

TARASIUK N.P., LUTSENKO E.V., GLADYSHCHUK A.A. Calculation of distribution of intensity of radiation of semiconductor lasers in near and far zones

Calculation of distribution of intensity of radiation of semiconductor lasers in near and far zones is presented. Conformity of the measured intensity of radiation in a far zone with the calculated one at different coefficients of inclination used by different authors is represented and discussed. For the characteristic of distribution of radiation in a far zone of the laser on the basis of a symmetric three-layer planar waveguide with active area GaAs the comers measured at a level of half of the maximal intensity of radiation were calculated. Good concurrence of the measured intensity of radiation in a far zone with the calculated one is received, allowing to define the valid distribution of an electric field inside structure.

УДК 531

Чопчиц И.Н., Чопчиц Н.И.

ДВИЖЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ СТРУКТУР ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ИДЕАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

Введение. Традиционные постановки задачи о движении протяжённого тела без внутренних степеней свободы по шероховатой поверхности ограничивается тремя случаями:

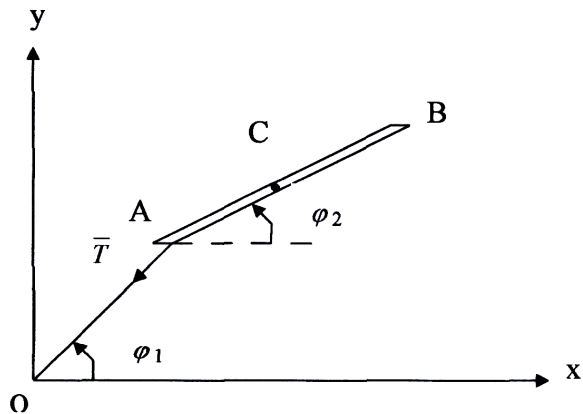
- движение тела с известной начальной скоростью центра масс и начальной угловой скоростью при наличии только силы тяжести и силы реакции опоры;
- движение тела, когда к нему в заданной точке приложена дополнительная постоянная внешняя сила;
- движение в случае, когда заданная точка тела движется по заданному закону (последние две задачи называются задачами транспортировки).

Движение даже прямолинейного стержня в последних двух случаях может оказаться как простым, так и сложным: могут возникнуть автоколебательные режимы, неустойчивости с элементами динамического хаоса и т.д. Последние два сценария движения только с натяжкой можно признать реалистичными, поэтому ниже рассматривается практически легко реализуемый вариант движения тонкого однородного прямолинейного стержня по горизонтальной шероховатой плоскости при наличии идеальной связи между стержнем и другим телом, движущимся по вертикали.

1. Постановка задачи и вывод уравнений движения. На рисунке показан стержень АВ массой m и длиной $2l$, движущийся по горизонтальной плоскости xy , коэффициент трения о которую равен μ , при этом к точке А стержня прикреплена невесомая нерастяжимая нить, проходящая через отверстие в точке О; на другом конце нити

находится тело массой M , движущееся вдоль оси OZ, перпендикулярной плоскости рисунка (g - ускорение силы тяжести, $g_z = -g$). Аналогично [1] для проекций скорости точки стержня с лонгальной координатой $\xi \in (-l, l)$, отсчитываемой от центра масс С имеем:

$$V_x = \dot{x}_c - \xi \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2, \quad V_y = \dot{y}_c + \xi \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2.$$



Поэтому для проекций силы трения, действующей на стержень имеем:

$$F_{mpx} = -\mu \frac{mg}{2l} \int_{-l}^l \frac{(\dot{x}_c - \xi \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2) d\xi}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 2\xi \dot{\varphi}_2 (\dot{x}_c \sin \varphi_2 - \dot{y}_c \cos \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \xi^2}},$$

$$F_{mry} = -\mu \frac{mg}{2l} \int_{-l}^l \frac{(\dot{y}_c + \xi \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) d\xi}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 2\xi \dot{\varphi}_2 (\dot{x}_c \sin \varphi_2 - \dot{y}_c \cos \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \xi^2}}.$$

Для момента сил трения относительно оси, проходящей через центр масс С и параллельной оси OZ, в соответствии с выражением $dM_{mpcz} = \xi \cos \varphi_2 dF_{mry} - \xi \sin \varphi_2 dF_{mpx}$ получим:

$$M_{mpcz} = -\mu \frac{mg}{2l} \int_{-l}^l \frac{(\dot{y}_c + \xi \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) \xi \cos \varphi_2 - (\dot{x}_c - \xi \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2) \xi \sin \varphi_2}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 2\xi \dot{\varphi}_2 (\dot{x}_c \sin \varphi_2 - \dot{y}_c \cos \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \xi^2}} d\xi.$$

Производя интегрирование по ξ , при котором остальные величины постоянны, получим для мгновенных значений сил трения и указанного выше момента сил трения выражения:

$$F_{mpx} = \frac{\mu mg \sin \varphi_2}{2l \dot{\varphi}_2} (\sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2\dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 - 2\dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}) - \frac{\mu mg}{2l |\dot{\varphi}_2|} \cos \varphi_2 (\dot{x}_c \cos \varphi_2 + \dot{y}_c \sin \varphi_2) \times$$

$$\times \ln \left| \frac{|\dot{\varphi}_2| \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2\dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} + \dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)}{|\dot{\varphi}_2| \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 - 2\dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - \dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)} \right| \quad (1)$$

Чопчиц И.Н., Чопчиц Н.И., кафедра физики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Физика, математика, информатика

$$\begin{aligned}
 F_{mpy} &= \frac{\mu mg \cos \varphi_2}{2l\dot{\varphi}_2} (\sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 - 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - \\
 &- \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}) - \frac{\mu mg}{2l|\dot{\varphi}_2|} \sin \varphi_2 (\dot{y}_c \sin \varphi_2 + \dot{x}_c \sin \varphi_2) \times \\
 &\times \ln \frac{|\dot{\varphi}| \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} + l\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)}{|\dot{\varphi}| \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 - 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - l\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)} \\
 M_{mpcz} &= -\frac{\mu mg}{4l\dot{\varphi}_2} (l\dot{\varphi}_2 + (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)) \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 - 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - \\
 &- \frac{\mu mg}{4l\dot{\varphi}_2^2} (l\dot{\varphi}_2 - (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)) \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - \\
 &- \frac{\mu mg}{4l\dot{\varphi}_2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 5(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)) \times \\
 &\times \ln \frac{|\dot{\varphi}| \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} + l\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)}{|\dot{\varphi}| \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 - 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - l\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)}
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 M_{mpcz} &= -\frac{\mu mg}{4l\dot{\varphi}_2} (l\dot{\varphi}_2 + (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)) \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 - 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - \\
 &- \frac{\mu mg}{4l\dot{\varphi}_2^2} (l\dot{\varphi}_2 - (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)) \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - \\
 &- \frac{\mu mg}{4l\dot{\varphi}_2} (\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 5(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)) \times \\
 &\times \ln \frac{|\dot{\varphi}| \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} + l\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)}{|\dot{\varphi}| \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 - 2\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - l\dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение движения центра масс стержня, уравнение вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс, и уравнение движения висящего груза будут иметь вид:

$$\begin{cases}
 m\ddot{x}_c = -T \cos \varphi_1 + F_{mpx} \\
 m\ddot{y}_c = -T \sin \varphi_1 + F_{mpy} \\
 \frac{m l^2}{3} \ddot{\varphi}_2 = T l \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + M_{mpcz} \\
 M\ddot{z} = -Mg + T,
 \end{cases}$$

где учтено, что момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной оси Z, равен $I_{cz} = \frac{m l^2}{3}$.

Рассматриваемая система при условии нерастяжимости и невесомости нити, соединяющей точку А с грузом массой М, имеет три степени свободы. Рассматривая в качестве обобщенных координат величины (X_c, Y_c, φ_2) , имеем для координат точки А:

$$x_A = x_c - l \cos \varphi_2, \quad y_A = y_c - l \sin \varphi_2. \tag{5}$$

$$\text{Тогда } \cos \varphi_1 = \frac{x_c - l \cos \varphi_2}{\sqrt{\Phi}}, \quad \sin \varphi_1 = \frac{y_c - l \sin \varphi_2}{\sqrt{\Phi}},$$

$$\text{где } \Phi = x_c^2 + y_c^2 + l^2 - 2l(x_c \cos \varphi_2 + y_c \sin \varphi_2) \tag{6}$$

Тогда уравнение вращательного движения переписывается в виде:

$$\frac{m l^2}{3} \ddot{\varphi}_2 = T l \left(\frac{y_c - l \sin \varphi_2}{\sqrt{\Phi}} \cos \varphi_2 - \frac{x_c - l \cos \varphi_2}{\sqrt{\Phi}} \sin \varphi_2 \right) + M_{mpcz}$$

или

$$\frac{m l^2}{3} \ddot{\varphi}_2 = T l \frac{y_c \cos \varphi_2 - x_c \sin \varphi_2}{\sqrt{\Phi}} + M_{mpcz}. \tag{7}$$

Условие нерастяжимости нити дает

$$-z + \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = l_0,$$

где l_0 - длина нити, что с учетом (5) дает

$$-z + \sqrt{\Phi} = l_0.$$

Дифференцируя дважды по времени, получим

$$\ddot{z} = \frac{2\Phi\ddot{\Phi} - \dot{\Phi}^2}{3 \cdot 4\Phi^2},$$

$$\text{где } \dot{\Phi} = x_c \dot{x}_c + y_c \dot{y}_c - l(\dot{x}_c \cos \varphi_2 + \dot{y}_c \sin \varphi_2) - l\dot{\varphi}_2(y_c \cos \varphi_2 - x_c \sin \varphi_2), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\Phi} &= \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + x_c \ddot{x}_c + y_c \ddot{y}_c - l(\ddot{x}_c \cos \varphi_2 + \ddot{y}_c \sin \varphi_2) - \\
 &- 2l\dot{\varphi}_2(y_c \cos \varphi_2 - x_c \sin \varphi_2) - l\ddot{\varphi}_2(y_c \cos \varphi_2 - x_c \sin \varphi_2) + \\
 &+ l\dot{\varphi}_2^2(y_c \sin \varphi_2 + x_c \cos \varphi_2)
 \end{aligned} \tag{9}$$

Таким образом, полная система уравнений, описываемая движением системы, имеет вид:

$$\begin{cases}
 m\ddot{x}_c = -T \frac{x_c - l \cos \varphi_2}{\sqrt{\Phi}} + F_{mpx} \\
 m\ddot{y}_c = -T \frac{y_c - l \sin \varphi_2}{\sqrt{\Phi}} + F_{mpy} \\
 \frac{m l^2}{3} \ddot{\varphi}_2 = T l \frac{y_c \cos \varphi_2 - x_c \sin \varphi_2}{\sqrt{\Phi}} + M_{mpcz} \\
 \frac{M(2\Phi\ddot{\Phi} - \dot{\Phi}^2)}{3 \cdot 4\Phi^2} = Mg + T,
 \end{cases} \tag{10}$$

где выражения F_{mpx} , F_{mpy} , M_{mpcz} и Φ даются формулами (1)-(3) и (6). Система должна решаться при соответствующих начальных значениях обобщенных координат и скоростей и результатом её решения является закон движения центра масс системы $X_c = X_c(t)$, $Y_c = Y_c(t)$ и вращения вокруг проходящей через него оси $\varphi_2 = \varphi_2(t)$. Первые три уравнения системы (10) достаточно сильно упрощаются для случая, когда вместо стержня имеется две частицы массами $m/2$ каждая, находящиеся в точках А и В и соединенные невесомым стержнем. Эти уравнения при этом приобретают вид:

$$m\ddot{x}_c = -T \frac{x_c - l \cos \varphi_2}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + l^2 - 2l(x_c \cos \varphi_2 + y_c \sin \varphi_2)}} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\mu \frac{m}{2} g \left(\frac{\dot{x}_c + l\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 2l\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2 + l^2\dot{\varphi}_2^2)}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\dot{x}_c - l\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + 2l\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2 + l^2\dot{\varphi}_2^2)}} \right) \\
 m\ddot{y}_c = & -T \frac{y_c - l \cos \varphi_2}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + l^2 - 2l(x_c \cos \varphi_2 + y_c \sin \varphi_2)}} - \\
 & -\mu \frac{m}{2} g \left(\frac{\dot{y}_c - l\dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 2l\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2 + l^2\dot{\varphi}_2^2)}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\dot{y}_c + l\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + 2l\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) + l^2\dot{\varphi}_2^2}} \right) \\
 ml^2\ddot{\varphi}_2 = & Tl \frac{y_c \cos \varphi_2 - x_c \sin \varphi_2}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2 + l^2 - 2l(x_c \cos \varphi_2 + y_c \sin \varphi_2)}} + \\
 & +\mu \frac{m}{2} gl \left(\frac{\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2 - l\dot{\varphi}_2}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 2l\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) + l^2\dot{\varphi}_2^2}} + \right. \\
 & \left. + \frac{\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2 + l\dot{\varphi}_2}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + 2l\dot{\varphi}_2(\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) + l^2\dot{\varphi}_2^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Представляет интерес также редукция к двум степеням свободы, когда стержень АВ стягивается в точку массой m , находящуюся в центре масс С. Система уравнений (10) при этом упрощается и принимает вид:

$$\begin{cases}
 m\ddot{x}_c = -\mu mg \frac{\dot{x}_c}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}} - T \frac{x_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}} \\
 m\ddot{y}_c = -\mu mg \frac{\dot{y}_c}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}} - T \frac{y_c}{\sqrt{x_c^2 + y_c^2}} \\
 \frac{M(y_c^2 \dot{x}_c^2 + x_c^2 \dot{y}_c^2 + (x_c^2 + y_c^2)(x_c \ddot{x}_c + y_c \ddot{y}_c))}{(x_c^2 + y_c^2)^{\frac{3}{2}}} = Mg + T
 \end{cases} \quad (11)$$

Аналогично может быть рассмотрен двухзвенный стержень, состоящий из двух шарнирно соединенных частей при наличии или отсутствии в шарнире внутренних моментов.

Заключение. Ввиду сложности систем (10) и (11), описывающих движение системы, возможны лишь численные решения. Определенные проблемы представляют точки бифуркации систем, при этом существенную помощь оказывает использование аналитических решений в окрестностях точек бифуркации, полученные с помощью CAS Mathematica. Контроль корректности получаемых результатов может производиться также с использованием предельного перехода $\mu \rightarrow 0$ и с использованием специфических начальных условий. Например, для системы (11) при выполнении соотношений для начальных координат и скоростей следующего вида:

$$\begin{aligned}
 V_{cox} &= -\sqrt{\dot{x}_{co}^2 + \dot{y}_{co}^2} \frac{y_{co}}{\sqrt{x_{co}^2 + y_{co}^2}}, \\
 V_{coy} &= -\sqrt{\dot{x}_{co}^2 + \dot{y}_{co}^2} \frac{x_{co}}{\sqrt{x_{co}^2 + y_{co}^2}}, \\
 \frac{m(\dot{x}_{co}^2 + \dot{y}_{co}^2)}{\sqrt{x_{co}^2 + y_{co}^2}} &= Mg,
 \end{aligned}$$

и при $\mu = 0$ частица массой m движется по окружности, а частица массой M покоится, а при малых шевелениях начальных условий движение носит колебательный характер.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Чопчиц И.Н., Чопчиц Н.И. Моделирование поперечно-волновых движений с переносом массы // Вестник БрГТУ. - 2006 №5: Физика, математика, информатика. - С. 89-91.

Материал поступил в редакцию 18.03.08

CHOPCHYTS I.N., CHOPCHYTS N.I. Movement of one-dimensional structures on a rough surface at presence of ideal communications

The motion of uniform rectilinear peg on horizontal roughness surface with the ideal relationship with the other body moving on vertical surface was analysed in the work. Motion equations and their reductions were received.