О РЕДУКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Юдов А. А., Шумак Т. А., БрГУ, Брест

Рассматриваются однородные пространства H/G, где H – группа Ли вращений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры, а G – некоторая подгруппа Ли группы Ли – H. Такие однородные пространства исследуются на редуктивность. Этими вопросами занимались многие видные математики: Лумисте Ю., Номидзу К., Кобаяси Ш., Белько И. В., Феденко А. С. и др. Ими построена общая теория связностей в редуктивных однородных пространствах, исследованы свойства связностей в таких пространствах, проведена классификация ряда редуктивных пространств.

Определение. Однородное пространство H/G называется редуктивным, если алгебра Ли $\overline{H}$ группы Ли H распадается в прямую сумму подпространств: $\overline{H} = m + \overline{G}$, причем подпространство m инвариантно относительно $ad\overline{G}$, где $ad\overline{G}$ - присоединенное представление алгебры Ли $\overline{G}$.

Рассмотрим однородное пространство H/G_{31}, где $\overline{G_{31}} = \{i_6, i_9, i_5 - i_7 - i_8 + i_{10}\}$

Будем искать трехмерные редуктивные дополнения для алгебры Ли $\overline{G_{31}}$. Для этого найдем трехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$ инвариантные относительно adi_6. Достаточно рассмотреть следующие случаи:

1^0. Инвариантные пространства ищем в виде $\{i_5 + \lambda i_{10} + \mu i_9 + \nu i_6, i_7 + \sigma i_{10} + si_9 + ti_6, i_8 + pi_{10} + qi_9 + \omega i_6\}$.

Система инвариантности имеет вид:

$t\lambda + \omega = 0$, $s\lambda + q = 0$, $\sigma\lambda + p = 0$, $t\sigma = 0$, $s\sigma = 0$, $\sigma^2 = 1$, $\nu + tp = 0$, $\sigma + sp = 0$, $\lambda + \sigma p = 0$.

Решая систему, получим инвариантные пространства в виде:

$\{i_5 - pi_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + pi_{10}\}, \{i_5 + pi_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 + pi_{10}\}, \{i_5, i_7 + \sigma i_{10}, i_8\}$.

2^0. Инвариантные пространства ищем в виде $\{i_5 + \lambda i_9 + \mu i_6 + pi_8, i_7 + \sigma i_9 + \nu i_6 + qi_8, i_{10} + si_9 + ti_6\}$.Система инвариантности имеет вид:

$p\mu = 0$, $p^2 = 1$, $p\lambda = 0$, $q\mu + t = 0$, $qp = 0$, $q\lambda + s = 0$, $\nu = 0$, $q = 0$, $\sigma = 0$.

Решая систему, получим инвариантные пространства в виде: $\{i_5 \pm i_8, i_7, i_{10}\}$.

3^0. Инвариантные пространства ищем в виде: $\{i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10} + \nu i_6, i_7 + \sigma i_8 + pi_{10} + qi_6, i_9 + si_6\}$.Система инвариантности имеет вид:

$\lambda\nu + \mu q = 0$, $\lambda^2 + \mu\sigma = 1$, $\lambda\mu + \mu p = 0$, $\sigma\nu + pq = 0$, $\sigma\lambda + p\sigma = 0$, $p^2 + \sigma\mu = 1$.

Решая систему, получим инвариантные пространства в виде:

$$\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_9 + si_6\}, \{i_5 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8, i_9 + si_6\},$$
$$\{i_5 \pm \sqrt{1-\mu\sigma}\, i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1-\mu\sigma}\, i_{10}, i_9 + si_6\}$$

4^0. Инвариантные пространства ищем в виде:
$\{i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10} + \nu i_9, i_7 + \sigma i_8 + s i_{10} + t i_9, i_6\}$.Система инвариантности имеет вид:

$\lambda^2 + \mu\sigma = 1$, $\lambda\nu + \mu t = 0$, $\lambda\mu + \mu s = 0$, $\sigma\lambda + \sigma s = 0$, $\sigma\nu + st = 0$, $s^2 + \mu\sigma = 1$.

Решая систему, получим инвариантные пространства в виде:
$\{i_5 - s i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8 + s i_{10}, i_6\}, \{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_6\}$.

5^0. Инвариантные пространства ищем в виде:
$\{i_5 + \lambda i_7 + \nu i_9 + \mu i_6, i_8 + s i_9 + t i_6, i_{10} + p i_9 + q i_6\}$ Система инвариантности противоречива. Рассматривая аналогично случаи 6^0 - 20^0, получим следующую теорему.

Теорема. Относительно $ad i_6$ инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$

1. $\{i_5 - p i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + p i_{10}\}$.
2. $\{i_5 + p i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 + p i_{10}\}$.
3. $\{i_5, i_7 + \sigma i_{10}, i_8\}$.
4. $\{i_5 \pm i_8, i_7, i_{10}\}$.
5. $\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_9 + s i_6\}$.
6. $\{i_5 \pm \sqrt{1-\mu\sigma}\, i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1-\mu\sigma}\, i_{10}, i_9 + s i_6\}$.
7. $\{i_5 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8, i_9 + s i_6\}$.
8. $\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_6\}$.
9. $\{i_5 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_{10}, i_9 + p i_6\}$.
10. $\{i_5 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_{10}, i_6\}$.
11. $\{i_5 \pm \mu i_7 \pm i_8 + \mu i_{10}, i_9, i_6\}$.
12. $\{i_7, i_{10}, i_9 + s i_6\}$.
13. $\{i_7, i_{10}, i_6\}$.
14. $\{i_7 \pm i_{10}, i_9, i_6\}$.

Найденные инвариантные пространства применяются для нахождения редуктивных пространств среди однородных пространств с фундаментальной группой – группой движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры. Полученные редуктивные структуры позволяют решать различные дифференциально-геометрические задачи в таких однородных пространствах, проводить исследования подмногообразий таких пространств, изучать свойства инвариантных аффинных связностей в соответствующих главных расслоениях. Дифференциально-геометрические исследования в псевдоевклидовых пространствах находят применение в теоретической физике и в теории относительности.

АНАЛИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ И БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Юхимук М.М., БГТУ, Брест

Краевая задача для бесконечно связных областей впервые была рассмотрена в работе Н.И.Архиезера [1]. В дальнейшем к этой тематике обращались неоднократно (см., например, [2, § 49] и [6 – 9]). Исследование краевых задач для бесконечно связных об-