

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ashkin A. History of optical trapping and manipulation of small neutral particle, atoms, and molecules // IEEE J. Quantum Electron, 2000.- Vol 6.- pp. 841-856.
2. Molloy J. E., Padgett M. J. Lights, action: optical tweezers // Contemp. Phys, 2002.-Vol. 43.- pp. 241-258.
3. Optical selection, manipulation, trapping and activation of a micro-gear structure for applications in micro-optical-electromechanical systems /R. C. Gauthier, R. N. Tait, H. Mende, C. Pawlowicz // Appl. Opt., 2001. -Vol. 40.- pp. 930-937.
4. Optical actuation of a bistable MEMS / M. Sulfridge, Taher Saif, N. Miller, K. O'Hara // J. Microelectromech. Syst. -2002.-Vol.11.- pp. 574-583.
5. Hühberger Metzger C., Karrai K. / Cavity cooling of a microlever // Nature, 2004.- Vol. 432.- pp.1002-1005.
6. Dragoman D., Dragoman M. Optical actuation of micromechanical tunneling structures with applications in spectrum analysis and optical computing // Applied Optics, 1999.- Vol.38.-pp. 6773- 6778.
7. Teraoka I., Arnold S. Enhancing the sensitivity of a whispering-gallery mode microsphere sensor by a high-refractive-index surface layer // J. Opt. Soc. Am. B., 2006.- Vol. 23.- pp 1434-1441.
8. Teraoka I., Arnold S. Theory of resonance shifts in TE and TM whispering gallery modes by nonradial perturbations for sensing applications // J. Opt. Soc. Am. B., 2006.- Vol. 23.-pp 1381-1389.
9. Shift of whispering-gallery modes in microspheres by protein adsorption / S. Arnold, M. Khoshsim, I. Teraoka, S. Holler, F. Vollmer // Opt. Lett, 2003.- Vol. 28.-pp. 272-274.
10. Teraoka I., Arnold S., Vollmer F. Perturbation approach to resonance shifts of whispering-gallery modes in a dielectric microsphere as a probe of a surrounding medium// J. Opt. Soc. Am. B., 2003.- Vol. 20.- pp. 1937-1946.
11. Laser-induced shape distortions of flowing droplets deduced from morphology-dependent resonances in fluorescence spectra /H.-M. Tzeng, M. B. Long, R. K. Chang, P. W. Barber // Opt. Lett.-1985.- Vol. 10.- pp. 209-211.
12. Strain-tunable high-Q optical microsphere resonator / V. S. Ilchenko, P. S. Volikov, V. L. Velichansky, F. Treussart, V. Lefèvre-Seguin, J. -M. Raimond, S. Haroche. // Opt. Commun. -1998.- Vol.145, pp. 86-90.
13. Lulevich V. V., Andrienko D., Vinogradova O. I. / Elasticity of polyelectrolyte multilayer microcapsules // J. Chem. Phys. -2004.- Vol. 120.- pp. 3822-3826.
14. Salt softening of polyelectrolyte multilayer microcapsules / O. V. Lebedeva, B. – S. Kim, K. Vasilev, O. I. Vinogradova // J. Colloid Interface Sci.-2005.- Vol. 284.- pp. 455-462.
15. Whispering Gallery Mode Emission from a Composite System of CdTe Nanocrystals and a Spherical Microcavity / Y.P. Rakovich, L. Yang, E. M. McCabe, J. F. Donegan, T. Perova, A. Moore, N. Gaponik, A. Rogach, // Semicond. Sci. Technol. -2003.-Vol.18.- pp. 914-918.
16. Fine structure of coupled optical modes in photonic molecules / Y. P. Rakovich, J. F. Donegan, M. Gerlach, A. L. Bradley, T. M. Connolly, J. J. Boland, N. Gaponik, A. L.Rogach // Phys. Rev. A-2004.- Vol.70.- pp. 051801-1-051801-4.
17. Formation of luminescent spherical core-shell particles by the consecutive adsorption of polyelectrolyte and CdTe(S) nanocrystals on latex colloids / A. S. Susha, F. Caruso, A. L. Rogach, G. B. Sukhorukov, A. Kornowski, H. Möhwald, M. Giersig, A. Eychemüller, H. Weller // Coll. Surf. A.-2000.- Vol.163.- pp. 39-44.
18. Emission properties of colloidal quantum dots on polyelectrolyte multilayers / V. K. Komarala, Y. P. Rakovich, A. L. Bradley, S. J. Byrne, S. A. Corr, Y. K. Gun'ko // Nanotechnology.-2006.- Vol. 17.- pp. 4117-4122.
19. Thiol-capping of CdTe nanocrystals: an alternative to organometallic synthetic routes / N. Gaponik, D. V. Talapin, A. L. Rogach, K. Hoppe, E. V. Shevchenko, A. Kornowski, A. Eychemüller, H. Weller // J. Phys. Chem. B.-2002.- Vol. 106.- pp. 7177-7185.
20. Chang R. K., Campillo A. J. Optical Processes in Microcavities.- NY.: World Scientific Pub Co Inc, 1996.
21. A. J. Trevitt, P. J. Wearne Observation of nondegenerate cavity modes for a distorted polystyrene microsphere // Opt. Lett.-2006.- Vol. 31.- pp. 2211-2213.
22. Time-independent perturbation for leaking electromagnetic modes in open systems with application to resonances in microdroplets / H. M. Lai, P. T. Leung, K. Young, P. W. Barber, S. C. Hill // Phys. Rev. A.-1990.- Vol. 41. – pp. 5187-5198.
23. Ren K. F., Grehan G., Gouesbet G. Prediction of reverse radiation pressure by generalized Lorenz-Mie theory // Appl. Opt.-1996.- Vol. 35.- pp. 2702-2710.

Материал поступил в редакцию 15.02.08

RAKOVICH J.P., RUSAKOV K.I., GLADYSHCHUK A.A. Splitting of styles of whispering gallery by pressure of light in the spherical microresonator with an elastic environment

We present a novel method to reveal azimuthal whispering gallery modes (WGMs) in a spherical microcavity coated with a nano-meter thick polyelectrolyte shell and one monolayer of CdTe semiconductor quantum dots. The new approach in this experiment is based on the deformation of the spherical shape in a non-contact way using the radiation pressure from a laser beam, which causes the lifting of the degeneracy of the WGMs. The resonance peak linewidth and splitting parameters can be efficiently controlled by the strength of the radiation pressure and the elastic properties of the surface shell.

УДК 535

Тарасюк Н.П., Луценко Е.В., Гладыщук А.А.

РАСЧЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ ЛАЗЕРОВ В БЛИЖНЕЙ И ДАЛЬНОЙ ЗОНАХ

Введение. Для эффективного применения полупроводниковых лазеров необходимо знание распределения излучения в дальней зоне. От излучения лазера в дальней зоне зависит способ ввода излучения в оптическое волокно. Распределение излучения лазера в дальней зоне характеризует распределение поля внутри волновода. Поэтому сравнение расчетной интенсивности излучения лазера в дальней зоне, основанной на вычислении поля в волноводе, с экспериментальной показывает, насколько точно выражение для амплитуды напряженности электрического поля в волноводе и значения показателей преломления слоев структуры описывают действительное распределение поля в волноводе [1].

В настоящей работе приводится расчет распределения интенсивности излучения полупроводникового лазера в ближней и даль-

ней зонах. Представлено и обсуждается соответствие измеренной интенсивности излучения в дальней зоне с рассчитанной при различных коэффициентах наклона, применяемых разными авторами. Для характеристики распределения излучения в дальней зоне лазера на основе симметричного трехслойного плоского волновода с активной областью GaAs вычислены углы, измеренные на уровне половины максимальной интенсивности излучения.

Расчет распределения интенсивности излучения лазеров в ближней и дальней зонах. Рассмотрим случай TE волн, распространяющихся в направлении оси z. Ось x направлена перпендикулярно слоям лазера. В данном случае электрическое поле имеет вид:

$$E_y = \phi(x, \beta) \exp(\pm i\beta z). \quad (1)$$

Тарасюк Николай Петрович, ст. преподаватель кафедры физики Брестского государственного технического университета. Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Луценко Евгений Викторович, кандидат физико-математических наук, ст. научный сотрудник Института физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси.

Тогда амплитуда $\phi(x, \beta)$ удовлетворяет уравнению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\beta^2 - k_0^2 n^2) \right) \phi(x, \beta) = 0, \quad (2)$$

где β – постоянная распространения моды, $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое

число, n – показатель преломления. Для нахождения β использовался алгоритм скоростного спуска [2].

Предположим, что полупространство $Z < 0$ занимает волновод. Для $Z > 0$ волновод открывается в свободное пространство. Пусть в волноводе вдоль оси Z на границу раздела $Z = 0$ падает, например, m -я направляемая мода с амплитудой a [3]

$$E_y^{pad} = a \phi_m(x) \exp(i\beta_m z). \quad (3)$$

Отраженную волну можно представить линейной комбинацией всех возможных решений уравнения

$$E_y^{omp} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) \exp(-i\beta_n z). \quad (4)$$

Вне волновода ($Z > 0$) поле волны находится решением уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \right) E_y^{diffp} = 0. \quad (5)$$

С учетом требования непрерывности касательной составляющей электрического поля на границе раздела $Z = 0$

$$E_y^{diffp} \Big|_{z=0} = \begin{cases} a \phi_m(x) + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi_n(x) & \text{при } |x| \leq l, \\ 0 & \text{при } |x| \geq l \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{\partial E_y^{diffp}}{\partial z} \Big|_{z=0} = i\beta_m a \phi_m(x) - i \sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta_n \phi_n(x) \text{ при } |x| < l.$$

Поле, удовлетворяющее условию излучения, можно представить в виде интеграла Фурье

$$E_y^{diffp}(x, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(q) e^{iqx + i\sqrt{k_0^2 - q^2} z} dq \quad (7)$$

Используя это выражение, из первого граничного условия получаем

$$a(q) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + a \delta_{nm}) \hat{\phi}_n(q), \quad (8)$$

где

$$\hat{\phi}_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^l \phi_n(x) \exp(-iqx) dx. \quad (9)$$

С учетом (7), (8) второе граничное условие приобретает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + a \delta_{nm}) \hat{\phi}_n(q) \sqrt{k_0^2 - q^2} \exp(iqx) dq = \\ & = - \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - a \delta_{nm}) \beta_n \phi_n(x), \quad |x| < l. \end{aligned} \quad (10)$$

Умножим обе части последнего равенства на $\hat{\phi}_k^*(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от $-l$ до $+l$, учитывая ортонормированность собственных функций. В результате получим систему бесконечного числа линейных алгебраических уравнений относительно искоемых коэффициентов разложения a_n

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (A_{nk} + \beta_k \delta_{nk}) = a (\beta_k \delta_{mk} - A_{mk}), \quad (11)$$

где матричные элементы A_{nk} определяются выражением

$$A_{nk} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_k^*(q) \sqrt{k_0^2 - q^2} \hat{\phi}_n(q) dq. \quad (12)$$

Распределение излучения в ближней зоне можно получить из выражения (7) приняв $Z = 0$:

$$E_y(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a(q) e^{iqx} dq. \quad (13)$$

Используя формулу (13), амплитуда излучения в дальней зоне имеет вид

$$E(\theta) = K(\theta) \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x, 0) e^{-ik_0 x \sin \theta} dx, \quad (14)$$

где θ – угол, отсчитанный от нормали (ось Z) к зеркалу лазера.

Коэффициент наклона $K(\theta)$ в (14) определяет связь амплитуды излучения в дальней зоне в данном угле θ с соответствующим Фурье-преобразованием амплитуды поля $E_y(x, 0)$ в ближней зоне.

Точное решение задач дифракции существует только для некоторых простых случаев. Поэтому общего выражения для коэффициента $K(\theta)$ не существует. Возможно, это явилось одной из причин, по которой использовались разные выражения:

$$\cos \theta \quad (15a)$$

$$2 \cos \theta (\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \beta/k_0) (\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta})^{-1} \quad (15b)$$

$$K(\theta) = \sqrt{\cos \theta} \quad (15в)$$

$$\cos \theta (\beta/k_0 + \cos \theta)^{-1} \quad (15г)$$

$$1 + \cos \theta \quad (15д)$$

где в (15б) n – показатель преломления обкладочных слоев волновода.

Множитель, определяемый (15а), называется угловым фактором Гюйгенса [1]. Наличие этого множителя приводит к значительному уменьшению вычисляемого значения интенсивности излучения, распространяющегося под большими углами. Хокэм [4] путем довольно сложных вычислений показал, что множитель $K(\theta)$ следует брать в виде (15б). Этот множитель ведет себя почти как $\cos \theta$. Киркби и Томпсон [5] использовали множитель, определяемый (15в), на том основании, что он “не противоречит каким-либо экспериментальным результатам”. Также выражения для коэффициента наклона в виде (15г) и (15д) были использованы в работах Батлера и Зоруччи [6] и де Ваарда [7] соответственно.

В дальней зоне отношение интенсивности излучения, распространяющегося в направлении, определяемом углом θ , к интенсивности излучения, распространяющегося в направлении $\theta = 0$, равно

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \frac{|E(\theta)|^2}{|E(0)|^2} = \frac{K^2(\theta) \left| \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x, 0) e^{-ik_0 x \sin \theta} dx \right|^2}{K^2(0) \left| \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x, 0) dx \right|^2}. \quad (16)$$

Результаты расчетов и их обсуждение. Применение формулы (16) рассмотрим на примере расчета распределения интенсивности излучения в дальней зоне лазера на основе симметричного трехслойного плоского волновода с активной областью GaAs. Значения показателей преломления GaAs и $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ выбирались из работы [1]. Профиль показателя преломления данного волновода и распределение интенсивности излучения лазера в ближней зоне представлены на рис. 1.

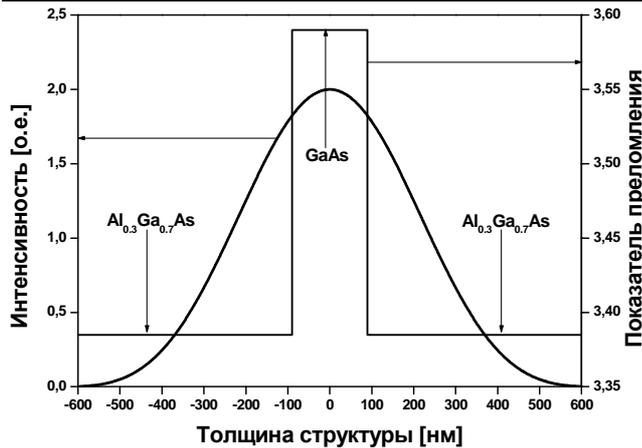


Рис. 1. Профиль показателя преломления и распределение интенсивности излучения лазера на основе симметричного трехслойного плоского волновода с активной областью GaAs в ближней зоне

Для характеристики распределения излучения лазера в дальней зоне используется расходимость луча, определяемая как полный угол, измеренный на уровне половины максимальной интенсивности. В таблице 1 приведены значения полного угла, измеренного на уровне половины максимальной интенсивности при различных коэффициентах $K(\theta)$, определяемых формулами (15а-д). Также для сравнения приведено значение угла при $K = 1$.

Таблица 1. Значения угла, определенного на уровне половины максимальной интенсивности при различных коэффициентах $K(\theta)$

$K(\theta)$	Угол, °
$\cos \theta$	47.3
$2 \cos \theta (\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \beta/k_0) \times (\cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta})^{-1}$	49.0
$\sqrt{\cos \theta}$	51.0
$\cos \theta (\beta/k_0 + \cos \theta)^{-1}$	48.8
$1 + \cos \theta$	51.1
1	56.1

Рассчитанные при различных коэффициентах $K(\theta)$ (сплошные линии) и экспериментальное (темные кружки) распределения интенсивности излучения лазера в дальней зоне показано на рисунке 2.

Из таблицы 1 и рисунка 2 видно, что наличие в коэффициенте $K(\theta)$ множителя $\cos \theta$ (формулы (15а), (15б), (15г)) уменьшает угол, измеренный на половине максимальной интенсивности и принимает минимальное значение 47.3° при $K(\theta) = \cos \theta$. Наличие этого множителя приводит к значительному уменьшению вычисляемого значения интенсивности излучения, распространяющегося под большими углами. При 80° интенсивность излучения в дальней зоне при $K(\theta) = \cos \theta$ более чем в 30 раз меньше, чем при $K = 1$. С учетом коэффициента $K(\theta) = 1 + \cos \theta$, а также при $K=1$ интенсивность излучения в дальней зоне при 90° не равна 0.

Угол, определенный на уровне половины максимальной интенсивности излучения в дальней зоне, измеренной экспериментально, равен 47.5°±1°.

Из сравнения этого угла с рассчитанными видно, что наиболее близкими являются углы 47.3°, 48.8° и 49.0° для коэффициентов

$K(\theta)$, вычисляемых соответственно по формулам (15а), (15г) и (15б). На рисунке 2 видно, что интенсивность излучения в дальней зоне, определенная при этих коэффициентах, хорошо согласуется с измеренной интенсивностью. Это позволяет определить действительное распределение электрического поля внутри структуры.

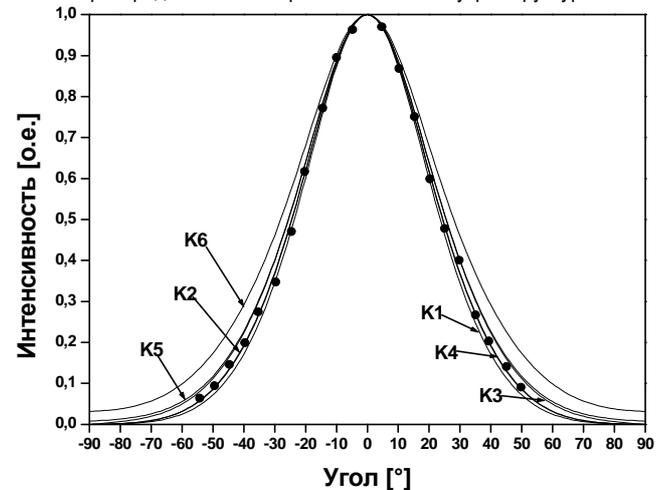


Рис. 2. Распределения интенсивности излучения лазера в дальней зоне при различных коэффициентах $K(\theta)$: K1 вычисляется по формуле (15а), K2 – (15б), K3 – (15в), K4 – (15г), K5 – (15д), K6=1. Сплошные линии – расчет, темные кружки – эксперимент

Заключение. Рассчитаны интенсивности излучения в ближней и дальней зонах полупроводникового лазера. Рассмотрены способы расчета интенсивности излучения лазера в дальней зоне при различных коэффициентах наклона. Для характеристики распределения излучения лазера на основе симметричного трехслойного плоского волновода с активной областью GaAs в дальней зоне рассчитаны углы, определяемые на уровне половины максимальной интенсивности излучения. Проведенные вычисления показали, что наличие коэффициента $K(\theta) = \cos \theta$ приводит к значительному уменьшению (более 30 раз при $\theta = 80^\circ$) вычисляемого значения интенсивности излучения, распространяющегося под большими углами по сравнению с коэффициентом $K = 1$. Получено хорошее совпадение измеренной интенсивности излучения в дальней зоне с рассчитанной, позволяющее определить действительное распределение электрического поля внутри структуры.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Н.С. Casey, Jr. and M. V. Panish. Heterostructure Lasers, Quantum Electronics Principles and Applications /Academic, New York, 1978, part A.
2. Н.П. Тарасюк, А.А. Гладышук, Е.В. Луценко. Фактор оптического ограничения и пороговые условия генерации оптически накачиваемых полупроводниковых лазеров на квантоворазмерных структурах InGaN/GaN, выращенных на кремниевых подложках// Вестник БГТУ. Физика, математика, химия. – 2002. – №5(17). – С. 8-13.
3. А. М. Гончаренко, В. А. Карпенко. Основы теории оптических волноводов. М.: Наука и техника, 1983. 237 с.
4. G. A. Hockham, "Radiation from a solid-state laser," *Electron.Lett.*, vol. 9, pp. 389-391, 1973.
5. P. A. Kirby and G. H. V. Thompson, "The effect of double hetero-junction waveguide parameters on the far field emission patterns of lasers," *Opt. Electron.*, vol. 4, pp. 323-324, 1972.
6. J. K. Butler and J. Zoroofchi, "Radiation fields of GaAs-(AlGa)As injection lasers," *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. QE-10, pp. 809-815. Oct. 1974.
7. P. J. de Waard, "Calculation of the far-field halfpower width and the mirror reflection coefficients of double-heterostructure lasers," *EZectron. Lett.*, vol. 11, pp. 11-12, 1975.

Материал поступил в редакцию 25.02.08

TARASIUК N.P., LUTSENKO E.V., GLADYSHCHUK A.A. Calculation of distribution of intensity of radiation of semiconductor lasers in near and far zones

Calculation of distribution of intensity of radiation of semiconductor lasers in near and far zones is presented. Conformity of the measured intensity of radiation in a far zone with the calculated one at different coefficients of inclination used by different authors is represented and discussed. For the characteristic of distribution of radiation in a far zone of the laser on the basis of a symmetric three-layer planar waveguide with active area GaAs the comers measured at a level of half of the maximal intensity of radiation were calculated. Good concurrence of the measured intensity of radiation in a far zone with the calculated one is received, allowing to define the valid distribution of an electric field inside structure.

УДК 531

Чопчиц И.Н., Чопчиц Н.И.

ДВИЖЕНИЕ ОДНОМЕРНЫХ СТРУКТУР ПО ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ИДЕАЛЬНЫХ СВЯЗЕЙ

Введение. Традиционные постановки задачи о движении протяжённого тела без внутренних степеней свободы по шероховатой поверхности ограничивается тремя случаями:

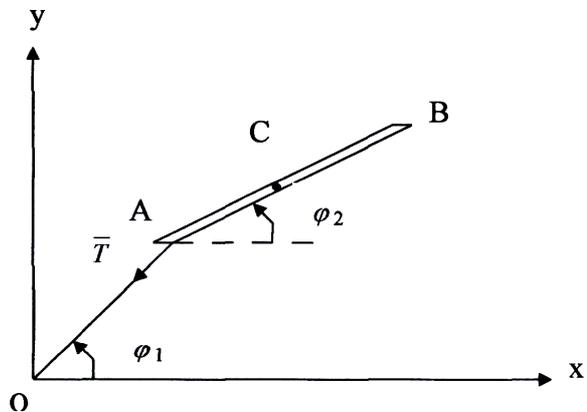
- движение тела с известной начальной скоростью центра масс и начальной угловой скоростью при наличии только силы тяжести и силы реакции опоры;
- движение тела, когда к нему в заданной точке приложена дополнительная постоянная внешняя сила;
- движение в случае, когда заданная точка тела движется по заданному закону (последние две задачи называются задачами транспортировки).

Движение даже прямолинейного стержня в последних двух случаях может оказаться как простым, так и сложным: могут возникнуть автоколебательные режимы, неустойчивости с элементами динамического хаоса и т.д. Последние два сценария движения только с натяжкой можно признать реалистичными, поэтому ниже рассматривается практически легко реализуемый вариант движения тонкого однородного прямолинейного стержня по горизонтальной шероховатой плоскости при наличии идеальной связи между стержнем и другим телом, движущимся по вертикали.

1. Постановка задачи и вывод уравнений движения. На рисунке показан стержень АВ массой m и длиной $2l$, движущийся по горизонтальной плоскости xy , коэффициент трения о которую равен μ , при этом к точке А стержня прикреплена невесомая нерастяжимая нить, проходящая через отверстие в точке О; на другом конце нити

находится тело массой M , движущееся вдоль оси OZ, перпендикулярной плоскости рисунка (g - ускорение силы тяжести, $g_z = -g$). Аналогично [1] для проекций скорости точки стержня с лонгальной координатой $\xi \in (-l, l)$, отсчитываемой от центра масс С имеем:

$$V_x = \dot{x}_c - \xi \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2, \quad V_y = \dot{y}_c + \xi \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2.$$



Поэтому для проекций силы трения, действующей на стержень имеем:

$$F_{mpx} = -\mu \frac{mg}{2l} \int_{-l}^l \frac{(\dot{x}_c - \xi \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2) d\xi}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 2\xi \dot{\varphi}_2 (\dot{x}_c \sin \varphi_2 - \dot{y}_c \cos \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \xi^2}},$$

$$F_{mpy} = -\mu \frac{mg}{2l} \int_{-l}^l \frac{(\dot{y}_c + \xi \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) d\xi}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 2\xi \dot{\varphi}_2 (\dot{x}_c \sin \varphi_2 - \dot{y}_c \cos \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \xi^2}}.$$

Для момента сил трения относительно оси, проходящей через центр масс С и параллельной оси OZ, в соответствии с выражением $dM_{mpcz} = \xi \cos \varphi_2 dF_{mpy} - \xi \sin \varphi_2 dF_{mpx}$ получим:

$$M_{mpcz} = -\mu \frac{mg}{2l} \int_{-l}^l \frac{(\dot{y}_c + \xi \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2) \xi \cos \varphi_2 - (\dot{x}_c - \xi \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2) \xi \sin \varphi_2}{\sqrt{\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 - 2\xi \dot{\varphi}_2 (\dot{x}_c \sin \varphi_2 - \dot{y}_c \cos \varphi_2) + \dot{\varphi}_2^2 \xi^2}} d\xi.$$

Производя интегрирование по ξ , при котором остальные величины постоянны, получим для мгновенных значений сил трения и указанного выше момента сил трения выражения:

$$F_{mpx} = \frac{\mu mg \sin \varphi_2}{2l \dot{\varphi}_2} (\sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2\dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 - 2\dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2}) - \frac{\mu mg}{2l |\dot{\varphi}_2|} \cos \varphi_2 (\dot{x}_c \cos \varphi_2 + \dot{y}_c \sin \varphi_2) \times$$

$$\times \ln \left| \frac{|\dot{\varphi}_2| \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 + 2\dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} + \dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)}{|\dot{\varphi}_2| \sqrt{\dot{\varphi}_2^2 l^2 - 2\dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2) l + \dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2} - \dot{\varphi}_2 (\dot{y}_c \cos \varphi_2 - \dot{x}_c \sin \varphi_2)} \right| \quad (1)$$

Чопчиц И.Н., Чопчиц Н.И., кафедра физики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Физика, математика, информатика