Данное решение

$U(x,t)=6a_3 tCx+20a_3 tCx^3+20a_5 t^3 C^3 x+ b_1 x + b_3 x^3 + 3 b_3 t^2 C^2 x$

тождественно удовлетворяет уравнению (1).

Для первого случая получим:

$$U(x,0) = b_1 x + b_3 x^3,$$

$$U_t^{'}(x,0) = 6Ca_3 x.$$

Для второго случая получим:

$$U(0,t) = \mu_1(t) = 0,$$

$$U(l,t)=\mu_2(t)= b_1 l+ b_3 l^3 +2(3a_3 l+10a_5 l^3)tC+3b_3 C^2 lt^2 +20a_5 C^3 l t^3 .$$

Итак, получим новое решение известной задачи, удобное для проведения численного анализа.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. Изд. 5-е, -М.: Наука, 1977. -736 с.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РОБАСТНОСТИ ДВУХ АЛГОРИТМОВ МНОГОМЕРНОГО БАЙЕСОВСКОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ

Шлык П. А., БГУ, Минск

В данной работе приводятся результаты сравнительного численного анализа робастности двух алгоритмов байесовского прогнозирования [1] при искажениях априорной плотности распределения вектора параметров, введённых в рассмотрение П.Густафсоном (1994). Компоненты прогнозируемого вектора могут быть стохастически зависимыми.

Математическая модель байесовского прогнозирования. Характеристики робастности прогнозирования

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) заданы три случайных элемента:

I. Наблюдаемый вектор параметров θ, истинное значение которого неизвестно и является случайным с априорной гипотетической плотностью распределения вероятностей (п.р.в.) $\pi^0(\theta), \theta \in \Theta \subseteq R^m$;

II. Стохастически зависящий от θ вектор наблюдений $x = (x_t)_{t=1}^T \in X \subseteq R^{n \times T}$ с гипотетической условной п.р.в. $p^0(x|\theta)$;

III. Неизвестный, подлежащий прогнозированию, вектор $y \in Y \subseteq R^n$, стохастически зависящий от x и от θ, с гипотетической п.р.в. $g^0(y|x,\theta)$.

Рассмотрим модель искажений, предложенную П.Густафсоном [2]. Пусть п.р.в. вектора параметров θ равна $\tilde{\pi}(\theta)$ из множества $\Gamma_\varepsilon^p(\pi^0)$:

$$\Gamma_{\varepsilon}^{p}\left(\pi^{0}\right)=\left\{\upsilon_{u}(\theta)\middle| \|u\|_{L_p}\leq\varepsilon,\ u(\cdot):R^{m}\to[0,\infty)\right\},\varepsilon>0 \tag{1}$$

$$\upsilon_u(\theta)=\hat{\upsilon}_u(\theta)\Big/\int_{\Theta}\hat{\upsilon}_u(\theta)d\theta,\quad \hat{\upsilon}_u(\theta)=\begin{cases}\left(\left(\pi^0(\theta)\right)^{1/p}+\frac{1}{p}u(\theta)\right)^p, 1\leq p<\infty,\\ \pi^0(\theta)e^{u(\theta)},\ p=\infty.\end{cases}$$

Пусть $d(\cdot,\cdot):R^n\times R^n\to R_+$ задаёт расстояние в R^n. Для произвольной прогнозирующей статистики $\hat{y}=f(x):X\to Y$ введём функционал риска $r(\cdot,\cdot)$:

$$r(f(\cdot),\tilde{\pi}(\cdot))=E\left\{d^2(f(x),y)\right\}=\iint_{XY}\tilde{s}(x,y)d^2(f(x),y)dx\,dy,$$

$$\tilde{s}(x,y)=\int_{\Theta}g^0(y|x,\theta)p^0(x|\theta)\tilde{\pi}(\theta)d\theta.$$

Функционал верхнего риска $r_+(\cdot)$ определяется как верхняя граница множества значений функционала риска: $r(f(\cdot),\tilde{\pi}(\cdot))\leq r_+(f(\cdot)),\ \forall\tilde{\pi}\in\Gamma_{\varepsilon}^{p}\left(\pi^0\right)$. Прогнозирующая статистика $f^*(\cdot)$ называется r_+-робастной, если она минимизирует функционал верхнего риска $r_+(\cdot)$. Байесовской прогнозирующей статистикой будем называть статистику $\hat{y}=f^0(x)=E_0\{y|x\}$, где через $E_0\{\cdot\}$ обозначено математическое ожидание, вычисленное по гипотетическому распределению вероятностей. Гипотетическим среднеквадратическим риском называется функционал $r_0(f(\cdot))=E_0\left\{d^2(f(x),y)\right\}$.

Анализ робастности

Введём следующие обозначения:

$$b(\varepsilon,p)=\begin{cases}\left(\left(1+\dfrac{\varepsilon}{p}\right)^p-1\right), 1\leq p<\infty,\\ \left(e^{\varepsilon}-1\right),\ p=\infty\end{cases}$$

$$W(x)=\iint_{Y\Theta}g^0(y|x,\theta)\,p^0(x|\theta)\,\pi^0(\theta)\,d\theta\,dy;\quad \Psi(x,y)=\sup_{\theta\in\Theta}g^0(y|x,\theta)p^0(x|\theta).$$

В условиях модели (I)-(III) при искажениях (1) имеют место следующие утверждения [3]:

1. Пусть $d(\cdot,\cdot)$ - Евклидово расстояние в R^n. Тогда функционал

$$r_+(f(\cdot))=r^0(f(\cdot))+b(\varepsilon,p)\cdot\iint_{XY}\Psi(x,y)dxdy \tag{2}$$

является функционалом верхнего риска.

2. Прогнозирующая статистика

$$f^*(x)=\frac{W(x)\cdot f^0(x)+b(\varepsilon,p)\cdot\int_Y\Psi(x,y)\cdot y\,dy}{W(x)+b(\varepsilon,p)\cdot\int_Y\Psi(x,y)dy} \tag{3}$$

является r_+-робастной по отношению к функционалу верхнего риска (2).

Приведём результаты численного анализа робастности байесовской прогнозирующей статистики $f^0(\cdot)$ и r_+-робастной статистики (3). Вычислительные эксперименты проводились при следующих значениях параметров: $n=2, p=2$;

$$\pi^0(\theta)=n_2\left(\theta\left|\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right.\right),\ p^0(x|\theta)=n_2\left(x\left|\theta,\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right.\right),\ g^0(y|x,\theta)=p^0(y|\theta),$$

$$u(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}R_u},\ \theta\in B_2(C_u,R_u)\\ 0,\ \theta\notin B_2(C_u,R_u)\end{cases}$$, где $B_2(C_u,R_u)$ - круг с центром в $C_u=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$ и радиусом $R_u=4$.

Через $\hat{r}(\cdot)$ обозначим эмпирический среднеквадратический риск, полученный в результате имитационного моделирования для соответствующей статистики. При проведении экспериментов вычислялся выигрыш от использования прогнозирующей статистики (3):

$$Profit\left(f^0(\cdot),\, f^*(\cdot)\right)=\frac{\hat{r}\left(f^0(\cdot)\right)-\hat{r}\left(f^*(\cdot)\right)}{\hat{r}\left(f^*(\cdot)\right)}\cdot 100\%.$$

Количество итераций в имитационном моделировании при каждом наборе параметров составляло *N=1000.* Результаты вычислительных экспериментов представлены на рисунке.

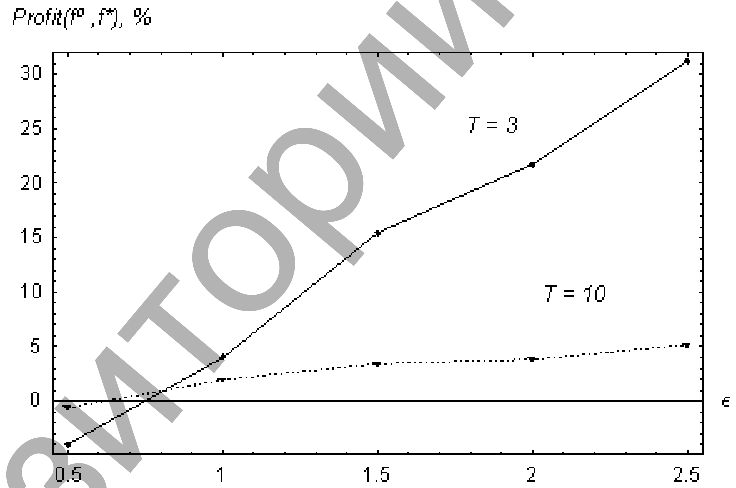

Рис. Результаты вычислительных экспериментов

При проведении экспериментов использование r_+-робастной прогнозирующей статистики (3) позволило строить более точные прогнозы, чем при использовании байесовской прогнозирующей статистики $f^0(\cdot)$. Преимущества статистики (3) наиболее заметны при малом количестве наблюдений *T* и при «значимых» искажениях гипотетической модели.

Литература

1. Справочник по прикладной статистике / Под ред. Э.Ллойда, У.Ледермана, С.А.Айвазяна, Ю.Н.Тьюрина. - М., 1990. Т.2.

2. Gustafson P. Local Sensivity of Posterior Expectations. D.Ph.Dissertation. Pittsburgh: Pittsburg University Press, 1994.

3. А.Ю.Харин, П.А.Шлык. О робастности многомерного байесовского прогнозирования при искажениях априорной плотности распределения параметров. / Сб. материалов международной научной конф. «Теория вероятностей, случайные процессы, математическая статистика и приложения». - Мн.: БГУ, 2005. ст.308-312.