АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ В θ-ИНТЕГРАЛАХ

Каримова Т.И., БГТУ, Брест

При исследовании аппроксимаций случайного процесса броуновского движения возникают трудности, связанные с тем, что соответствующие «приближенные» интегралы не сходятся к стохастическому интегралу Ито, если даже предел существует. Аналогичная ситуация возникает и при рассмотрении стохастических дифференциальных уравнений. Предел решений аппроксимирующих уравнений, если он существует, как правило, является решением некоторого другого уравнения. Учитывая неустойчивость решений уравнений Ито, которая впервые была отмечена Вонгом и Закаем [1], можно понять, почему в задачах подобного типа уравнения обычно рассматриваются в симметризованной форме. Важной оказывается «согласованность» симметризованных стохастических и обыкновенных уравнений. В работе [2] было предложено избавиться от вышеуказанных сложностей введением запаздывания.

В сообщении [3] анонсирована конструкция алгебры обобщенных случайных процессов, которая позволила с единых позиций исследовать решения стохастических уравнений различных классов (см. напр.[4, 5]) с помощью решений соответствующих уравнений в дифференциалах в этой алгебре.

Напомним некоторые понятия из работы [6], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть (Ω, A, P) – полное вероятностное пространство.

Определение 1. Расширенной прямой $\tilde{R}$ называется следующее фактор-множество $\tilde{R} = \bar{R}/M$, где $\bar{R} = \{(x_n): \forall n \in N \;\; x_n \in R\}$ и $M = \{(x_n) \in \bar{R} : \exists n_0 \in N \;\forall n > n_0 \;\; x_n = 0\}$.

Аналогичным образом определяется $\tilde{T} = \bar{T}/M$, где $t \in T = [0, a] \subset R$, $a \in R$, $\bar{T} = \{(x_n): \forall n \in N \;\; x_n \in T\}$.

Рассмотрим множество последовательностей функций $f_n(t, \omega): \; T \times \Omega \to R$ со следующими свойствами:

1. $f_n(t, \cdot)$ является случайной величиной на (Ω, A, P) для всех $t \in T$ и $n \in N$;
2. $f_n(\cdot, \omega) \in C^\infty(T)$ для всех $n \in N$ и почти всех $\omega \in \Omega$.

Будем говорить, что элементы $F = (f_n(t,\omega))$ и $G = (g_n(t,\omega))$ эквивалентны, если существует такой номер n_0, что для любых $t \in T$ и почти всех $\omega \in \Omega$ $f_n(t, \omega) = g_n(t, \omega)$ при $n > n_0$.

Через G(T, Ω) обозначим множество классов эквивалентности исходного множества. Очевидно, что G(T, Ω) образует алгебру с покоординатным сложением и умножением.

Определение 2. Класс эквивалентности вида $\tilde{F}(\tilde{t}, \omega) = \left[(f_n(t_n, \omega))\right]$, $\tilde{t} = [(t_n)] \in \tilde{T}$, $\left[(f_n(t_n, \omega))\right] \in G(T, \Omega)$ называется обобщенным случайным процессом.

Множество обобщенных случайных процессов обозначим через $G(\tilde{T}, \Omega)$; оно является алгеброй с покоординатными операциями сложения и умножения.

Будем говорить, что обобщенный случайный процесс $\tilde{F}(\tilde{t}, \omega) = \left[(f_n(t_n, \omega))\right] \in G(\tilde{T}, \Omega)$ ассоциирует классический случайный процесс с непрерывными, интегрируемыми и т.д. траекториями, если $f_n(t, \omega)$ при $n \to \infty$ для почти всех $\omega \in \Omega$ или в $L^2(\Omega, A, P)$ сходится к данному процессу в соответствующем пространстве непрерывных, интегрируемых и т.д. функций.

Пусть $\{\Phi_t\}_{t\in T}$ –стандартный поток σ-алгебр, $\Phi_a \subset A$; $B(t), t\in T$ – одномерный стандартный процесс Φ_t- броуновского движения.

Определение 3. Обобщенным случайным процессом броуновского движения называется элемент алгебры G($\tilde{T}$, Ω), ассоциирующий $B(t)$.

На полном вероятностном пространстве (Ω, A, P) рассматривается система дифференциальных уравнений, которая в алгебре обобщенных случайных процессов G(T , Ω) на уровне представителей будет записана в виде задачи Коши с опережением

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n) - X_n^i(t) = \sum_{j=1}^{m} f_n^{ij}(t, X_n(t+h_n))[B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)] + g_n^i(t, X_n(t)), \\ X_n^i(t)\big|_{[0,h_n)} = X_n^{0i}(t),\ i=\overline{1,r},\ t\in[0,T] \end{cases} \quad (1)$$

где $B_n^j(t) = (B^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{1/n} B^j(t+s)\rho_n^j(s)ds$, $\rho_n^j(t) \in C^\infty(R)$, $\rho_n^j(t) \ge 0$,

$supp\, \rho_n^j(t) \subset [0, 1/n]$, $\int_0^{1/n} \rho_n^j(s)ds = 1$, $j=\overline{1,m}$, $B(t) = (B^1(t), B^2(t), ..., B^m(t))$ –

m-мерный стандартный процесс броуновского движения,

$$f_n^{ij} = (f^{ij} * \overline{\rho}_n),\ g_n^i = (g^i * \overline{\rho}_n),\ f^{ij} \in C_B^2(R^{r+1}),\ g^i \in C_B^1(R^{r+1}),$$

а $\overline{\rho}_n$ – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в $[0, 1/n]^{r+1}$ и $\int_0^{1/n} ... \int_0^{1/n} \overline{\rho}_n(s, s_1, s_2, ..., s_r) ds ds_1 ds_2 ... ds_r = 1$.

Система уравнений, ассоциированных системе (1) имеет вид:

$$X_i(t) = x_i + \sum_{j=1}^{m} (\theta_j) \int_0^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \int_0^t g^i(s, X(s)) ds,\ i = \overline{1,r}. \quad (2)$$

где $t\in T$, $x_i \in \mathbf{R}$, $\theta \in [1/2, 1]$ и интеграл в правой части – стохастический θ-интеграл.

Пусть поток σ-алгебр $\{\Phi_t\}_{t\in[0,T]}$ порожден процессом $B(t)$.

Рассмотрим числовые последовательности [7]

$$K_j(n, h_n) = \iint\limits_{\substack{0<s,\tau\le 1/n \\ |s-\tau|\le h_n}} (1 - |s-\tau| h_n^{-1}) \rho_n^j(s) \rho_n^j(\tau) ds d\tau,\ j = \overline{1,m}.$$

С помощью принципа сжимающих отображений можно показать, что задача (1) имеет решение, однако в общем случае оно будет не единственным. Однако и в этом случае справедлива следующая терема, которая является необходим и достаточным условием сходимости решений систем конечно-разностных уравнений с опережением к решениям систем стохастических уравнений в θ-интегралах.

Теорема. Пусть $\theta \in [1/2,\ 1]$, $f^{ij} \in C_B^2(R^{r+1})$, $g^i \in C_B^1(R^{r+1})$, $i=\overline{1,r}$, $j=\overline{1,m}$. Если $n\to\infty$, $h_n \to 0$ так что $1/n^{3/2} = o(h_n)$ причем «начальное условие» задачи Коши (1) $X_n^{0i}(t)$ является $\Phi_{t+1/n}$-измеримым и $\sup_{t\in[0,h_n)} E[X_n^{0i}(t) - x_i]^2 \to 0$ для любого $i=\overline{1,r}$, то для сходимости последовательности $X_n(t)$ решений задачи Коши (1) к решениям (2) в

$L^2(\Omega, A, P)$ и равномерно по $t \in T$ необходимо и достаточно, чтобы сходились числовые последовательности $K_i(n, h_n)$.

Литература

1. Wong E., Zakai M. On the relationship between ordinary and stochastic differential equations // Internat. J. Engin. Sci. – 1965. – Vol.3. – P.213-229.
2. Мацкявичюс В. Некоторые аппроксимации стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений // Лит. мат. сб. – Т.18, №3 – С.101-108.
3. Лазакович Н.В. //Доклады АН Беларуси. – 1995 –Т.39 № 3 – С. 20-22.
4. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П. //Теория вероятности и ее применение. – 1996. – Т.41, № 4 – С. 785-809.
5. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П., Яблонский О.Л. //Литовский математический сборник. – 1999. – Т.39, № 2 – С. 248-256.
6. Лазакович Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов //Доклады АН Беларуси. – 1994. – Т.38, № 5. – С. 23–27.
7. Яблонский О.Л. Классификация способов аппроксимации стохастических интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов // Доклады НАН Беларуси. – 2000. – Т.44, №2. – С.22-26.

РОБАСТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРАХ ПРОЦЕССА AR(1)

Кишилов Д.В., БГУ, Минск

1. Математическая модель. Построение теста

В данной работе предложен устойчивый к искажениям вида Тьюки-Хьюбера последовательный тест для проверки простых гипотез о параметрах авторегрессии первого порядка. С помощью компьютерного моделирования проведен сравнительный анализ построенного теста с тестом Вальда.

Пусть наблюдается последовательность случайных величин $x_1, x_2, \dots$, удовлетворяющая уравнению авторегрессии первого порядка:

$$x_0 = 0,\ x_n = a x_{n-1} + \omega_n,\ n \ge 1, \tag{1}$$

где ω_n - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $P(x)$, $E\{\omega_n\} = 0$, $E\{\omega_n^2\} = \sigma^2$.

Пусть проверяются две простые гипотезы о параметрах (1): $H_0 : a = a_0, P(\cdot) = P_0(\cdot)$, $H_1 : a = a_1, P(\cdot) = P_1(\cdot)$, где $P_0(\cdot), P_1(\cdot)$ - некоторые функции распределения с плотностями $p_0(\cdot)$ и $p_1(\cdot)$ соответственно, $|a_0|,|a_1| < 1$, $\int \omega dP_k(\omega) = 0$, $0 < \int \omega^2 dP_k(\omega) = \sigma_k^2 < \infty$, $k = 0,1$.

Обозначим логарифм отношения правдоподобия $\Lambda_n = \Lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{t=1}^{n} \lambda(x_{t-1}, x_t)$, $\lambda(x, y) = \log \dfrac{p_1(y - a_1 x)}{p_0(y - a_0 x)}$. Согласно тесту Вальда [1], по *n* наблюдениям (*n*=1,2,…) принимается решение

$$d_n = 1_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_n) + 2 \cdot 1_{(C_-, C_+)}(\Lambda_n), \tag{2}$$

где $1_A(\cdot)$ - индикаторная функция множества *A*. Решения $d_n = 0$ и $d_n = 1$ означают остановку процесса наблюдения и принятие соответствующей гипотезы. Решение $d_n = 2$