УДК 50.83:681.03

Шведовский П.В.

ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНКИ ЖИВУЧЕСТИ ЭКОЛОГИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Оценка любых экологических характеристик техногенных и, особенно агроландшафтных систем по ограниченному объему информации сегодня стала более чем актуальной.

Решение такой сложной проблемы определяет необходимость использования непараметрических методов микростатистики в комплексе с эмпирическими функциями распределения, на базе принципа максимума неопределенности [1, 2, 3, 4].

Так как малой выборке случайных величин x_1, …, x_n обычно соответствует эмпирическая функция распределения $P_n(x)$ вида

$$P_n(x) = \begin{cases} 0, x \le x_1^{(n)}; \\ \dfrac{k}{n}, x_k^{(n)} < x \le x_{k+1}^{(n)}; \\ 1, x > x_n^{(n)}; \end{cases}, \qquad (1)$$

график которой представляет ступенчатую линию со скачками, кратными величине $1/n$ в точках, определяемых членами вариационного ряда $x_1^{(n)} \le x_2^{(n)} \le \ldots \le x_n^{(n)}$ и которые по закону больших чисел сходятся по вероятности к исходному теоретическому распределению, то определять ее математическое ожидание можно с использованием бутстреп-процедуры, используя сглаженную функцию квантилей распределения оценки параметров типа

$$x_p = \sum_{\kappa=0}^{n-1} C_k \cdot P^k , \qquad (2)$$

коэффициенты которые удовлетворяют эмпирической функции распределения.

Неоднозначность выбора коэффициентов ряда (2) требует ввода принципа максимума неопределенности, с использованием в качестве меры неопределенности энтропию Шеннона.

Соответственно имеем:

$$H_\varepsilon = \int_o^1 ln\left(\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot C_k \cdot P^{k-1}\right) \cdot dp \to \frac{max}{C_k}; \qquad (3)$$

$$x_k^{(n)} \le C_0 + C_1 \cdot \frac{k}{n} + C_2\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \ldots C_{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^{n-1} \le x_{k+1}^{(n)}, \qquad (4)$$

где H_ε - энтропия; $k = 1, 2, \ldots, n$.

Экстремум H_ε может быть либо на экстремалях, лежащих в области определяемой эмпирической функции распределения параметров, либо на границах этой области.

Отсюда последовательность определения оценки математического ожидания параметра $E[x]$ будет следующей:

- по выборке строим вариационный ряд и формируем область существования допустимых экстремалей в виде системы неравенств (4);
- определяем границы области существования

$$\left. a_0^{(л,п)} + a_1^{(л,п)} \frac{k}{n} + a_2^{(л,п)}\left(\frac{k}{n}\right)^2 + \ldots + a_n^{(л,п)}\left(\frac{k}{n}\right)^{n-1} = x_{k,k+1}^{(n)} \right\} (5)$$

$$k^{(л)} = 1, \ldots, n; \quad k^{(п)} = 1, \ldots, n-1,$$

где $л$ – индекс левой, $п$ – правой границ;

- выявляем область допустимых решений и существования общей касательной через определение корней уравнения (равенство производных квантильных функций)

$$\begin{aligned} & a_1 + 2a_2 \cdot p + \ldots + (n-1) \cdot a_{n-1} \cdot p^{n-2} = \\ & = b_1 + 2b_2 \cdot p + \ldots + (n-2) \cdot b_{n-2} \cdot p^{n-3}; \end{aligned} \qquad (6)$$

- определяем значения энтропии для возможных экстремалей

$$H_\varepsilon^{(л,п)} = \int_0^1 ln\left(\sum_{k=0}^{n-1(2)} k \cdot a_k^{(л,п)} \cdot p^{k-2}\right) \cdot dp;$$

$$\begin{aligned} H_\varepsilon^{ок} = & \int_0^{p_2} ln\left(\sum_k^{n-2} k \cdot a_k^л \cdot p^{k-2}\right) \cdot dp + \\ & + \int_{p_1}^{p_2} ln\left[a_2^л + 2a_2^л \cdot p_2 + \ldots + (n-2) a_{n-2}^л \cdot p_2^{n-2}\right] \cdot dp + \qquad (7) \\ & + \int_{p_2}^1 ln\left(\sum_{k=0}^{n-2} k \cdot a^n \cdot p^{k-1}\right) \cdot dp; \end{aligned}$$

где p_1 и p_2 – точки касания прямой экстремали к кривым, определяющим область допустимых решений; $H_\varepsilon^{ок}$ - энтропия экстремали, состоящей из кусков;

- выбираем случай с максимальной энтропией и определяем математическое ожидание параметра по зависимости

$$E[x] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_k}{k+1}. \qquad (8)$$

Для оценки интервальных значений при отсутствии априорной информации в качестве основного метода целесообразно использовать метод доверительных интервалов Е.Неймана, при этом в качестве границ доверительных интервалов должны быть приняты функции микростатистики [5, 6]. Так как фиксация этих границ сопряжена с риском ошибки, то необходимо анализировать как коэффициент доверия (доверительный уровень $(1-\alpha)$), так и уровень значимости (вероятность ошибки $(\alpha=\alpha_1+\alpha_2)$). Пи этом α_1 характеризует вероятность того, что истинное значение параметра будет левее, а α_2 – правее принятых границ интервала [3].

При известности или задании вида плотности распределения оценки параметра $\hat{y}$ его доверительные интервалы определяются как квантили распределения по соответствующему уровню по уравнениям:

Шведовский Петр Владимирович, *к.т.н., профессор кафедры оснований, фундаментов, инженерной геологии и геодезии Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

$$\alpha_1 = \int_{-\infty}^{\hat{y}_н} f\left(\hat{y}\right)\cdot d\hat{y} \text{ и } \alpha_2 = \int_{\hat{y}_в}^{\infty} f\left(\hat{y}\right)\cdot d\hat{y}, \tag{9}$$

где $\hat{y}_н$ и $\hat{y}_в$ - нижняя и верхняя границы доверительных интервалов.

Однако, так как вид распределения параметра $\hat{y}$ известен только для узкого круга статистик, необходимо отыскание общего метода построения плотности $f\left(\hat{y}\right)$. Это вполне осуществимо на базе аналитического аппарата характеристических функций [6].

Характеристическая функция $\varphi_x(f)$ выборки $x_2, \ldots, x_n$ из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x)$

$$\varphi_x\left(f\right) = \int_0 e^{itx}\cdot dF\left(x\right) \tag{10}$$

определяет характеристическую функцию выборочного среднего значения $\left(\overline{x}\right)$-

$$\varphi_{\overline{\alpha}}\left(t\right) = \left[\varphi_x\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n, \tag{11}$$

которая через формулу обращения

$$f\left(\overline{x}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u\overline{x}}\varphi_{\overline{x}}\left(t\right)\cdot dt \tag{12}$$

позволит получить плотность распределения выборочного среднего.

При малых выборках $n \le 5$ данная формула обращения не позволяет представить распределение в аналитическом виде, что и определило использование процедуры формирования квантильных функций непосредственно по характеристическим функциям с помощью операторных рядов.

Оператор преобразования $Д$ при $n \le 5$ имеет вид [2]

$$Д = \frac{2\pi}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\cdot\varphi_{\overline{x}}\left(t\right)\cdot dt}\cdot\frac{d}{dx}, \tag{13}$$

что соответственно и определяет выражение обратной функции распределения

$$x = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\left[p - F\left(x_0\right)\right]^{\nu}}{\nu!}\cdot Д_x^{\nu}\big/_{x=x_0}, \tag{14}$$

где $F(x_0)$ – функция распределения, P – вероятность, при этом $/P\text{-}F(x_0)/\le\beta$.

Величина β в соответствии с признаком Даламбера может быть описана в следующем виде –

$$\beta = f\left(x_0\right)\cdot lim\frac{\left(\nu+1\right)\cdot Д_x^{\nu}\big/_{x=x_0}}{\frac{d}{dx}Д_x^{\nu}\big/_{x=x_0}}. \tag{15}$$

Тогда соответственно эмпирическая функция распределения параметра $[\varphi_x(t)]$ и его математического ожидания $\varphi_{\overline{x}}\left(t\right)$ определяются следующими зависимостями

$$\varphi_x\left(t\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{itx_k} \text{ и } \varphi_{\overline{x}}\left(t\right) = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{itx_k}{n}}\right)^n. \tag{16}$$

ВЫВОДЫ

Бесспорно, решение проблемы прогноза живучести экологических систем при отсутствии априорных сведений, т.е. ограниченной исходной информации, не может базироваться только на принципе, который принят за основу в нашей работе.

Применимы и, даже более достоверны, другие принципы оценки живучести, но полученные результаты позволяют с достаточно высокой надежностью прогнозировать исследуемую динамику процесса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гумбель Э. Статистика экстремальных значений. М. – Мир, 1965, 419 с.
2. ИвченкоБ.П., Мартыщенко Л.А. Теоретико-информационные методы анализа и статистической интерпретации результатов экологического мониторинга. Сб. докладов междун. конф. «Экология и развитие Северо-Запада России». – СПб, 1998, с. 38-46.
3. Райфа Г. Анализ решений. Введение в проблему выбора в условиях неопределенности. М. – Наука, 1970, 402 с.
4. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетики. М., Ил, 1963, 523 с.
5. Шведовский П.В., Бурлибаев М.Ж., Волчек А.А. Проблемы оптимизации природопользования и природообустройства в математических моделях и методах. – Каганат, Алматы, 2003. – 529 с.
6. Шведовский П.В., Логинов В.Ф., Волчек А.А. Практика применения статистических методов при анализе и прогнозе природных процессов. БГТУ, Брест, 2004. – 301 с.

УДК 556.12 (476.1/9)

Мешик О.П., Валуев В.Е.

ТРАНСФОРМАЦИЯ РЕЖИМА ВЫПАДЕНИЯ АТМОСФЕРНЫХ ОСАДКОВ НА ТЕРРИТОРИИ БЕЛАРУСИ

Атмосферные осадки являются одним из основных источников формирования ресурсов поверхностных и подземных вод Беларуси. Режим выпадения атмосферных осадков определяется характером циркуляционных процессов, зависит от рельефа местности и состояния подстилающей поверхности. За весь период инструментальных наблюдений с 1881 по 2004 гг. режим выпадения атмосферных постоянно трансформировался. Наиболее значимые трансформации приурочены к периодам потепления климата в начале прошлого столетия (1910-1939 гг.) и современного потепления в конце XX века (1964-2000 гг.). Немаловажным в формировании режима выпадения атмосферных осадков является антропогенный фактор, значимость которого становится все очевидней. Климатологи отводят большую роль влиянию крупномасштабных

Мешик Олег Павлович, *старший преподаватель кафедры сельскохозяйственных гидротехнических мелиораций Брестского государственного технического университета.*

Валуев Владимир Егорович, *к.т.н., профессор кафедры сельскохозяйственных гидротехнических мелиораций Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.