

зультатов на экран и, при необходимости, во внешний файл. В программном режиме пользователю также доступны все вычислительные возможности системы, все виды графической информации для наглядного представления результатов. Использование библиотек стандартных графических процедур для визуализации результатов расчета, математических выражений, связывающих векторные или матричные объекты, позволяет решать вычислительные задачи «разового» пользования значительно эффективнее, чем с помощью программ, написанных на «скалярных» языках типа FORTRAN или BASIC.

Для практического освоения программной среды MatLab и демонстрации возможностей визуализации результатов расчета была составлена расчетная программа для задания курсовой работы по информатике, которую студенты энергетического факультета выполняют при изучении алгоритмического языка FORTRAN. Разработанная расчетная программа выгодно отличается от программы на Фортране компактностью, использованием расчетных операторов, близких по виду к традиционным формулам, построением осциллограмм расчетных токов и напряжений с помощью стандартных команд построения двумерных графиков.

Полученный опыт работы с системой MatLab показывает необходимость использования студентами данной программной среды для решения вычислительных задач электротехнического характера. Кроме режимов программирования и научного калькулятора, система MatLab может использоваться для проведения исследований сложных электрических систем методом вычислительного эксперимента в режиме динамического моделирования [2,4]. Исходным материалом для подобных исследований является схема системы, составленная из функциональных блоков, имеющих в соответствующих библиотеках системы Simulink-4 MatLab -6.0 [3].

### Литература

1. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003, - 736 с.: ил.
2. Новгородцев А.Б. Расчет электрических цепей в MATLAB: Учебный курс – СПб.: Питер, 2004, - 250 с.: ил.
3. Дьяконов В. Simulink 4. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002, - 528 с.: ил.
4. Герман-Галкин С.Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MATLAB 6.0: Учебное пособие. – СПб.: КОРОНА принт, 2001, - 320 с.: ил.

## РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ И ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРА МАТРИЦЫ

*Добранова Т. В., ГрГУ им. Янки Купалы, Гродно*

Проблема нахождения собственных значений находит широкое применение в различных прикладных исследованиях. Она используется в теории систем управления (например, изучение устойчивости линейных стационарных систем сводится к изучению расположения собственных значений); связана с различного рода колебаниями (например, с помощью собственных значений можно определять по спектру компоненты газа или других веществ, собственные частоты здания должны лежать вне полосы частот, возбуждаемых землетрясением). Различия в таких задачах исчезают, когда дается достаточно абстрактная формулировка, и все проблемы сводятся к одной и той же задаче вычисления собственных чисел квадратной матрицы с действительными или комплексными элементами.

Вычисление спектра матрицы можно производить с использованием алгоритмов QR (QL), алгоритмов Якоби, Данилевского, Леверье и других. QR (QL) алгоритмы применяются для вычисления собственных значений квадратной симметричной трехдиагональной матрицы. Алгоритм Якоби – самый неэффективный, но самый простой и основан на применении техники определения матриц вращения для случая матрицы  $A \in C^{n \times n}$  посредством плоских вращений. Алгоритмы Данилевского и Леверье – это методы нахождения коэффициентов характеристического полинома матрицы  $A \in C^{n \times n}$ , с помощью которого можно вычислить сами собственные значения, решив алгебраическое уравнение степени  $n$ .

В данной работе реализуется метод вычисления собственных значений симметричной квадратной матрицы, основанный на преобразовании заданной матрицы к трехдиагональному виду (преобразование Хаусхолдера) и QR(QL) алгоритмах со сдвигами. Алгоритмы реализованы в среде DELPHI 7.

Необходимо отметить, что, вычисляя спектр матрицы с помощью вышеперечисленных методов, мы получаем приближенное значение. Отсюда следует возможность замены в некоторых случаях задачи вычисления спектра матрицы задачей оценки собственных значений, т.е. нахождения области локализации собственных значений матрицы.

Для этого можно использовать различные теоремы об областях локализации собственных значений: теоремы Гершгорина, Островского, Бенедиксона, Гирша, Брауна, Брауэра, Бруалди [2].

*Теорема Гершгорина (строчная).* [2] Все собственные значения матрицы  $A$  заключены в объединении  $n$  кругов

$$\bigcup_{i=1}^n \{z \in C : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\} \equiv G(A). \quad (1)$$

Кроме того, если объединение  $k$  из этих кругов есть связная область, не пересекающаяся с остальными  $n - k$  кругами, то в ней находится ровно  $k$  собственных значений матрицы  $A$ .

Ранее [1] автором в рамках электронного учебного пособия по курсу «матричный анализ» в среде DELPHI 7 было реализовано применение теоремы Гершгорина и Островского для построения и визуализации областей локализации. Программа строит области локализации собственных значений (круги Гершгорина и Островского) для произвольной матрицы. Она позволяет обучаемому, во-первых, самостоятельно проанализировать результат применения данных теорем, во-вторых, проверить правильность построения областей локализации собственных значений, выполняемые вручную. Ниже (рис.1) приведен пример отображения матрицы в программе и пример построения для нее областей локализации Гершгорина.

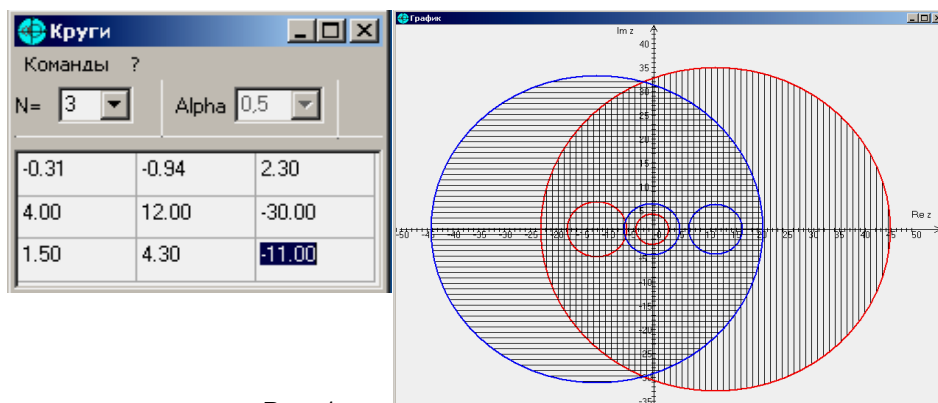


Рис. 1

В работе для уточнения оценок собственных значений (уменьшения области локализации) используется подход, основанный на следующих соображениях. Во-первых, спектр матрицы не меняется при преобразовании подобия, т.е. для любой обратимой матрицы  $S$  матрица  $S^{-1}AS$  имеет те же собственные значения, что и  $A$ . Выбирая подходящим образом  $S$  и применяя теорему Гершгорина к  $S^{-1}AS$ , будем получать различные области локализации. Так как собственные значения матрицы  $A$  принадлежат всем полученным областям локализации одновременно, то они принадлежат их пересечению.

В данной работе реализуется следующий алгоритм оценки собственных значений матрицы на основе невырожденных преобразований.

*Схема алгоритма:*

Введем следующую систему обозначений:

$L_i$  - область локализации, полученная на  $i$ -том шаге алгоритма;

$\sigma(A)$  – спектр матрицы;

$\rho(A)$  – спектральный радиус.

На входе подается матрица  $A \in C^{n \times n}$ , и одно из условий, подлежащих проверке, например принадлежность нуля спектру матрицы ( $0 \notin \sigma(A)$ ).

**Шаг 1.** Строится  $L_0$  - область локализации  $\sigma(A)$ , построенная с помощью теоремы Гершгорина.

**Шаг 2.** Генерируется случайная матрица  $S_i$  и вычисляется число обусловленности матрицы  $S_i$  по формуле:

$$\text{cond } S_i = \begin{cases} \|S_i^{-1}\| \|S_i\|, & \det(S_i) \neq 0 \\ \infty, & \det(S_i) = 0 \end{cases}$$

Если  $\text{cond } S_i \gg 10$ , то работаем дальше, иначе – выход.

**Шаг 3.** Находим  $S_i^{-1}$ , вычисляем  $S_i^{-1}AS_i = B_i$  и строим круги Гершгорина для  $B_i$ . Область локализации  $G_i$  будет равна  $G_i = G(B_i) \cap G(B_i^T)$ .

**Шаг 4.** Находим пересечение  $L_i = L_{i-1} \cap G_i$  и оцениваем для  $L_i$  выполнение входного условия. Если оно выполняется, то выход, если нет – то продолжаем выполнение алгоритма до предельного числа итераций.

Отметим, что современные компьютерные технологии также позволяют вычислять спектр матрицы, однако все результаты, полученные таким способом, приближенные. Например, в пакете Mathematica для вычисления собственных значений используется функция  $\text{Eigenvalues}[m]$ , где  $m$  – квадратная матрица.

Целью данной работы является сравнение эффективности различных методов нахождения и оценки спектра матрицы.

### Литература

1. Добранова Т.В., Цехан О.Б. Разработка учебно-методического комплекса по курсу «Матричный анализ»: Материалы Международной математической конференции «Дифференциальные уравнения и системы компьютерной алгебры», Брест 2005.
2. Хорн Роджер, Джонсон Чарльз Матричный анализ \ под ред. Х.Д. Икрамова- М. : Мир, 1989. - 655с