ПОСТРОЕНИЕ ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ВЕЙВЛЕТОВ

Семенчук Н.В., ГрГУ, Гродно

Начало восьмидесятых годов прошлого столетия ознаменовано появлением нового направления в области обработки данных – вейвлет - анализа. В отличие от традиционно применяемого при анализе данных преобразования Фурье, результаты, полученные с помощью вейвлет - анализа, зачастую обладают большей информативностью и способны непосредственно обрабатывать такие особенности данных, которые при традиционном подходе анализировать затруднительно.

В спектральном анализе временных рядов главной проблемой является построение оценок спектральных плотностей второго порядка стационарных случайных плотностей, так как они дают важную информацию о структуре процесса. Главная задача состоит в том, чтобы по конечной реализации временного ряда отыскать такой алгоритм для оценки спектральной плотности, чтобы оценки были «хорошими» в статистическом смысле. Данное исследование посвящено применению вейвлетов для построения состоятельных оценок спектральных плотностей второго порядка.

Из [1] известно, что система функций $\{\varphi_{j0,k}(x), x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\psi_{j,k}(x), j \geq j_0, x \in \mathbf{R}, k \in \mathbf{Z}\}$, образует ортонормированный базис в $L_2(\mathbf{R})$, где

$$\varphi_{j0,k}(x) = 2^{j0/2}\varphi\left(2^{j0}x - k\right), \tag{1}$$

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi\left(2^{j}x - k\right); \tag{2}$$

j_0 - некоторое целое число.

Функция $\varphi(x)$ из (1) называется масштабирующей, а функция $\psi(x)$ из (2) – вейвлетом [1], $x \in \mathbf{R}$.

Далее, с учетом (1) и (2) определим [1,2]

$$\tilde{\varphi}_{j0,k}(\lambda) = \sum_{n \in Z}(2\pi)^{-1/2}\varphi_{j0,k}((2\pi)^{-1}\lambda + n), \tag{3}$$

$j_0 \in \mathbf{N_0}, k = \overline{1,2^{j0}}, \lambda \in \Pi$.

$$\tilde{\psi}_{j,k}(\lambda) = \sum_{n \in Z}(2\pi)^{-1/2}\psi_{j,k}((2\pi)^{-1}\lambda + n), \tag{4}$$

$j \in \mathbf{N_0}$ $k = \overline{1,2^{j}}, \lambda \in \text{Ï}$.

<u>Определение.</u> *[1, 2],* $\tilde{\varphi}_{j_0,k}(\lambda)$, $\tilde{\psi}_{j,k}(\lambda)$ *, определенные формулами (3) и (4) называются* 2π *– периодическими масштабирующей функцией и вейвлетом соответственно.*

В [1] получена цепочка кратномасштабных пространств $\tilde{V}_j$, $j \in \mathbf{N_0}$, из $L_2(\text{Ï})$ с последовательными ортогональными дополнениями $\tilde{W}_j$, $j \in \mathbf{N_0}$ и ортонормированные базисы $\{\tilde{\varphi}_{j,k}(\lambda), k = 1...2^j, \lambda \in \Pi\}$ для $\tilde{V}_j$, $j \in \mathbf{N_0}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}(\lambda), k = 1...2^j, \lambda \in \Pi\}$ для $\tilde{W}_j$, $j \in \mathbf{N_0}$. Таким образом, имеет место следующее соотношение:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{j+1}(f) = \tilde{\mathbf{P}}_j(f) + \tilde{\mathbf{Q}}_j(f) \tag{5}$$

где

$$\widetilde{\mathbf{P}}_j(f)=\sum_{k=1}^{2^j}\alpha_{j,k}\widetilde{\varphi}_{j,k}(\lambda), \tag{6}$$

$$\alpha_{j,k}=\int\limits_{\Pi}\widetilde{\varphi}_{j,k}(x)f(x)dx;$$

$$\widetilde{\mathbf{Q}}_j f=\sum_{k=1}^{2^j}\beta_{j,k}\widetilde{\psi}_{j,k}(\lambda),$$

$$\beta_{j,k}=\int\limits_{\Pi}\widetilde{\psi}_{j,k}(x)f(x)dx,$$

где $k=1..2^j$ $j\in\mathbf{N_0}$, $\widetilde{\mathrm{P}}_j$ есть ортогональная проекция функции $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ на пространство $\widetilde{V}_j$, а $\widetilde{\mathrm{Q}}_j$ есть ортогональная проекция функции $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ на пространство $\widetilde{W}_j$,. $j\in\mathbf{N_0}$.

В [1] показано, что система функций $\{\widetilde{\varphi}_{j_0,k}(\lambda),k=1..2^{j_0},\lambda\in\Pi\}\cup\{\widetilde{\psi}_{j,k}(\lambda),j\geq j_0,k=1..2^j,\lambda\in\Pi\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(\Pi)$.

Рассмотрим стационарный случайный процесс $X(t)$, $t\in\mathbf{Z}=\{0,\pm1,\pm2,...\}$ с $\mathbf{M}X(t)=0, t\in\mathbf{Z}$ и спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi=[-\pi;\pi]$. Возникает задача оценки спектральной плотности по T последовательным, через равные промежутки времени наблюдениям $X(0),X(1),...X(T-1)$ за стационарным случайным процессом.

С учетом проведенных в работе [3] исследований, в качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)\in L_2(\Pi)$ рассмотрим:

$$\hat{f}(\lambda)=\sum_{k=1}^{2^{j_0}}\hat{\alpha}_{j_0,k}\widetilde{\varphi}_{j_0,k}(\lambda)+\sum_{j=j_0}^{J-1}\sum_{k=1}^{2^j}\hat{\beta}_{j,k}\widetilde{\psi}_{j,k}(\lambda), \tag{7}$$

$j_0\leq J$, $J\leq\log_2 CT^{1-\rho}$, где $0<\rho<1$, $0<C<\infty$, произвольные, но фиксированные константы, $\widetilde{\varphi}_{j_0,k}(\lambda)$, $\widetilde{\psi}_{j,k}(\lambda)$ определяются соотношениями (3) – (4),

$$\hat{\alpha}_{j_0,k}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}I_T^{(h)}(\alpha)\varphi_{j_0,k}(\alpha)d\alpha, \tag{8}$$

$$\hat{\beta}_{j,k}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}I_T^{(h)}(\alpha)\psi_{j,k}(\alpha)d\alpha,$$

где $I_T^{(h)}(\alpha)$ – расширенная периодограмма, определяемая соотношением:

$$I_T^{(h)}(\lambda)=\frac{1}{2\pi H_2^{(T)}(0)}d_T(\lambda)d_T(-\lambda)$$

$$d_T(\lambda)=\sum_{t=0}^{T-1}h_T(t)X(t)e^{-i\lambda t}$$

$$H_k^{(T)}(\lambda)=\sum_{t=0}^{T-1}h_T^k(t)e^{-i\lambda t},$$

а функция $h_T:[0,1]\to\mathbf{R}$ - окно просмотра данных, свойства которой описаны в [3].

Возникает вопрос об исследовании свойств оценки (7). Учитывая представление (5), путем элементарных преобразований оценку (7) можно переписать в виде: [1]

$$\hat{f}(\lambda)=\tilde{P}_{j0}(f)+\sum_{j=j_0}^{J-1}\tilde{Q}_j(f)=\tilde{P}_{j0}(f)+\left(\tilde{P}_{j0+1}(f)-\tilde{P}_{j0}(f)\right)+(\tilde{P}_{j0}(f)-\tilde{P}_{j0-1}(f)+$$

$$+\ldots+(\tilde{P}_{J-1}(f)-\tilde{P}_{J-2}(f)+\tilde{P}_J(f)-\tilde{P}_{J-1}(f)).$$

Используя представление (6), окончательно получим:

$$\hat{f}(\lambda)=\tilde{P}_J(f)=\sum_{k=1}^{2^J}\hat{\alpha}_{J,k}\varphi_{J,k}(\lambda),$$

где $\hat{\alpha}_{J,k}$ задается соотношением (8), $\tilde{\psi}_{J,k}(\lambda)$ соотношением (4), $J\le\log_2 CT^{1-\rho}$, где $0<\rho<1$, $0<C<\infty$, произвольные, но фиксированные константы, $k=\overline{1,2^J}$. Таким образом, в качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda\in\Pi$ рассматривается ее проекция на пространство $\tilde{V}_J$.

Литература

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 464с.
2. Neumann M.H. Spectral density estimation via nonlinear wavelet methods for stationary non-Gaussian time series. // J. Time Ser. Anal. 17 (1996), № 6, P. 601-633.
3. Н.В. Семенчук. Исследование моментов оценок вейвлет коэффициентов разложения спектральной плотности стационарного случайного процесса. / Материалы международной конференции DE&CAS’2005, г. Брест, 5 – 8 окт. 2005 г. Ч.2. С. 55-59.

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Смачек С.Н., БГТУ, Брест

Задача коммивояжера (Traveling salesman problem) относится к ряду сложнейших задач комбинаторной оптимизации и имеет на сегодняшний день множество приложений. Решение этой задачи сложно, что не дает возможности даже при современном развитии средств вычислительной техники находить решения при большой размерности исходных данных за приемлемое время. Поэтому для решения этой задачи создано множество приближенных методов, которые для своего исполнения используют приемлемое количество ресурсов (времени, оперативной памяти и других). Одним из таких методов является метод кристаллизации. Имея сложность O(n^2), этот алгоритм показал средние результаты для качества находимых решений при довольно высокой скорости работы, что делает его применимым для задач большой размерности (десятки тысяч узлов).

Предлагаемая матричная реализация алгоритма кристаллизации служит для более эффективного решения задачи коммивояжера на ЭВМ. Первоначально составляется матрица, элементы которой состоят из двух полей: расстояние (dij) и флаг (fij) принадлежности к маршруту (1 - дуга принадлежит маршруту, 0 - не принадлежит, * - запрет на включение данной дуги). По этой матрице строится начальный маршрут коммивояжера, например, методом ближайшего соседа. Для этого в строке выбирается элемент (i, j) с наименьшим расстоянием, отмечается принадлежность этой дуги маршруту,