Тогда:

$$\left(NO_x\right)^в = 1.53\frac{\dfrac{\Delta T}{T_a - T^{II}}\left(\dfrac{qp}{300}\right)^{0.5}\dfrac{l}{W_{cp}}}{2.43\cdot10^{-2}\exp\left(\dfrac{27200}{T} - 10.5\right)}\times$$

$$\times 4.6\cdot10^3\sqrt{C_{N_2}C_{O_2}}\exp\left(\frac{-10800}{T}\right)$$

или

$$\left(NO_x\right)^в = K\frac{\Delta T}{T_a - T^{II}}\cdot\frac{l}{W_{cp}}\times$$
$$\times\left(qp\right)^{0.5}\sqrt{C_{N_2}C_{O_2}}\exp\left(10.5 - \frac{38060}{T}\right), \qquad (8)$$

где K – численный коэффициент.

При изменяющейся температуре примем постоянными все остальные факторы, тогда

$$\left(NO_x\right)^в = A\cdot\exp\left(10.5 - \frac{38060}{T}\right). \qquad (9)$$

Если температура во времени изменяется с периодом t, можно предположить наличие зависимостей согласно рис. 1.

Если температура колеблется относительно T_{cp}, то при $\tau^p_{NO}\langle\ t$ будет средний рост $\left(NO_x\right)^в$ на Δ, т.к. прирост функции при положительном росте аргумента больше, чем ее снижение – при отрицательном [5]. При этом учитывается тот факт, что при снижении температуры продукты реакции остаются на прежнем уровне.

Если же $\tau^p_{NO}\rangle\ t$, то $\left(NO_x\right)^в$ будут изменяться по условию "d" на рис. 1 (Δ ничтожно мал), т.к. изменения концентраций не будут успевать за изменением температур.

Отсюда можно сделать вывод: чтобы не допустить повышения содержания окислов азота в продуктах сгорания топлива, колебания температуры должны происходить с большей частотой. Такие частоты (десятки герц, при этом t = 0.01 – 0.02 с) как раз характерны для устройств пульсирующего горения [2].

Из рис. 1 так же видно, что в области малых температур амплитуды изменения температур влияют на генерацию $\left(NO_x\right)^в$ сильнее (функция $\left(NO_x\right)^л = f(T)$ изменяется интенсивнее), чем при высоких температурах, где эта функция более линейна.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Н.В. Лавров и др. Процессы горения топлива и защита окружающей среды. М.: Металлургия, 1981, 103-105 с.
2. М.Г. Горбачева. II международный симпозиум по пульсирующему горению. Изв. ВУЗов. Энергетика, № 3, 1983, 118-119 с.
3. М.Г. Горбачева, Северянин В.С. О снижении выхода окислов азота при пульсирующем горении. Энергетика, № 1, 1987, 77-79 с.
4. В.Е. Алемасов и др. Основы теории физико-химических процессов в тепловых двигателях и энергетических установках. – М.: Химия, 2000, с. 520.
5. В.С. Северянин. Способ энергетического воздействия. Изобретатель, № 6, 2002. Заявка № 20020047.

УДК 539.3

Веремейчик А.И.

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Случаи точного решения системы уравнений, описывающей процессы распространения тепла в твердых телах, довольно редки, ввиду сложного нелинейного характера. Точные решения важны сами по себе, поскольку позволяют описать отдельные тепловые явления. Кроме того, они могут быть использованы для апробации различных численных методов, являясь тестовыми задачами. Применение классических методов математической физики [1] (метод разделения переменных, метод продолжения, применение интеграла Фурье и т.д.) эффективно лишь при решении дифференциальных уравнений с простой геометрией границы области. Широкое распространение при решении задач теплопроводности получили приближенные аналитические методы: методы последовательных приближений, интегральные методы, асимптотические методы и др., которые позволяют с достаточной точностью решать нелинейные уравнения.

Рассмотрим реализацию интегрального метода на решение нестационарной задачи теплопроводности. Пусть производится нестационарный нагрев пластины конечной толщины. Пластина прогревается с одной стороны, с другой теплоизолирована. Вводим понятие теплового слоя $\Delta(t)$ как некоторой области, внутри которой происходят все тепловые явления, вне этого слоя сохраняется начальная температура. Задача описывается одномерным ДУ теплопроводности [2]

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (1)$$

и граничными условиями третьего рода

$$\text{при } y = 0 \qquad -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} = \alpha(T_{cp} - T),$$

$$\Delta(t) < l:\ x = \Delta(t);\ T = T_0,\ \lambda\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad (2)$$

$$\Delta(t) = l:\ x = l;\ \lambda\frac{\partial T}{\partial x} = 0,$$

Веремейчик Андрей Иванович. *Ассистент каф. сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017. г. Брест, ул. Московская, 267.

где $T(x,t)$ - переменная температура пластины, $a=\dfrac{\lambda}{c\rho}$ - коэффициент температуропроводности, λ - коэффициент теплопроводности, ρ - плотность материала пластины, c - удельная теплоемкость, T_0 - начальная температура пластины, T_{cp} - температура воздействующей на пластину среды, α - коэффициент теплоотдачи, численно равный количеству тепла, получаемого единицей площади поверхности тела в единицу времени при разности температур между поверхностью и окружающей средой в 1^0С (коэффициент α приближенно можно принимать постоянным).

Вводим обозначения

$$\varepsilon=\frac{x}{h},\ \tau=\frac{a}{h^2}t,\ \theta=\frac{T_{cp}-T}{T_{cp}-T_0}, \tag{3}$$

где h - толщина пластинки.

Благодаря переходу к безразмерным координатам (3) ДУ (1) и граничные условия (2) принимают вид:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{\partial^2\theta}{\partial\varepsilon^2},$$

$$\varepsilon=0:\quad \frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}=Bi\theta,$$

$$\varepsilon=\frac{\Delta(t)}{h}=\bar{\varepsilon}:(\Delta(t)<h),\ \theta=1,\ \frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}=0, \tag{4}$$

$$\varepsilon=1:\quad \frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}=0,$$

где число $Bi=\dfrac{\alpha h}{\lambda}=const$ - критерий Био.

Распределение температуры в тепловом слое представим в виде полинома второй степени

$$\theta=A+B\varepsilon+C\varepsilon^2. \tag{5}$$

Рассмотрим случай, когда тепловой слой не достиг противоположной стенки ($\Delta(t)<h$). Учитывая граничные условия, получим следующие связи между коэффициентами

$$B=BiA,\ \ C=-Bi\frac{A}{2\bar{\varepsilon}}, \tag{6}$$

в которых выражение для безразмерной толщины теплового слоя можно представить в виде

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1-A}{A}\frac{2}{Bi}. \tag{7}$$

Коэффициент A представляет безразмерную температуру на поверхности пластины. Уравнению теплопроводности будем удовлетворять приближенно, для чего проинтегрируем его по тепловому слою

$$\int_0^{\bar{\varepsilon}}\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}d\varepsilon=-\left.\frac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{8}$$

и в полученное уравнение подставим выражение для профиля температуры (5). Определяем производную $\dfrac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}=B+2C\varepsilon$, при $\varepsilon=0$: $\left.\dfrac{\partial\theta}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=B.$

Из (8) следует

$$\frac{\partial A}{\partial\tau}\bar{\varepsilon}+\frac{\partial B}{\partial\tau}\frac{\bar{\varepsilon}^2}{2}+\frac{\partial C}{\partial\tau}\frac{\bar{\varepsilon}^3}{3}=-B. \tag{9}$$

Так как все величины, входящие в последнее соотношение, представлены через коэффициент A (6, 7), то можно получить обыкновенное дифференциальное уравнение для определения величины A

$$\frac{dA}{d\tau}\frac{1-A^2}{A^3}=-\frac{3Bi^2}{2}. \tag{10}$$

Полученное уравнение легко решается методом разделения переменных

$$\tau=\frac{2}{3}\frac{1}{Bi^2}\int_A\frac{A^2-1}{A^3}dA=\frac{2}{3}\frac{1}{Bi^2}\left[\ln A+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A^2}-1\right)\right]. \tag{11}$$

Соотношение (11) дает зависимость безразмерной температуры поверхности пластины со стороны внешнего теплового воздействия от времени при $\Delta(t)<h$. Как только тепловой слой достигает противоположной поверхности пластинки ($\Delta=h$), т.е.

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1-A}{A}\frac{2}{Bi}=1 \text{ или } A^*=\frac{1}{1+\dfrac{Bi}{2}}, \tag{12}$$

рассматриваем второй этап решения.

Профиль температуры опять ищем в виде полинома второй степени (5). Удовлетворяя граничным условиям, получаем

$$B=BiA,\ \ C=-Bi\frac{A}{2}. \tag{13}$$

Воспользовавшись уравнением (8), получим дифференциальное уравнение для определения величины A

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{d\varepsilon}=-\frac{Bi}{1+\dfrac{1}{3}Bi}. \tag{14}$$

Решение получается в виде

$$A=A^*\exp\left(-\frac{Bi}{1+\dfrac{1}{3}Bi}\left(\tau-\tau^*\right)\right), \tag{15}$$

где величина A^* определена выражением (12). С учетом (12) выражение (15) приобретает вид

$$A=\frac{1}{1+\dfrac{Bi}{2}}\exp\left(-\frac{Bi}{1+\dfrac{1}{3}Bi}\left(\tau-\tau^*\right)\right). \tag{16}$$

Соотношение (16) представляет зависимость безразмерной температуры поверхности пластины от времени с момента времени $t^*(\Delta(t^*)=h)$.

Аналогично можно получить зависимости для коэффициента B, который определяет безразмерный тепловой поток в стенку, а также определить и весь температурный профиль θ (безразмерные значения температур в произвольной точке пластины в заданный момент времени). Т.к. плотность теплового потока прямо пропорциональна градиенту температуры, то $q(t)=-\lambda\dfrac{\partial T}{\partial x}$. В безразмерных координатах коэффициент B определяется в соответствии с выражением (6).

Для определения значений температуры $T(y,t)$ необходимо выполнить переход от безразмерных величин к размерным в соответствии с соотношениями

$$x = \varepsilon l\,,\ t = ah^2\tau\,,\ T = T_{cp} - \theta(T_{cp} - T_0)\,. \qquad (17)$$

С помощью предложенной методики можно определить температуру T на нагреваемой поверхности в момент времени, при котором тепловой слой достигает теплоизолированной поверхности. Зная этот момент времени, легко находится скорость распространения теплового слоя по толщине пластинки.

Рассмотренный метод решения задачи нестационарной теплопроводности отличается простотой и наглядностью; результаты, полученные с его помощью, для относительно простых тел достаточно хорошо согласуются с точным аналитическим решением. Данный метод может быть применен и к более сложным задачам, в частности, когда на поверхности контакта с внешним тепловым воздействием задаются нелинейные условия [4]. Полученное при решении задачи теплопроводности распределение теплового поля используется в дальнейшем как одно из исходных данных для решения задачи термоупругости по определению напряжений, перемещений и деформаций в твердых телах.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966 г. - 735 с.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1967 г.
3. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1978.
4. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. Коздоба Л.А. - М.: Наука. 1975 г.
5. Карслоу Б., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. - М.: Наука, 1964. - 487 с.
6. Веремейчик А.И. Определение двухмерных температурных полей с помощью пакета «Математика». // Вестник БГТУ.- Машиностроение, автоматизация, ЭВМ. № 4, 2001. – С.55-58.

УДК 539.3

Босяков С.М.

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ЦИЛИНДРЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СТАЦИОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

Фундаментальные исследования напряженно-деформированного состояния тел, находящихся под действием стационарных осесимметричных температурных полей, нашли свое отражение в известных монографиях [1-5] и многих других работах. Однако, решение конкретных задач, связанных с определением термоупругих напряжений при установившемся температурном процессе, когда температура является функцией координат, представляет интерес в настоящее время.

Рассмотрим цилиндрическое тело вращения, опирающееся на абсолютно жесткую и гладкую плоскость, находящееся под действием стационарного температурного поля $t = t(z,r)$, где ось z совпадает с осью вращения. В этом случае термоупругие напряжения найдем из общего решения неоднородных уравнений Дюамеля-Неймана в цилиндрических координатах с помощью формул осесимметричной деформации для тел, нагруженных по поверхности нормальным давлением $K\alpha t$ [1, 2]:

$$R_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2 U - \frac{\partial^2(U-T)}{\partial r^2} - \nabla^2 T\right),$$

$$B_\beta = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma\nabla^2 U - \frac{1}{r}\frac{\partial(U-T)}{\partial r} - \nabla^2 T\right),$$

$$Z_z = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\sigma)\nabla^2 U - \frac{\partial^2(U-T)}{\partial z^2} - \nabla^2 T\right),$$

$$R_z = Z_r = \frac{\partial}{\partial r}\left((1-\sigma)\nabla^2 U - \frac{\partial^2(U-T)}{\partial z^2}\right),$$

где $K = 3\lambda + 2\mu$ - утроенный модуль всестороннего растяжения (или сжатия), $\lambda = E\sigma/(1+\sigma)(1-2\sigma)$, $\mu = E/2(1+\sigma)$, E – модуль продольной упругости, σ – коэффициент Пуассона, α – температурный коэффициент линейного расширения, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

В формулах (1) функции U и T выбирают в виде, удовлетворяющем следующим уравнениям [1, 2]:

$$\nabla^2\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{2\mu K\alpha t(z,r)}{\lambda + 2\mu}, \qquad (2)$$

$$\nabla^2\nabla^2 U(z,r) = 0\,. \qquad (3)$$

Обратимся к случаю, когда температура изменяется по следующему закону

$$t = t_0\left(1 - a\left(\frac{r}{R}\right)^n\right)\left(1 - b\frac{z}{H}\right). \qquad (4)$$

Здесь t_0 – температура на поверхности цилиндра в точке, совпадающей с началом координат, R – радиус цилиндра, H – высота цилиндра, n - действительное число, $n > 0$; a, b – коэффициенты, определяемые экспериментальным путем.

Заметим, что функция температур (4) позволяет с достаточной точностью описать распределение температуры в телах вращения, находящихся под действием плазменной струи (электрической дуги). На рис. 1 показано поле температур (t_0=1300 К, n=6, a=0,6, b=0,925) в цилиндре, линейные размеры которого соответствуют рабочему столику вакуумно-плазменной установке ВПУ-2М (R=0,038 м, H=0,04 м).

Босяков Сергей Михайлович. *К. физ.-мат. н., ст. преподаватель каф. теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета.*
Беларусь, БГУ, 220050, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 4.