УДК 528.063

Грищенков Е.В., Зуева Л.Ф., Синякина Н.В.

РЕШЕНИЕ, УРАВНИВАНИЕ И ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЗАСЕЧЕК МЕТОДОМ LP-ОЦЕНОК

Введение. Положение точки $P(x,\ y,\ z)$ в пространстве можно определить по аналогии с решением задачи на плоскости [1]. Для этого по результатам геодезических измерений составляют систему нелинейных уравнений, получаемую в виде разностей вычисленных (по приближенным координатам) и измеренных величин, число которых равно N. Для метода Lp-оценок, согласно принципу максимального правдоподобия, для уравнивания необходимо отыскивать минимум целевой функции [2]:

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N}(P_n)_i\left|L_i(x,y,z)\right|^n, \qquad (1)$$

где $P_n=\dfrac{\sigma_0^n}{\sigma_i^n}$ – вес результата измерений;

$L_i(x,y,z)=\varphi(x,y,z)-T$ – вектор свободных членов нелинейных параметрических уравнений.

В результате минимизации критериальной функции (1) методами нелинейного программирования получим оценки параметров (уравненные координаты) и вектор поправок в результаты измерений:

$$V=\varphi(\hat{x},\hat{y},\hat{z})-T, \qquad (2)$$

где T – вектор измеренных величин.

Если известна обратная матрица нормальных уравнений, то эллипсоид ошибок для засечек в пространстве, который определяется по формулам, опубликованным в [3], находится просто.

1. Универсальный алгоритм решения любых пространственных засечек методом релаксации. Исследования показали [2], что между методом Lp-оценок (3) и методом наименьших квадратов (4) возможно решение засечки путем минимизации целевых функций:

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N}C_i\left|L_i(x,y,z)\right| \qquad (3)$$

или

$$\Phi(x,y,z)=\sum_{i=1}^{N}C_i^2L_i^2(x,y,z). \qquad (4)$$

Согласно публикациям [1, 2] запишем нелинейные уравнения $L(x,y,z)$ для следующих измеренных величин:

- *горизонтальный угол:*

$$L(x,y,z)=\operatorname{arctg}\frac{\Delta y_{1,2}}{\Delta x_{1,2}}-\operatorname{arctg}\frac{\Delta y_{1,3}}{\Delta x_{1,3}}-\beta_{2,1,3}, \qquad (5)$$

где Δx, Δy – приращение координат в плане;

$\beta_{2,1,3}$ – измеренный горизонтальный угол на точке 1;

- *наклонные дальности:*

$$L(x,y,z)=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}-S. \qquad (6)$$

где S – измеренная наклонная дальность;

- *вертикальные углы:*

$$L(x,y,z)=\operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta z}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)-\nu. \qquad (7)$$

где ν – измеренный угол наклона.

Коэффициенты C, участвующие в формулах (3), (4), будут следующими [4]:

- *горизонтальный угол* $C=1$;
- *наклонные дальности* $C=1/S$;
- *вертикальные углы* $C=\dfrac{2}{\left|\sin 2\nu\right|}$.

Вычисление координат методом релаксации заключается в следующем:

1) находят координаты шести симметрично расположенных точек $K_{12}(x_0\pm\lambda,y_0,z_0)$, $K_{34}(x_0,y_0\pm\lambda,z_0)$, $K_{56}(x_0,y_0,z_0\pm\lambda)$;

2) вычисляют для каждой из шести точек значения целевой функции;

3) от точки K_0 переходят к точке, для которой значение целевой функции минимально;

4) эту новую точку считают отправной для следующего приближения.

Шаг релаксации λ принимают равным среднему расстоянию между исходными и определяемыми пунктами $(\lambda_j=S_{cp})$.

Если в точках релаксации целевые функции (3) или (4) больше, чем в центральной точке, то $\lambda_j=\dfrac{\lambda_{j-1}}{2}$, применяя принцип *дихотомии*.

Минимизацию целевой функции продолжают до тех пор, пока очередное измерение этой функции не станет меньше наперед заданного значения.

2. Уравнивание и оценка точности пространственных засечек методом Lp-оценок. Уравнительные вычисления можно также выполнять методом релаксации путем минимизации целевой функции (1), при любом n. Приближения продолжают до тех пор, пока шаг λ не станет меньше наперед заданной точности вычисления координат.

Оценку точности можно выполнить двумя путями: нелинейным методом, опубликованным в [3] или линеаризованным методом по формулам:

$$Q=FP_n^{-1}F^T, \qquad (8)$$

$$F=(A^TCA)^{-1}A^TC, \qquad (9)$$

где A – матрица коэффициентов параметрических уравнений поправок,

$$c=P_n\left(diag\left|L(x,y,z)\right|^{n-2}\right), \qquad (10)$$

где коэффициент c отличается от C, применяемого в формулах (3) и (4).

Зная обратную матрицу Q и СКО единицы веса:

$$\mu=\sqrt{\frac{V_nP_nV_n^T}{r}}, \qquad (11)$$

где V_n – поправки в измерения из уравнивания;

r – количество избыточных измерений.

Можно найти значение:

$$\frac{1}{P_f}=fQf^T, \qquad (12)$$

$$m_f=\mu\sqrt{\frac{1}{P_f}}, \qquad (13)$$

где f – весовая функция в обычном ее понимании.

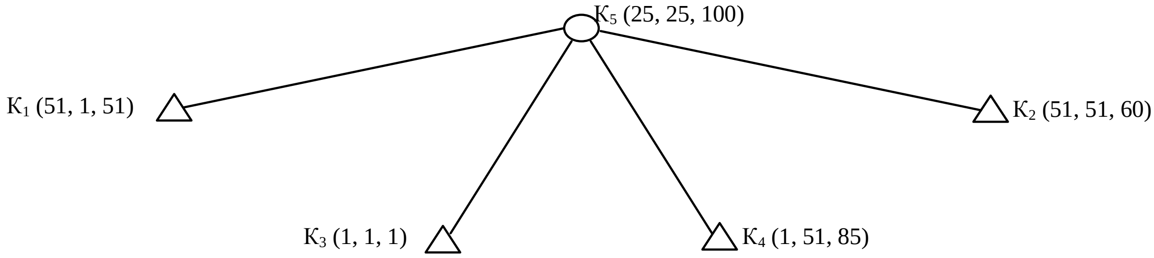

Рис. 1. *Схематический чертеж пространственной засечки определяемого пункта K_5 относительно исходных точек K_1 – K_4*

3. Числовые примеры. Рассмотрим решение, уравнивание и оценку точности двух пространственных засечек:

1) Пространственная линейная засечка, показанная на рисунке, на котором в скобках даны координаты x, y, z в метрах.

Результаты измерений: S_{15} = 60,440 м; S_{25} = 54,332 м; S_{35} = 104,657 м; S_{45} = 38,432 м.

Методом релаксации из 20 приближений получено:

$$\hat{x} = 24{,}995 \text{ м}; \ \hat{y} = 24{,}995 \text{ м}; \ \hat{z} = 100{,}001 \text{ м}.$$

Точностные характеристики при n = 2; μ = 0,00538:

- полуось эллипсоида ошибок по x: a_x = 0,00235 м;
- полуось эллипсоида ошибок по y: a_y = 0,00195 м;
- полуось эллипсоида ошибок по z: a_z = 0,00107 м.

При n = 1 (МНМ) найдено 16 приближений:

$$\hat{x} = 24{,}997 \text{ м}; \ \hat{y} = 24{,}992 \text{ м}; \ \hat{z} = 99{,}998 \text{ м}.$$

Точностные характеристики следующие:

- μ = 0,00722;
- a_x = 0,00308 м; a_y = 0,00461 м; a_z = 0,00128 м.

2) Пространственная засечка по четырем углам наклона, показанная на рисунке.

Результаты измерений: $\nu_{15} = 54^\circ 09' 52''$; $\nu_{25} = 47^\circ 24' 38''$; $\nu_{35} = 71^\circ 04' 39''$; $\nu_{45} = 22^\circ 58' 28''$.

Методом релаксации при n = 2 при P = 1, из 19 приближений получено:

$$\hat{x} = 24{,}999 \text{ м}; \ \hat{y} = 25{,}001 \text{ м}; \ \hat{z} = 100{,}000 \text{ м}.$$

Точностные характеристики следующие:

- – μ = 5,84;
- – a_x = 0,00188 м; a_y = 0,00183 м; a_z = 0,00076 м.

При n = 1 (МНМ) найдено 15 приближений:

$$\hat{x} = 24{,}999 \text{ м}; \ \hat{y} = 25{,}002 \text{ м}; \ \hat{z} = 100{,}000 \text{ м}.$$

Точностные характеристики следующие:

- μ = 6,44;
- a_x = 0,00332 м; a_y = 0,00154 м; a_z = 0,00141 м.

Заключение. По результатам выполненных исследований можно сделать следующие выводы:

1. Методом релаксации можно одновременно выполнять решение и уравнивание пространственных засечек, заменяя весовые коэффициенты C_i на $(P_n)_i$;
2. Вертикальная засечка по углам наклона по точности превосходит линейную;
3. В методе наименьших модулей (n = 1) результаты оценки точности, как правило, хуже для МНМ, чем для МНК;
4. Актуальной является задача поиска степени n_i для каждого измерения под условием минимума погрешности положения точки в пространстве $M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;
5. Нелинейные методы устойчивы при обработке пространственных засечек плохого качества. Например, если точки K_1 – K_4 находятся в одной горизонтальной плоскости, то по замкнутым формулам произойдет деление на 0.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Мицкевич, В. И. Вычисление различных видов засечек на ЭЦВМ методом сверхрелаксации / В. И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1974. – № 10. – С. 36 – 40.
2. Мицкевич, В. И. Общий алгоритм вычисления пространственных засечек на ЭВМ методом релаксации / В. И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1978. – № 2. – С. 25 – 28.
3. Абу Дака Имад. Оценка точности пространственных засечек методами нелинейного программирования / Абу Дака Имад, В. И. Мицкевич // Геодезия и картография. – 1994. – № 1. – С. 22 – 24.
4. Мицкевич, В. И. Математическая обработка геодезических сетей методами нелинейного программирования / В. И. Мицкевич. – Новополоцк: ПГУ, 1997. – 64 с.

Материал поступил в редакцию 17.12.07

GRISCHENKOV E.V., ZUEVA L.F., SINJAKINA N.V. Solution, equating and estimating of dimensional geodesic cuts' accuracy using Lp-estimation method

The authors analyze the ground-based dimensional geodesic cuts using Lp-estimation method in view of two range of accuracy: n=2 (Least squares method); n=1 (Least modules method). The decision on the method was made taking into account the lack of redundant measurements. The inaccuracy distribution law can't be found for the abovementioned measurements. The investigation results indicated that nonlinear methods are the most unaffected while determinating of awkward shape cuts' position.

УДК 372.800.26.046.14

Шуть В.Н.

ГЕНЕРАЦИЯ ДЕРЕВЬЕВ

Введение. Деревья образуют особый класс ацикличных графов с жёстким соотношением числа вершин n и рёбер k, определяемых соотношением $k = n - 1$.

Деревья в программировании используются значительно чаще, чем другие графы. Так, на построении деревьев основаны многие алгоритмы сортировки и поиска. Компиляторы в процессе перевода программы с языка высокого уровня на машинный язык представляют фрагменты программы в виде деревьев, которые называются

Шуть Василий Николаевич, *кандидат технических наук, доцент кафедры интеллектуальных информационных технологий Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.