$L^2(\Omega, A, P)$ и равномерно по $t \in T$ необходимо и достаточно, чтобы сходились числовые последовательности $K_i(n, h_n)$.

**Литература**


1. Wong E., Zakai M. On the relationship between ordinary and stochastic differential equations // Internat. J. Engin. Sci. – 1965. – Vol.3. – P.213-229.
2. Мацкявичюс В. Некоторые аппроксимации стохастических интегралов и решений стохастических дифференциальных уравнений // Лит. мат. сб. – Т.18, №3 – С.101-108.
3. Лазакович Н.В. //Доклады АН Беларуси. – 1995 –Т.39 № 3 – С. 20-22.
4. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П. //Теория вероятности и ее применение. – 1996. – Т.41, № 4 – С. 785-809.
5. Лазакович Н.В., Сташуленок С.П., Яблонский О.Л. //Литовский математический сборник. – 1999. – Т.39, № 2 – С. 248-256.
6. Лазакович Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов //Доклады АН Беларуси. – 1994. – Т.38, № 5. – С. 23–27.
7. Яблонский О.Л. Классификация способов аппроксимации стохастических интегралов в алгебре обобщенных случайных процессов // Доклады НАН Беларуси. – 2000. – Т.44, №2. – С.22-26.


## РОБАСТНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ ПРОВЕРКА ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ О ПАРАМЕТРАХ ПРОЦЕССА AR(1)

*Кишилов Д.В., БГУ, Минск*

### 1. Математическая модель. Построение теста

В данной работе предложен устойчивый к искажениям вида Тьюки-Хьюбера последовательный тест для проверки простых гипотез о параметрах авторегрессии первого порядка. С помощью компьютерного моделирования проведен сравнительный анализ построенного теста с тестом Вальда.

Пусть наблюдается последовательность случайных величин $x_1, x_2, \ldots$, удовлетворяющая уравнению авторегрессии первого порядка:

$$x_0 = 0,\ x_n = a x_{n-1} + \omega_n,\ n \geq 1, \tag{1}$$

где $\omega_n$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $P(x)$, $E\{\omega_n\} = 0$, $E\{\omega_n^2\} = \sigma^2$.

Пусть проверяются две простые гипотезы о параметрах (1): $H_0 : a = a_0, P(\cdot) = P_0(\cdot)$, $H_1 : a = a_1, P(\cdot) = P_1(\cdot)$, где $P_0(\cdot), P_1(\cdot)$ - некоторые функции распределения с плотностями $p_0(\cdot)$ и $p_1(\cdot)$ соответственно, $|a_0|, |a_1| < 1$, $\int \omega dP_k(\omega) = 0$, $0 < \int \omega^2 dP_k(\omega) = \sigma_k^2 < \infty$, $k = 0,1$.

Обозначим логарифм отношения правдоподобия $\Lambda_n = \Lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{t=1}^{n} \lambda(x_{t-1}, x_t)$, $\lambda(x, y) = \log \dfrac{p_1(y - a_1 x)}{p_0(y - a_0 x)}$. Согласно тесту Вальда [1], по *n* наблюдениям (*n*=1,2,…) принимается решение

$$d_n = 1_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_n) + 2 \cdot 1_{(C_-, C_+)}(\Lambda_n), \tag{2}$$

где $1_A(\cdot)$ - индикаторная функция множества *A*. Решения $d_n = 0$ и $d_n = 1$ означают остановку процесса наблюдения и принятие соответствующей гипотезы. Решение $d_n = 2$

означает, что нужно взять ($n$+1)-ое наблюдение. Пороги $C_-, C_+ \in R$, $C_- < 0 < C_+$, являются параметрами теста.

Пусть гипотетическая модель подвержена искажениям Тьюки-Хьюбера [2]: фактическая функция распределения $\omega_n$ при верной гипотезе $H_k$ имеет вид:

$$\overline{P}_k(\omega) = (1-\varepsilon_k)P_k(\omega) + \varepsilon_k \widetilde{P}_k(\omega),\ \omega \in R, k = 0,1, \qquad (3)$$

где $\varepsilon_k$ - неизвестные вероятности появления выброса, $\widetilde{P}_k(\cdot)$ - произвольное засоряющее распределение, удовлетворяющее условиям $\widetilde{P}_k(\cdot) \neq P_k(\cdot)$, $\int \omega d\widetilde{P}_k(\omega) = 0$, $\int \omega^2 d\widetilde{P}_k(\omega) = \widetilde{\sigma}_k^2 < \infty$.

Для того чтобы сделать тест (2) более устойчивым к искажениям вида (3), воспользуемся подходом, предложенным в [2]. Решение $d_n$ заменим на решение

$$d_n^g = 1_{[C_+,+\infty)}(\Lambda_n^g) + 2 \cdot 1_{(C_-,C_+)}(\Lambda_n^g), \qquad (4)$$

где $\Lambda_n^g = \sum_{t=1}^{n} g(\lambda(x_{t-1}, x_t))$, $g(z) = g_- \cdot 1_{(-\infty, g_-]}(z) + g_+ \cdot 1_{[g_+,+\infty)} + z \cdot 1_{(g_-,g_+)}$, и $g_-, g_+ \in R$, $g_- < g_+$, - параметры теста.

Оценки характеристик теста (4) (вероятностей ошибок и условных средних длин последовательности) могут быть получены с использованием подхода, предложенного в работе [3].

Мы предлагаем выбирать параметры $g_-, g_+$ следующим образом:

$$g_{-[+]} = E_{0[1]}\lambda(x_{n-1}, x_n) - [+]3\sqrt{E_{0[1]}\lambda^2(x_{n-1}, x_n)}, \qquad (5)$$

где $E_k$, $k \in \{0,1\}$, обозначает математическое ожидание, вычисленное на стационарном распределении $x_n$ при верной гипотезе $H_k$. Выбирая параметры в соответствии с (5), мы снижаем чувствительность теста (4) к большим по модулю значениям $\lambda(x_{n-1}, x_n)$, которые могут появиться из-за присутствия выбросов. В то же время средняя длина последовательности до принятия решения (4) в условиях гипотетической модели увеличится незначительно по сравнению с тестом (2), так как только небольшой процент слагаемых в $\Lambda_n^g$ будет «усечен» функцией $g(z)$.

**2. Результаты численных экспериментов**

С помощью имитационного моделирования был проведен сравнительный анализ тестов (2) и (4). Рассматривался следующий частный случай: $a_0 = 0.2$, $a_1 = -0.2$, $P_0 = P_1 = N(0,\sigma)$, $\widetilde{P}_0 = \widetilde{P}_1 = N(0,\widetilde{\sigma})$, $\sigma = 1$, $\widetilde{\sigma} = 10$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \varepsilon$. Пороги $C_-, C_+$ вычислялись по формулам $C_+ = \log(1-\beta_0)/\alpha_0$, $C_- = \log\beta_0/(1-\alpha_0)$, где $\alpha_0$, $\beta_0$ - “желаемые” вероятности ошибок первого и второго рода. Для пяти различных пар значений $\alpha_0$, $\beta_0$ методом Монте-Карло были вычислены оценки вероятностей ошибок $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ и условных средних длин последовательности $\hat{t}^{(0)}$, $\hat{t}^{(1)}$ теста (2), а также оценки $\hat{\alpha}_g$, $\hat{\beta}_g$, $\hat{t}_g^{(0)}$, $\hat{t}_g^{(1)}$ соответствующих характеристик теста (4). Количество экспериментов для каждого набора параметров составило $N = 20000$. Пороги теста (4) $g_-, g_+$ вычислялись по формулам (5). Результаты численных экспериментов приведены в таблицах 1 и 2 для двух случаев: гипотетическая модель не искажена ($\varepsilon = 0$); модель искажена, вероятность появления выброса составляет $\varepsilon = 0.1$. Результаты компьютерного моделирования позволяют сделать вывод, что «робастифицированный» тест (4) обеспечивает необходимые вероятности ошибок при наличии искажений в модели (отметим, что они практически не превосходят $\alpha_0$, $\beta_0$) за счет приемлемого увеличения средней длины последовательности.

**Таблица 1. Сравнение вероятностей ошибок**

| $\alpha_0$ | $\beta_0$ | $\hat{\alpha}$ | $\hat{\alpha}_g$ | $\hat{\beta}$ | $\hat{\beta}_g$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon = 0$ | | | | | |
| 0.01 | 0.01 | 0.0069 | 0.006 | 0.0071 | 0.0052 |
| 0.01 | 0.05 | 0.0069 | 0.0049 | 0.0357 | 0.032 |
| 0.01 | 0.1 | 0.0067 | 0.006 | 0.0652 | 0.0654 |
| 0.05 | 0.05 | 0.0368 | 0.0330 | 0.0368 | 0.0348 |
| 0.1 | 0.1 | 0.0741 | 0.072 | 0.0734 | 0.0678 |
| $\varepsilon = 0.1$ | | | | | |
| 0.01 | 0.01 | 0.0491 | 0.0127 | 0.0456 | 0.0126 |
| 0.01 | 0.05 | 0.0437 | 0.0119 | 0.1085 | 0.0524 |
| 0.01 | 0.1 | 0.0427 | 0.0138 | 0.1584 | 0.1034 |
| 0.05 | 0.05 | 0.1027 | 0.0565 | 0.1038 | 0.0534 |
| 0.1 | 0.1 | 0.1423 | 0.0922 | 0.1466 | 0.0973 |

**Таблица 2. Сравнение средней длины последовательности**

| $\alpha_0$ | $\beta_0$ | $\hat{t}^{(0)}$ | $\hat{t}_g^{(0)}$ | $\hat{t}^{(1)}$ | $\hat{t}_g^{(1)}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon = 0$ | | | | | |
| 0.01 | 0.01 | 62.45 | 65.23 | 61.89 | 65.22 |
| 0.01 | 0.05 | 43.57 | 44.66 | 59.20 | 61.76 |
| 0.01 | 0.1 | 34.69 | 35.88 | 55.43 | 58.64 |
| 0.05 | 0.05 | 40.64 | 42.25 | 40.34 | 42.00 |
| 0.1 | 0.1 | 29.68 | 30.65 | 29.63 | 30.89 |
| $\varepsilon = 0.1$ | | | | | |
| 0.01 | 0.01 | 37.64 | 48.26 | 37.13 | 48.73 |
| 0.01 | 0.05 | 27.15 | 33.05 | 34.05 | 45.34 |
| 0.01 | 0.1 | 22.74 | 26.94 | 31.43 | 41.44 |
| 0.05 | 0.05 | 24.71 | 30.61 | 24.59 | 30.58 |
| 0.1 | 0.1 | 18.63 | 22.35 | 18.66 | 22.21 |

**Литература**

1. Вальд А. Последовательный анализ. – М.: Физматгиз, 1960.
2. Хьюбер П. Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984.
3. Кишилов Д.В. Анализ вероятностных характеристик последовательного теста Вальда для проверки простых гипотез о параметрах процесса авторегрессии // Теория вероятностей, случ. процессы, мат. статистика и приложения. Сб. статей межд. конф. - Минск: БГУ, 2005, с. 138 -143.