РАЗДЕЛ V. АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В НЕОРТОГОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

Баринова Ю. А., Ковалева О. С., БНТУ, Минск

Для нахождения коэффициентов разложения, в общем случае по системе неортогональных собственных функций, будем использовать операторный подход, который с единых позиций осуществляет требуемое разложение как в ортогональный, так и в неортогональные ряды.

Пусть $F(a_m x)$ - собственная функция оператора d_x^2, т.е.

$$d_x^2\left[F(a_m x)\right] = a_m^2 F(a_m x) \quad \text{или} \quad (1-\frac{d_x^2}{a_m^2})F(a_m x) = 0.$$

Тогда

$$(1-\frac{d_x^2}{a_K^2})F(a_m x) = \begin{cases} (1-\frac{a_m^2}{a_K^2})F(a_m x) & \text{если } m\neq n \\ 0 & \text{если } m=n \end{cases}$$

Применим к ряду

$$F(\mu x) = A_0 + \sum_{K=0}^{\infty} A_K F(a_K x) = A_0 + \sum_{K=1}^{\infty}\left[A_K^r F_r(a_K x + A_K^y F_н(a_{Kx} x)\right]$$

последовательно операции

$$D_0 = \prod_{m=1}^{\infty}(1-\frac{d_x^2}{a_K^2}) = \frac{\varphi(d_x)}{d_x}, \quad D_1 = \prod_{\substack{m=1 \\ m\neq k}}^{\infty}(1-\frac{d_x^2}{a_m^2}) = \frac{\varphi(d_x)}{1-d_x^2/a_K^2},$$

и $D_2 = d_x D_1$.

Причем здесь введены обозначения:

$$F_r(a_K x) = \frac{F(a_K x) + F(-a_K x)}{2} \text{ - четная часть функции}$$

$$F_н(a_K x) = \frac{F(a_K x) - F(-a_K x)}{2} \text{ - нечетная часть функции}$$

$$\varphi(\mu) = \mu \prod_{m=1}^{\infty}(1-\frac{\mu^2}{a_K^2}).$$

При x=0, получим:

$$\frac{\varphi(\mu)}{\mu} F(\mu x)\Big|_{x=0} = A_0 \Rightarrow A_0 = \frac{\varphi(\mu)F(0)}{\mu}.$$

С учетом

$$\prod_{\substack{m=1\\ m\neq K}}^{\infty}\left(1-\frac{d_x^2}{a_m^2}\right)\left[F(a_K x)\right]=\prod_{\substack{m=1\\ m\neq K}}^{\infty}\left(1-\frac{a_K^2}{a_m^2}\right)F(a_K x)=\left[\frac{d}{d\mu}\cdot\frac{\varphi(\mu)}{\mu}\right]\Bigg|_{\mu=a_K}\cdot\left(-\frac{a_K}{2}\right)F(a_K x)=-\frac{1}{2}\varphi'(a_K)F(a_K x),$$

устанавливаем

$$D_1\left[\sum_{K=1}^{\infty}A_K^{\text{н}}F_{\text{н}}(a_K x)\right]=-A_K^{\text{н}}\frac{a_K}{2}\varphi'(a_K)F_r(a_K x)$$

$$D_1\left[F(\mu x)\right]=\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_K^2}F_r(\mu x)\cdot$$

Приравнивая эти выражения при x=0 и замечая, что

$$\left\{D_1\left[\sum_{K=1}^{\infty}A_K^{r}F_r(a_K x)\right]\right\}\Big|_{x=0}=0,$$

находим $\qquad \dfrac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_K^2}=-A_K^{\text{н}}\dfrac{a_K}{2}\varphi'(a_K)$, откуда следует

$$A_K^{\text{н}}=-\frac{2}{a_K\varphi'(a_K)}\cdot\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_K^2}.$$

Аналогично, при помощи оператора D_2 мы определим

$$A_K^{r}=-\frac{2\mu}{a_K^2\varphi'(a_K)}\cdot\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_K^2}$$

и в результате получим:

$$F(\mu x)=F(0)\frac{\varphi(\mu)}{\mu}+2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi'(a_K)}\frac{\varphi(\mu)}{\mu^2-a_K^2}\cdot\left[\mu F_r(a_K x)+a_K F_{\text{н}}(a_K x)\right] \qquad (1)$$

Полученный результат можно легко проверить. Для этого применим к интегралу $I_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{C_n}\dfrac{F(xz)dz}{(z-\mu)\varphi(z)}$ обычные правила теории вычетов в комплексной плоскости и соединяя вместе вычеты, относящиеся к $\pm a_K$. Здесь μ - некоторое комплексное число, отличное от всех a_K, а x - некий вещественный параметр. C_n - описанный с начала координат плоскости комплексного переменного круг радиуса R_n, причем $R_n>|\mu|$ и $|a_n|<R_n<|a_{n+1}|$. В результате находим:

$$I_n=\frac{F(\mu x)}{\varphi(\mu)}-2\sum_{K=1}^{K=n}\frac{1}{\varphi'(a_K)(\mu^2-a_K^2)}\left[\mu F_r(a_K x)+a_K F_{\text{н}}(a_K x)\right]-\frac{F(0)}{\mu}.$$

Если при некотором *x* имеем в пределе независимо от взятого частного значения $|\mu| \le \alpha,\ \lim_{n\to\infty} I_n = 0$, что будет, например, всегда тогда, когда отношение $\dfrac{F(xz)}{\varphi(z)}$ при $|z| \to \infty$ стремится к нулю равномерно во всех точках C_n, то при этом значении *x* имеет место равномерно сходящееся (по отношению μ) разложение в ряд (1).

Разложение имеет место и тогда, когда отношение $\dfrac{F(xz)}{\varphi(z)}$ стремится в конечном числе точек круга C_n не к нулю, а к конечному пределу.

Полученный ряд (1) можно дифференцировать произвольное число раз по μ. Дифференцируя *m* раз и полагая μ=0, в результате получим:

$$F^{(m)}(0)x^m = F(0)\left[\frac{d^m}{d\mu^m}\frac{\varphi(\mu)}{\mu}\right]_{\mu=0} + 2\sum_{K=1}^{\infty}\frac{1}{\varphi'(a_K)}\left\{\left[\frac{d^m}{d\mu^m}\frac{\mu\varphi(\mu)}{\mu^2-a_K^2}\right]_{\mu=0}\cdot F_r(a_K x) + a_K\left[\frac{d^m}{d\mu^m}\frac{\varphi(\mu)}{\mu}\right]_{\mu=0}\cdot F_н(a_K x)\right\} \qquad (2)$$

Полагая $F^{(m)}(0)\neq 0$, получим разложение x^m в ряд требуемого вида.

Пользуясь очевидным соотношением

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{d^m}{d\mu^m}\frac{\mu\varphi(\mu)}{\mu^2-a_K^2}\right)_{\mu=0} = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}}{d\mu^{m-1}}\frac{\varphi(\mu)}{\mu^2-a_K^2}\right)_{\mu=0}$$

и тем, что все четные производные от $\dfrac{\varphi(\mu)}{\mu^2-a_K^2}$ равны нулю при μ=0, найдем из (2):

$$x^{2r} = \alpha_0\frac{U_{2r+1}}{\alpha_{2r}} - \frac{2}{\alpha_{2r}}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{F_r(a_K x)}{a_K^2\varphi'(a_K)}\gamma^{(r-1)} \qquad (3)$$

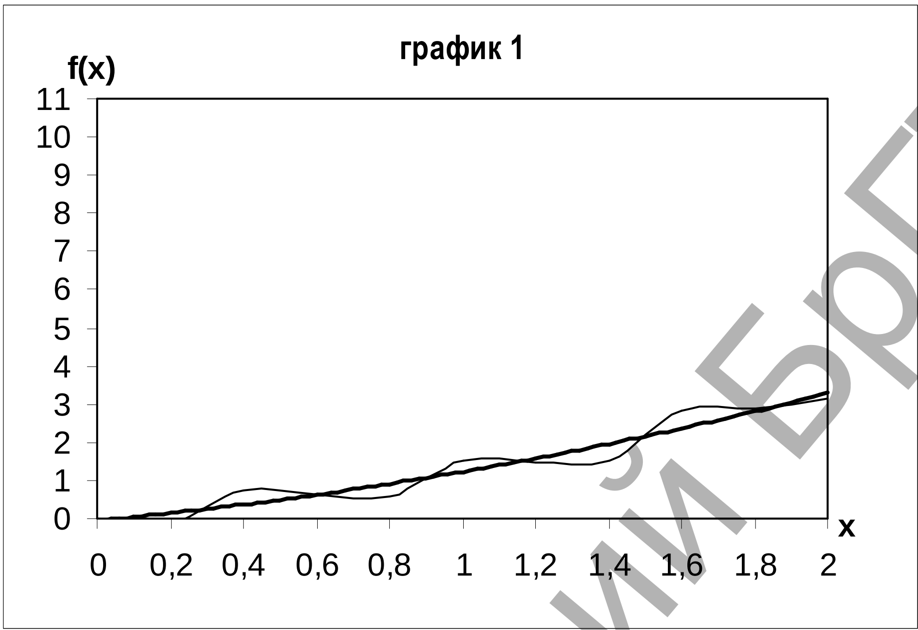
$$x^{2r+1} = -\frac{2}{\alpha_{2r+1}}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{F_н(a_K x)}{a_K^2\varphi'(a_K)}\gamma_K^{(r)} \qquad (4)$$

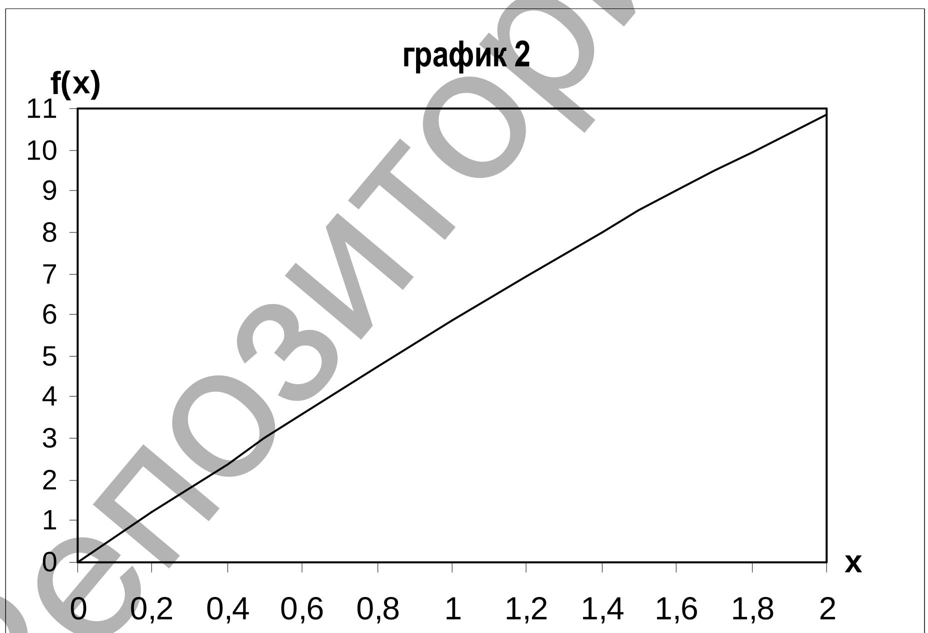
Причем введено обозначение

$$\gamma_K^{(r)} = \frac{1}{(2r+1)!}\left[\frac{d^{2r+1}}{d\mu^{2r+1}}\frac{\varphi(\mu)}{1-\mu^2/a_K^2}\right]_{\mu=0}.$$

Нетрудно убедиться в том, что заменив разлагаемую в ряд функцию $F(\mu x)$ на функцию x^m и используя введенные выше операторы D_0, D_1 и D_2, можно непосредственно получить формулы (3) и (4) операторным методом. Отметим также, что ряды для четных степеней x^{2r} содержат только четные функции F_r, а для нечетных - только нечетные $F_н$.

Приведем конкретный числовой пример разложения функции e^{ax} в неортогональный ряд вида $\ell^{ax} = \sum_{k-1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} n}{a^2 + n^2}$ (график 1). Для сравнения на графике приведем разложение этой функции в ортогональный ряд Фурье вида $\ell^{ax} = \sum_{k-1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} \sin \frac{n}{x}}{n\left(1 - n^2 a^2\right)}$ (график 2).





В результате проведенных исследований можно сделать следующий вывод: для малых значений x приближение “2-го графика ” является «грубым» по сравнению с «графиком 1», а для больших значений x наоборот.

Литература

1. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. // М.:Физматгиз.-1961-936 с.
2. Толстов Г.П. Ряды Фурье. // Изд.3-е, испр.- М.: Наука -1980-381 с.
3. Акимов В.А. Операторный метод решения задач теории упругости: Монография / Мн.: УП “Технопринт”, 2003.-101 с.