4^0. Инвариантные пространства ищем в виде:
$\{i_5 + \lambda i_8 + \mu i_{10} + \nu i_9, i_7 + \sigma i_8 + s i_{10} + t i_9, i_6\}$.Система инвариантности имеет вид:

$\lambda^2 + \mu\sigma = 1$, $\lambda\nu + \mu t = 0$, $\lambda\mu + \mu s = 0$, $\sigma\lambda + \sigma s = 0$, $\sigma\nu + st = 0$, $s^2 + \mu\sigma = 1$.

Решая систему, получим инвариантные пространства в виде:
$\{i_5 - s i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8 + s i_{10}, i_6\}, \{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_6\}$.

5^0. Инвариантные пространства ищем в виде:
$\{i_5 + \lambda i_7 + \nu i_9 + \mu i_6, i_8 + s i_9 + t i_6, i_{10} + p i_9 + q i_6\}$ Система инвариантности противоречива. Рассматривая аналогично случаи 6^0 - 20^0, получим следующую теорему.

Теорема. Относительно $ad i_6$ инвариантны только следующие трехмерные подпространства алгебры Ли $\overline{H}$

1. $\{i_5 - p i_{10}, i_7 + i_{10}, i_8 + p i_{10}\}$.
2. $\{i_5 + p i_{10}, i_7 - i_{10}, i_8 + p i_{10}\}$.
3. $\{i_5, i_7 + \sigma i_{10}, i_8\}$.
4. $\{i_5 \pm i_8, i_7, i_{10}\}$.
5. $\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_9 + s i_6\}$.
6. $\{i_5 \pm \sqrt{1-\mu\sigma}\, i_8 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8 \mp \sqrt{1-\mu\sigma}\, i_{10}, i_9 + s i_6\}$.
7. $\{i_5 + \mu i_{10}, i_7 + \sigma i_8, i_9 + s i_6\}$.
8. $\{i_5 \pm i_8, i_7 \pm i_{10}, i_6\}$.
9. $\{i_5 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_{10}, i_9 + p i_6\}$.
10. $\{i_5 + \lambda i_7, i_8 + \lambda i_{10}, i_6\}$.
11. $\{i_5 \pm \mu i_7 \pm i_8 + \mu i_{10}, i_9, i_6\}$.
12. $\{i_7, i_{10}, i_9 + s i_6\}$.
13. $\{i_7, i_{10}, i_6\}$.
14. $\{i_7 \pm i_{10}, i_9, i_6\}$.

Найденные инвариантные пространства применяются для нахождения редуктивных пространств среди однородных пространств с фундаментальной группой – группой движений четырехмерного псевдоевклидова пространства нулевой сигнатуры. Полученные редуктивные структуры позволяют решать различные дифференциально-геометрические задачи в таких однородных пространствах, проводить исследования подмногообразий таких пространств, изучать свойства инвариантных аффинных связностей в соответствующих главных расслоениях. Дифференциально-геометрические исследования в псевдоевклидовых пространствах находят применение в теоретической физике и в теории относительности.

АНАЛИЗ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О СКАЧКЕ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНЫХ И БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Юхимук М.М., БГТУ, Брест

Краевая задача для бесконечно связных областей впервые была рассмотрена в работе Н.И.Архиезера [1]. В дальнейшем к этой тематике обращались неоднократно (см., например, [2, § 49] и [6 – 9]). Исследование краевых задач для бесконечно связных областей близко по своему содержанию к исследованию краевых задач с бесконечным индексом, основы теории которых были созданы Н.В.Говоровым [3]. Он установил определённую связь между разрешимостью таких задач, распределением нулей и асимптотическим поведением специальных классов целых функций (см., например, [4]). Анализ такого сорта задач является важным в силу их практической направленности (например, они хорошо моделируют композиционные материалы с богатой микроструктурой). Здесь мы ограничимся рассмотрением модельной краевой задачи – задачи о скачке.

Пусть заданы простые замкнутые гладкие попарно непересекающиеся контуры L_k $(k=\overline{1,N},\ N\geq 2)$, ограничивающие непересекающиеся области D_k^+. Положим $D^-=C\setminus\left(\bigcup\limits_{k=1}^{N}\overline{D_k^+}\right)$ и рассмотрим задачу нахождения исчезающей на бесконечности кусочно-аналитической в (N+1)-связной области $D^-\bigcup\left(\bigcup\limits_{k=1}^{N}D_k^+\right)$ функции $\Phi(z)\equiv\left(\Phi_1(z),\dots,\Phi_N(z),\Phi^-(z)\right)$, предельные значения которой непрерывны вплоть до кривых L_k и удовлетворяют условиям:

$$\Phi_k^+(t)-\Phi^-(t)=R_k(t),\ t\in L_k,\ k=\overline{1,N}, \tag{1}$$

где $R_k(z)$ – заданные рациональные функции («скачки»), непрерывные на соответствующих им контурах L_k $(k=\overline{1,N})$.

Каждый из «скачков» R_k может быть представлен в виде:

$$R_k(z)=p_k(z)+r_k(z)+\tilde{r}_k(z), \tag{2}$$

где p_k – многочлен, r_k – правильная рациональная дробь, все полюсы которой лежат в D_k^+, $\tilde{r}_k$ – правильная рациональная дробь, не имеющая полюсов в $\overline{D_k^+}$. Доказано, что решение поставленной задачи даёт функция

$$\Phi(z)=\begin{cases}-\sum\limits_{j=1}^{N}r_j(z), & z\in D^-,\\ p_k(z)+\tilde{r}_k(z)-\sum\limits_{\substack{j=\overline{1,N}\\ j\neq k}}r_j(z), & z\in D_k^+.\end{cases} \tag{3}$$

Обобщим задачу, полагая, что число контуров – бесконечно, а «скачки» $R_k(z)$ – мероморфные функции. Так же, как и в случае задачи с конечным числом контуров, запишем: $R_k(z)=p_k(z)+r_k(z)+\tilde{r}_k(z)$, где слагаемые в правой части, при тех же обозначениях, что и в (2), имеют иной смысл: p_k – целая функция, r_k – сумма главных частей R_k в полюсах из D_k^+, $\tilde{r}_k$ – сумма (быть может, бесконечная) главных частей R_k в полюсах, не лежащих в D_k^+.

Формально решение этой задачи можно получить из (3), учитывая бесконечность числа контуров:

$$\Phi(z)=\begin{cases}-\sum\limits_{j=1}^{\infty}r_j(z), & z\in D^-,\\ p_k(z)+\tilde{r}_k(z)-\sum\limits_{\substack{j=\overline{1,\infty}\\ j\neq k}}r_j(z), & z\in D_k^+.\end{cases} \tag{4}$$

Формула (3) безусловно даёт решение задачи (1) для любых рациональных функций R_k, стоящих в правых частях краевых условий. В случае же последней задачи на «скачки» следует наложить дополнительные условия, чтобы функция $\Phi(z)$ из (4) являлась решением задачи рассматриваемого класса. Во-первых, ряды, фигурирующие в формуле (4), должны сходиться в соответствующих областях. Во-вторых, из постановки задачи следует, что искомое решение $\Phi(z)$ необходимо удовлетворяет асимптотическим соотношениям:

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{k\in\mathbf{N},\, D_k\subseteq\{z\,|\,|z|<R\}} \left\{ \sup_{z\in D_k} \left|\Phi_k(z)\right| \right\} = 0,\ \lim_{R\to\infty} \sup_{z\in D^-,\,|z|=R} \left|\Phi^-(z)\right| = 0, \tag{5}$$

откуда следует, что условие $\lim\limits_{k\to\infty} \left\{ \max\limits_{t\in L_k} \left| R_k(t) \right| \right\} = 0$ является необходимым для существования решения. Подтверждение или опровержение того факта, что построенная функция действительно является решением задачи связано в общем случае с исследованием поведения мероморфных функций на бесконечности.

Литература

1. Ахиезер Н.И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР, сер. матем. Т. 9, 1945, 275-290.
2. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М., Наука, 1977 (3-е изд.).
3. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М., Наука, 1986.
4. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. – М.-Л., Гостехиздат, 1956.
5. Mityushev V.V., Rogosin S.V. Constructive methods for linear and nonlinear boundary value problems for analytic functions. – Boca Raton-London, Chapman & Hall / CRC Press, 1999.
6. Пааташвили В.А. О линейной задаче сопряжения в случае счётного множества замкнутых контуров // Сообщ. АН Груз. ССР, Т. 37, No. 1, 1965, 31-36.
7. Пааташвили В.А. О линейной задаче сопряжения в случае счетного множества замкнутых контуров // Тр. Тбил. матем. ин-та АН Груз. ССР, Т. 34, 1968, 103-122.
8. Толочко М.Э. О разрешимости однородной краевой задачи Римана для бесконечно связной области // Доклады АН БССР, Т. 18, No. 5, 1974, 398-401.
9. Чибрикова Л.И. Основные краевые задачи для аналитических функций. – Казань, КГУ, 1990.