К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ИТЕРАЦИИ РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ НЕ ЕДИНСТВЕННОГО РЕШЕНИЯ.

Матысик О.В., Голубцов И.А., БрГУ им. А.С. Пушкина, Брест

1.Введение

Среди математических задач выделяется большой класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они принадлежат к классу некорректно поставленных задач. Для их решения находят применение итеративные методы, которые легко программируются на ЭВМ. В данной работе предлагается новый итеративный метод для решения некорректных задач.

2.Постановка задачи

Решается операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным и самосопряженным оператором $A: H \to H$, в предположении, что нуль не является собственным значением оператора A. Причем $0 \in S_A$, то есть задача некорректна. Если решение уравнения (1) существует, то для его отыскания предлагается явный итеративный метод

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + \alpha A y,\ x_0 = 0. \tag{2}$$

3.Случай не единственного решения в методе (2) решения операторных уравнений

Покажем, что метод (2) пригоден и тогда, когда $\lambda = 0$ является собственным значением оператора A (в этом случае уравнение (1) имеет не единственное решение). Обозначим через $N(A) = \{x \in H / Ax = 0\}$, $M(A)$ – ортогональное дополнение ядра $N(A)$ до H. Пусть $P(A)x$ – проекция $x \in H$ на $N(A)$, а $\Pi(A)x$ – проекция $x \in H$ на $M(A)$. Справедлива

Теорема. Пусть $A \geq 0,\ y \in H,\ 0 < \alpha < 2\|A\|^{-2}$, тогда для итеративного процесса (2) верны следующие утверждения

а) $Ax_n \to \Pi(A)y,\ \|Ax_n - y\| \to J(A, y) = \inf\limits_{x \in H} \|Ax - y\|$,

б) (2) сходится тогда и только тогда, когда уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. В последнем случае $x_n \to P(A)x_0 + \hat{x}$, где $\hat{x}$ – минимальное решение уравнения.

Доказательство

Применив оператор A к (2), получим

$Ax_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2[P(A)y + \Pi(A)y - Ax_{n-1}]$, где $y = P(A)y + \Pi(A)y$. Так как $AP(A)y = 0$, то $Ax_n = Ax_{n-1} + \alpha A^2[\Pi(A)y - Ax_{n-1}]$.

Последнее равенство запишется в виде $\nu_n = \nu_{n-1} - \alpha A^2 \nu_{n-1}$, где $\nu_n = Ax_n - \Pi(A)y$ и $\nu_n \in M(A)$. Отсюда $\nu_n = (E - \alpha A^2)^n \nu_0$. Имеем $A^2 \geq 0$ и A^2–

положителен в $M(A)$, то есть $(Ax,x)>0 \quad \forall x \in M(A)$. Так как $0<\alpha<2\|A\|^{-2}$, то $\left\|E-\alpha A^2\right\|<1$, поэтому справедлива цепочка неравенств

$$\|\nu_n\| = \left\|(E-\alpha A^2)^n \nu_0\right\| = \left\|\int_0^M (1-\alpha\lambda^2)^n dE_\lambda \nu_0\right\| \le \left\|\int_0^{\delta_0} (1-\alpha\lambda^2)^n dE_\lambda \nu_0\right\| +$$

$$+\left\|\int_{\delta_0}^M (1-\alpha\lambda^2)^n dE_\lambda \nu_0\right\| \le \left\|\int_0^{\delta_0} dE_\lambda \nu_0\right\| + q^n(\delta_0)\left\|\int_{\delta_0}^M dE_\lambda \nu_0\right\| =$$

$$= \left\|E_{\delta_0}\nu_0\right\| + q^n(\delta_0)\left\|\nu_0 - E_{\delta_0}\nu_0\right\| < \varepsilon \text{ при } \delta_0 \to 0 \text{ и } n \to \infty.$$

Следовательно, $\nu_n \to 0$, откуда $Ax_n \to \Pi(A)y$ и $\Pi(A)y \in A(H)$.

$\|Ax_n - y\| \to \|\Pi(A)y - y\| = \|P(A)y\| = J(A,y)$.

Итак, утверждение а) доказано. Докажем утверждение б).

Пусть процесс (2) сходится, покажем, что уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо. Из сходимости $\{x_n\} \in H$ к $z \in H$ и из а) следует $Ax_n \to Az = \Pi(A)y$, следовательно, $\Pi(A)y \in A(H)$ и уравнение $\Pi(A)y = Ax$ разрешимо.

Пусть теперь $\Pi(A)y \in A(H)$ (уравнение $Ax = \Pi(A)y$ разрешимо), следовательно, $\Pi(A)y = A\hat{x}$, где $\hat{x}$ – минимальное решение уравнения $Ax = y$ (оно единственно в $M(A)$). Тогда (2) примет вид

$$x_n = x_{n-1} + \alpha A[\Pi(A)y - Ax_{n-1}] = x_{n-1} + \alpha A(A\hat{x} - Ax_{n-1}) =$$
$$= x_{n-1} + \alpha A^2(\hat{x} - x_{n-1}).$$

Разобьем последнее равенство на два:

$$P(A)x_n = P(A)x_{n-1} + \alpha P(A)A^2(\hat{x} - x_{n-1}) = P(A)x_{n-1} + \alpha A\ [AP(A)(\hat{x} -$$
$$- x_{n-1})] = P(A)x_{n-1} = P(A)x_0, \text{ так как } AP(A)(\hat{x} - x_{n-1}) = 0.$$

$$\Pi(A)x_n = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha\Pi(A)A^2(x_{n-1} - \hat{x}) = \Pi(A)x_{n-1} -$$
$$- \alpha A^2[\Pi(A)x_{n-1} - \Pi(A)\hat{x}] = \Pi(A)x_{n-1} - \alpha A^2[\Pi(A)x_{n-1} - \hat{x}],$$

так как $\hat{x} \in M(A)$. Обозначим $\omega_n = \Pi(A)x_n - \hat{x}$, тогда $\omega_n = \omega_{n-1} - \alpha A^2\omega_{n-1}$ и, аналогично ν_n, можно показать $\omega_n \to 0$, $n \to \infty$. Следовательно, $\Pi(A)x_n \to \hat{x}$. Отсюда $x_n = \Pi(A)x_n + + P(A)x_n \to P(A)x_0 + \hat{x}$, ч.т.д.

Замечание. Так как у нас $x_0 = 0$, то $x_n \to \hat{x}$, то есть процесс (2) обеспечивает сходимость к нормальному решению, то есть к решению с минимальной нормой.