac{c_{n+1}(2n+1)\xi^2}{c_n(2n+2)(2n+3)}a_n^{(2)},$$

$$c_{n+1} = c_n - \frac{1}{2n+1},\ a_0^{(2)} = c_0\xi\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ c_0 = \ln 2 \text{ и}$$

$$b_n^{(2)} = d_n b_n^{(1)},\ b_{n+1}^{(2)} = \frac{d_{n+1}(2n+2)\xi^2}{d_n(2n+3)(2n+4)}b_n^{(2)},$$

$$d_{n+1} = d_n + \frac{1}{2n+2},\ b_1^{(2)} = d_1\frac{\xi^4}{12},\ d_1 = \frac{1}{2}.$$

Исследуем на сходимость ряды $A_2(\xi)$, $B_2(\xi)$.

Заметим, что

$$\left|\frac{c_{n+1}(2n+1)}{c_n(2n+2)}\right| = \frac{\left(|c_n| + \frac{1}{2n+1}\right)(2n+1)}{|c_n|(2n+2)} = 1 + \frac{1-|c_n|}{|c_n|(2n+2)} < 1$$

при $|c_n| = \sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{2m-1} - \ln 2 > 1$, что выполняется, если

$$n \ge 5 \text{ и } \frac{d_{n+1}(2n+2)}{d_n(2n+3)} = \frac{\left(d_n + \frac{1}{2n+2}\right)(2n+2)}{d_n(2n+3)} = 1 + \frac{1-d_n}{d_n(2n+3)} < 1$$

при $d_n = \sum\limits_{m=1}^{n}\frac{1}{2m} > 1$, что выполняется, если $n \ge 4$.

Используя признак Д'Аламбера, имеем

$$\left|\frac{a_{n+1}^{(2)}}{a_n^{(2)}}\right| = \left|\frac{c_{n+1}a_{n+1}^{(1)}}{c_n a_n^{(1)}}\right| = \frac{|c_{n+1}|\xi^2(2n+1)}{|c_n|(2n+2)(2n+3)} < \frac{\xi^2}{2n+3} < q < 1,$$

если $n \ge \max\left(\frac{\xi^2}{2q} - 1{,}5; 5\right)$ и

$$\frac{b_{n+1}^{(2)}}{b_n^{(2)}} = \frac{d_{n+1}b_{n+1}^{(1)}}{d_n b_n^{(1)}} = \frac{d_{n+1}(2n+2)\xi^2}{d_n(2n+3)(2n+4)} < \frac{\xi^2}{2n+4} < q < 1,$$

если $n > \max\left(\frac{\xi^2}{2q} - 2; 4\right)$.

Следовательно, существует такое число q, $0 < q < 1$, что, начиная с некоторого номера, например, $n_0 = \max\left(\left[\frac{\xi^2}{2q}\right]; 5\right)$, выполняются неравенства $\left|\frac{a_{n+1}^{(2)}}{a_n^{(2)}}\right| < q$, $\frac{b_{n+1}^{(2)}}{b_n^{(2)}} < q$.

Тогда остатки рядов $A_2(\xi), B_2(\xi)$ удовлетворяют неравенствам: $\left|\sum_{k=n}^{+\infty} a_k^{(2)}\right| \le \frac{\left|a_n^{(2)}\right|}{1-q}$, $\sum_{k=n}^{+\infty} b_k^{(2)} \le \frac{b_n^{(2)}}{1-q}$ и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем q.

Таким образом, значения рядов $A_2(\xi)$, $B_2(\xi)$ с заданной точностью $\varepsilon > 0$, можно получить, вычисляя n-ые частичные суммы этих рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}$, $\sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(2)}$, если выполняются неравенства:

$$\left|a_n^{(2)}\right| \le \varepsilon(1-q),\ b_n^{(2)} \le \varepsilon(1-q), \text{ и}$$

$$n \ge n_0 = \max\left(\left[\frac{\xi^2}{2q}\right]; 5\right). \tag{7}$$

Так, например, для $q = 0{,}5$ неравенства принимают вид: $\left|a_n^{(2)}\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$, $b_n^{(2)} \le \frac{\varepsilon}{2}$, и $n \ge n_0 = \max\left(\left[\xi^2\right]; 5\right)$.

Таким образом, точность 2ε вычисления значений $S_2(\xi), S_2(\xi_*)$ обеспечивается вычислением n-ых частичных сумм рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}(\xi)$, $\sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(2)}(\xi)$ при выполнении условий (7), что гарантирует точность 4ε вычисления значения $S_2(\xi) - S_2(\xi_*)$.

Для того, чтобы оценить выражение $\left|\frac{a_n^{(2)}}{b_n^{(2)}}\right|$, докажем, что выполняется неравенство $\frac{|c_n|(n+1)}{d_n n} > 1$.

Заметим, что последовательность $\alpha_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} - \ln k$ – монотонно убывает и ограничена снизу $C < \alpha_k \le 1$, а последовательность $\beta_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} - \ln(k+1)$ – монотонно возрастает и ограничена сверху $1 - \ln 2 \le \beta_k < C$, где $C \approx 0{,}577216\ldots$ – постоянная Эйлера–Маскерони, определенная как $C = \lim_{k\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} - \ln k\right)$.

Тогда $\sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m} > \ln(2n) + C = \ln n + C + \ln 2$, а $\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} < \ln(n+1) + C$.

Рассмотрим функцию

$$f(n) = (2n+1)\ln(n+1) - (2n+2)\ln n =$$

$$= (2n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln n.$$

Тогда

$$f'(n) = 2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{2n+1}{(n+1)n} - \frac{1}{n} = 2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{3n+2}{(n+1)n}.$$

Учитывая, что $\ln(1+x) < x$ при $x > -1$, имеем

$$f'(n) < \frac{2}{n} - \frac{3n+2}{(n+1)n} = -\frac{1}{n+1} < 0.$$

Следовательно, функция $f(n)$ монотонно убывает и выполняется неравенство $f(n) \le f(5) = 11\ln 6 - 12\ln 5 \approx 0{,}3961 < C$ при $n \ge 5$.

Тогда выполняются неравенства

$$\sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m} > \ln 2 + \ln n + C > \frac{2n+1}{2n+2}\left(\ln(n+1) + C\right) + \ln 2 >$$

$$> \frac{2n+1}{2n+2}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} + \ln 2$$

для любого $n \ge 5$. Легко проверить, что неравенство $\sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m} > \frac{2n+1}{2n+2}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} + \ln 2$ выполняется и для $n \le 4$.

Таким образом, выполняются следующие неравенства:

$$\sum_{m=1}^{2n} \frac{1}{m} > \frac{2n+1}{2n+2}\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} + \ln 2,$$

$$\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m-1} + \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m}\right)(n+1) > (2n+1)\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m} + (n+1)\ln 2,$$

$$\left(\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m-1} - \ln 2\right)(n+1) > n\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{2m}.$$

Следовательно, $\frac{|c_n|(n+1)}{d_n n} > 1$.

Учитывая следствие формулы Стирлинга

$n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} < n! < n^n\sqrt{2\pi n}\, e^{-n+\frac{1}{12n}}$, имеем

$$\left|\frac{a_n^{(2)}}{b_n^{(2)}}\right| = \frac{|c_n|\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n+1)!!(2n+2)}{d_n|\xi|(2n)!!(2n+1)} = \frac{|c_n|\sqrt{\frac{\pi}{2}}(2n)!(2n+2)}{d_n|\xi|2^{2n}(n!)^2} >$$

$$> \frac{|c_n|\sqrt{\pi}}{d_n|\xi|\sqrt{2}}\frac{(2n+2)(2n)^{2n}e^{-2n}2\sqrt{\pi n}}{2^{2n}n^{2n}2\pi n e^{-2n+\frac{1}{6n}}} = \frac{|c_n|(n+1)\sqrt{2n}}{d_n n e^{\frac{1}{6n}}|\xi|} > \frac{\sqrt{2n}}{e^{\frac{1}{6}}|\xi|} \ge 1,$$

если $n \ge \frac{\sqrt[3]{e}\,\xi^2}{2}$. Следовательно, для любого $n \ge n_0 = \left\lceil \xi^2 \right\rceil$ выполняется неравенство $\left|a_n^{(2)}\right| > b_n^{(2)}$. Это неравенство позволяет упростить проверку условий (7) при вычислении n-ых частичных сумм рядов $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}(\xi)$, $\sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(2)}(\xi)$.

Таблица. Решение системы (3)

ξ_*	ξ					
	-2	-1	0	1	2	3
-3	76,50 (85,55)	84,84 (86,13)	86,93 (86,16)	87,83 (86,17)	88,36 (86,17)	**88,71** (**86,17**)
-2		8,34 (9,97)	10,43 (10,26)	11,33 (10,30)	11,85 (10,31)	12,21 (10,32)
-1			2,09 (2,42)	3,00 (2,59)	3,51 (2,63)	3,87 (2,64)
0				0,90 (0,92)	1,43 (1,03)	1,78 (1,07)

Заключение. Рассмотрим пример, приведенный в [1]. Пусть среднегодовой сток Волги $\overline{V} = 239$ км³/год (объем выборки $n = 113$), среднеквадратичное отклонение равно 46 км³/год. Тогда $C_V = 0{,}19$. Если коэффициент корреляции r между смежными значениями стока равен 0,42, тогда $k = -\ln 0{,}42 \cong 0{,}9$ год⁻¹, $\sigma = 0{,}257$ год$^{-0.5}$, $\sigma^2 = 0{,}066$ год⁻¹. Предположим, что в начальный момент времени $V = 377$ км³/год. Через сколько лет сток достигнет 101 км³/год, т.е. уменьшится на шесть среднеквадратичных отклонений (276 км³/год)? В данном случае $\xi_* = -3$ (это отклонение от среднегодового значения стока, взятое в долях C_V), а времени перехода стока от одного состояния к другому соответствует $\xi = 3$.

В соответствии с таблицей, полученной с использованием решения системы (4), (5) и условий (6), (7), $\theta_1 = 88{,}71$, а размерное время составляет $m_T = \dfrac{\theta_1}{k} = 88{,}71 : 0{,}9 \approx 98{,}6$ лет. Так как $\sigma_T = \dfrac{\sqrt{\theta_2 - \theta_1^2}}{k} = 86{,}17 : 0{,}9 \approx 95{,}74$, то доверительный интервал $(m_T - t\dfrac{\sigma_T}{\sqrt{n}}; m_T + t\dfrac{\sigma_T}{\sqrt{n}})$ для оценки математического ожидания с надежностью $\gamma = 0{,}95$ ($t = 1{,}96$, $\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \dfrac{\gamma}{2}$) определяется неравенством $80{,}9 < m < 116{,}3$.

По известным значениям C_V и r можно исследовать большой цикл задач стохастической гидрологии. Результаты исследований можно применить при расчете и прогнозе многолетних колебаний речного стока рек Беларуси.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – Том 29. – № 1. – М., 2002. – С. 62–67.
2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест: БрГТУ, 2006. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 56–60.
3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест: БрГТУ, 2008. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 83–87.
4. Волчек, А.А. Об асимптотическом поведении параметра одного из распределений вероятностей речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Проблемы водоснабжения, водоотведения и энергосбережения в западном регионе Республики Беларусь: сборник материалов международной научно-технической конференции, Брест, 26–28 апреля 2010 г. – Брест: БрГТУ, 2010. – С. 45–49.
5. Волчек, А.А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из задач стохастической гидрологии / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Международная математическая конференция «Пятые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям»: тезисы докладов международной научной конференции. Минск, 7–10 декабря 2010 г. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2010. – С. 105.
6. Волчек, А.А. О решении системы дифференциальных уравнений, одной из моделей многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Веснік Брэсцкага універсітэта. – Брест, 2010. – № 1: Физика, математика. – С. 68–77.

Материал поступил в редакцию 09.11.11

VOLCHEK A.A., HLADKI I.I., MAKHNIST L.P., RUBANOV V.S. About the solution convergence of diffusion model of stochastic hydrology

This research work deals with the model of several years' fluctuation of the river flow, which was received by applying the stochastic differential equation of Ornstein–Uhlenbeck. The process under consideration is the homogeneous in terms of time Markow process of diffusion type with corresponding coefficient of drift and diffusion. It gives the opportunity to evaluate the mathematical expectation and the moments of frequency distribution of the river flow. The parameters are the solution to the set of second-order differential equations with boundary condition received by applying Fokker–Planck equation and by Kolmogorov's backward equation for transition probability density. In comparison with the use of numerical integration of the differential equations system our research work studies the convergence of obtainable solution presented in power series.

УДК 519.6 + 517.983.54

Матысик О.В., Дерачиц Н.А.

СХОДИМОСТЬ НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Постановка задачи. Будем рассматривать в гильбертовом пространстве H уравнение I рода

$$Ax = y \qquad (1)$$

с ограниченным положительным самосопряжённым оператором A, для которого нуль является собственным значением оператора A, т.е. задача (1) имеет неединственное решение. Предположим, что

Матысик О.В., *к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой алгебры и геометрии Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина.*
Беларусь, БрГУ им. А.С. Пушкина, 224016, г. Брест, б-р. Космонавтов, 21.
Дерачиц Н.А., *ассистент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.