УДК 517.9

ОБ АССОЦИИРОВАННЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. СМЕШАННЫЙ СЛУЧАЙ

А. И. Жук[1], Е. Н. Защук[2]

[1] К. физ.-мат. н., доцент, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета, Брест, Беларусь

[2] К. физ.-мат. н., доцент, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета, Брест, Беларусь

Реферат

В работе исследуется задача Коши для системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Предложен способ трактовки решений уравнений, постановка которых в рамках классической теории обобщенных функций некорректна. Этот подход позволяет с единых позиций охватить решения, получаемые с помощью других подходов, а также позволяет получить новые решения.

Ключевые слова: задача Коши, система дифференциальных уравнений, конечно-разностные с осреднением уравнения, ассоциированные решения.

ABOUT ASSOCIATED SOLUTIONS OF THE SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITN GENERALIZED COFFICIENTS. MIXED CASE

A. I. Zhuk, E. N. Zashchuk

Abstract

The Cauchy problem for the system of differential equations with generalized coefficients has been investigated. Interpretation of solutions for the system can not be done in the classical distribution theory. The approach for interpretation of solution is introduced. It allows to obtain solutions provided by different approaches from a single perspective and also allows to find new solutions.

Keywords: the Cauchy problem, system of differential equations, finite difference with averaging equations, associated solution.

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0;a] \subset R$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t), \ i = \overline{1,p}, \ x(0) = x_0, \qquad (1)$$

где f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ – липшицевы функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), ..., x^p(t)]$, $x_0 \in R^p$, а $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке T, а $\dot{L}^j(t)$ – их обобщенные производные. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a)$, $j = \overline{1,q}$.

При решении этой задачи возникают принципиально неразрешимые трудности, связанные с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций. Рассмотрим основные подходы, которые предпринимались, чтобы корректно определить решение задачи (1). Первый подход – исследование поставленной задачи в рамках теории обобщенных функций и решение проблемы умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении $f^{ij}(x(t))\dot{L}^j(t)$. В работе [1] вводится определение произведения разрывной функции на обобщенную, а затем ищется решение дифференциального уравнения. Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению (см., например, [2]), где интеграл понимается в определенном смысле, например, в смысле Лебега-Стилтьеса, Перрона-Стилтьеса и т. д. Однако при таком толковании решение интегрального уравнения будет зависеть от определения интегрируемой функции в точках разрыва и от типа интеграла. Третий подход [3] опирается на идею аппроксимации искомого решения уравнения (1) решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что решения, полученные в разных работах, даже в рамках одного подхода, вообще говоря, различны. В работе [4] показано, что эти подходы можно охватить одним, основанным на исследовании предельного поведения решений представлений исходной задачи в виде соответствующих конечно-разностных с осреднением задач (см. [4], [5]). Таким образом, далее под решением задачи (1) будем понимать предел решения соответствующей конечно-разностной с осреднением задачи, в случае его существования, и будем называть его ассоциированным решением задачи (1). Аналогичные системы при различных условиях изучались в [7–10]. В этой статье исследуется наиболее общий случай, включающий в себя предыдущие результаты.

Рассматриваемая краевая задача (1), в рамках данного подхода, может быть представлена в следующем виде:

$$x_n^i(t + h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(x_n(t))[L_n^j(t + h_n) - L_n^j(t)],$$

$$i = \overline{1,p}, \ x_n(t)\big|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t), \qquad (2)$$

Здесь

$$L_n^j(t) = (L^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} L^j(t+s)\rho_n^j(s)ds,$$

где $j = \overline{1,q}$, $\rho_n^j(t) = \gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t)$, $\rho^j \geq 0$, $supp(\rho^j) \subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho^j(s)ds = 1$, а $f_n^{ij} = f^{ij} * \tilde{\rho}_n$, к $\tilde{\rho} \in C^\infty(R^p)$, $\int_{[0,1]^p} \tilde{\rho}(x_1,...,x_p)dx_1...dx_p = 1$, $\tilde{\rho} \geq 0$.

Цель настоящей работы – исследовать предельное поведение решения задачи (2) при $n \to \infty$ и $h_n \to 0$ так, что $\gamma^j(n) \to \infty$ и, при этом, при некотором фиксированном $0 \le b \le q$, не зависящем от n, выполняется $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ для всех $j = \overline{1,b}$ и $\gamma^j(n)h_n \to 0$ для $j = \overline{b+1,q}$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t=\tau_t+m_t h_n$, где $\tau_t \in [0,h_n)$, $m_t \in N \cup \{0\}$. При фиксированном t обозначим $t=\tau_t+k_t h_n$, $k \in Z$. Несложно видеть, что решение системы (2) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(x_n(t_k))[L_n^j(t_{k+1}) - L_n^j(t_k)],$$

$$i = \overline{1,p}. \tag{3}$$

Для описания предельного поведения задачи (2) рассмотрим уравнение

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(x(s))dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \le t} S^i(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)),$$

$$i = \overline{1,p},$$

где $S^i(\mu,x,u) = \varphi^i(1,\mu,x,u) - \varphi^i(0,\mu,x,u)$, $\mu \in T$, $x \in R^p$, $u \in R^q$, $i = \overline{1,p}$, а $\mu \in T$, а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из вспомогательной системы уравнений

$$\varphi^i(t,\mu,x,u) = x^i + \sum_{j=1}^{b} u^j \int_0^t f^{ij}(\varphi(s-,\mu,x,u))dH(s-1) +$$

$$+ \sum_{j=b+1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\varphi(s,\mu,x,u))ds, \quad i = \overline{1,p}.$$

Здесь и далее в работе интеграл $\int_u^t f(x)dL(x)$ понимается в смысле Лебега-Стилтьеса на промежутке $(u;t]$, $H(s)$ – функция Хевисайда, т. е. $H(s)=1$, при $s \ge 0$ и $H(s)=0$, при $s<0$, $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r+) - L^d(\mu_r-)$ – величина скачка. Существование и единственность решения системы (4) для всех значений параметров $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$ доказано в [6].

В следующей лемме утверждается справедливость неравенства – дискретного аналога неравенства Грануола. Лемма является очевидным следствием леммы 4.2 статьи [5].

Лемма 1. Пусть для любого $n = 0,1,2,\ldots$ справедливо неравенство

$$Z_{n+1} \le A + \sum_{k=1}^{n} A_k + \sum_{k=1}^{n} B_k Z_k,$$

где A, A_k, B_k – некоторые неотрицательные константы и $Z_k \ge 0, k=\overline{1,n}$. Тогда верно неравенство

$$Z_{n+1} \le (A + \sum_{k=1}^{n} A_k)\exp(\sum_{k=1}^{n} B_k).$$

Так как функция $L^j(\cdot)$ имеет не более чем счетное число точек разрыва и ее вариация конечна, то 1. Отсюда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in N$ такое, что $\sum_{j=1}^{q}\sum_{r=n_0}^{\infty}\left|\Delta L^j(\mu_r)\right| < \varepsilon$. Далее представим $L^{jd}(\cdot)$ разрывную часть L^j в виде

$$L^{jd}(t) = L^{jd,\ge n_0}(t) + L^{jd,<n_0}(t), \tag{5}$$

где $L^{jd,\ge n_0}(\cdot)$ и $L^{jd,<n_0}(\cdot)$ содержат точки разрывов μ_r с номерами, большими либо равными n_0, т.е. $r \ge n_0$, и меньшими n_0, т. е. $r < n_0$, соответственно. Так как функция $L^{jd,<n_0}(\cdot)$ имеет $n_0 - 1$ точку разрыва на отрезке T, то существует конечное число номеров k_r таких, что $\mu_r - \dfrac{1}{\gamma^j(n)} \in [t_{k_r^j}, t_{k_r^j+1})$ причем, если $h_n + \dfrac{1}{\gamma^j(n)} < \dfrac{1}{2}\min\limits_{1\le s,r\le n_0-1}\left|\mu_s - \mu_r\right|$ то $k_r^j \ne k_s^j$ при $r \ne s$. Положим $\xi_k^{rj} = \int_{\mu_r-(k_r^j+k)h_n-\tau_t}^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} \rho_n^j(s)ds$ тогда $0 = \xi_0^{rj} \le \xi_1^{rj} \le \ldots \le \xi_{l^j+2}^{rj} = 1$, где $l^j = \left[\dfrac{1}{\gamma^j(n)h_n}\right]$ (4) также везде далее C – константа не зависящая от n,t,h_n, под модулем вектора $x \in R^p$ будем понимать норму $\|x\| = \max\limits_{1\le i\le n}\left|x^i\right|$, обозначим также $\gamma^v(n) = \min\limits_j \gamma^j(n)$.

Лемма 2. Пусть x_n – решение (2), $k_r^j \le k_r^\beta$ $\beta = \overline{b+1,q}$ и

$$Q_\alpha^j = \sum_{\theta=1}^{p}\sum_{\beta=b+1}^{q} {}^\theta V_\alpha^{j\beta}$$

$${}^\theta V_\alpha^{j\beta} = \left|\sum_{k=0}^{\alpha} f_n^{\theta\beta}(x_n(t_{k+k_r^j}))(\xi^{r\beta}_{k_r^j-k_r^\beta+k+1} - \xi^{r\beta}_{k_r^j-k_r^\beta+k}) - \int_0^{\xi^{r\beta}_{k_r^j-k_r^\beta+\alpha+1}} f^{\theta\beta}(\phi(s,\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)))ds\right|,$$

где $\alpha = 0,1,2,\ldots,l^j - 1$ и $b+1 \le j \le q$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n и $t \notin \bigcup_{r=1}^{n_0}(\mu_r - \dfrac{1}{\gamma^v(n)}, \mu_r)$ имеем

$$Q_\alpha^j \le C\sum_{i=1}^{p}\left|x_n^i(t_{k_r^j}) - x^i(\mu_r-)\right| + C\sum_{m=1}^{q}\operatorname*{var}_{t\in(\mu_r-\frac{1}{\gamma^j(n)}-h_n,\mu_r)} L^{mc}(t) +$$

$$+ C\sum_{\beta=b+1}^{q}\gamma^\beta(n)h_n + C\frac{1}{n} + C\varepsilon.$$

Доказательство леммы непосредственно следует из определений функций $x_n(t)$, $\varphi(t,\mu,x,u)$ и леммы 1.

Следующая теорема показывает, что решение уравнения (4) является ассоциированным решением задачи Коши (1).

Теорема. Пусть f^{ij}, $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Пусть b – некоторое фиксированное целое число, $0 \le b \le q$ и пусть при $n \to \infty$ $h_n \to 0$ выполняется $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ для всех $j=\overline{1,b}$ и $\gamma^j(n)h_n \to 0$ для всех $j=\overline{b+1,q}$. Тогда если

doi.org/10.36773/1818-1212-2020-123-5-5-8

$\int\limits_T \left| x_{n_0}^i(\tau_t) - x_0^i \right| dt \to 0$ для всех $j = \overline{1,q}$, то решение $x_n(t)$ задачи Коши (2) сходится к решению системы (4) в $L^1(T)$.

Доказательство. Проделаем следующие преобразования

$$\left| x_n^1(t) - x^1(t) \right| \le \left| x_{n0}^1(\tau_t) - x_0^1 \right| + \sum_{j=1}^{q} \left| \int_0^{\tau_t} f^{1j}(x(s)) dL^{jc}(s) \right| +$$

$$+\sum_{j=1}^{q} \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} (f_n^{1j}(x_n(t_k)) - f^{1j}(x(t_k)))[L_n^{jc}(t_{k+1}) - L_n^{jc}(t_k)] \right| +$$

$$+\sum_{j=1}^{q} \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(t_k))[L_n^{jc}(t_{k+1}) - L_n^{jc}(t_k)] - \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(t_k))[L^{jc}(t_{k+1}) - \right.$$

$$\left. - L^{jc}(t_k)] \right| + \sum_{j=1}^{q} \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(t_k))[L^{jc}(t_{k+1}) - L^{jc}(t_k)] - \right.$$

$$\left. - \int_{\tau_t}^{t} f^{1j}(x(s)) dL^{jc}(s) \right| + \left| \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(t_k))[L_n^{jd}(t_{k+1}) - L_n^{jd}(t_k)] - \right.$$

$$\left. \sum_{\mu_r \le t} S^1(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)) \right| =$$

$$= I_0(t) + \sum_{j=1}^{q} (I_1^j(t) + I_2^j(t) + I_3^j(t) + I_4^j(t)) + I_5(t).$$

Так как f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены, функции $L^j(t)$ $j = \overline{1,q}$ имеют ограниченную вариацию, используя вид $x(t)$, свойства интеграла Стилтьеса получим следующие оценки:

$$I_1^j(t) \le C \operatorname*{var}_{t \in [0; h_n)} L^{jc}(t),$$

$$I_2^j(t) \le C \sum_{k=0}^{m_t-1} (\left| x_n(t_k) - x(t_k) \right| + \frac{1}{n}) \left| L_n^{jc}(t_{k+1}) - L_n^{jc}(t_k) \right|,$$

$$I_3^j(t) \le C \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \le \frac{1}{\gamma^j(n)}}} \operatorname*{var}_{t \in [t_1, t_1]} L^{jc}(t) + Ch_n,$$

$$I_4^j(t) \le C \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \le \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n}} \operatorname*{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^{jc}(t) + Ch_n.$$

Рассмотрим $I_5^j(t)$. Используя представление $L^{jd}(\cdot)$ в виде (5) и соответствующие ему обозначения. Получим

$$I_5(t) \le \left| \sum_{j=1}^{b} \left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(t_k)) \left[L_n^{jd,<n_0}(t_{k+1}) - L_n^{jd,<n_0}(t_k) \right] - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{\mu_r \le t} \Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r) \int_0^1 f^{1j}(\phi(s-, \mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r))) dH(s-1) \right] \right| +$$

$$+\sum_{j=1}^{b} \left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(t_k)) \left[L_n^{jd,\ge n_0}(t_{k+1}) - L_n^{jd,\ge n_0}(t_k) \right] - \right.$$

$$\left. - \sum_{\mu_r \le t} \Delta L^{jd,\ge n_0}(\mu_r) \int_0^1 f^{1j}(\phi(s-, \mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r))) dH(s-1) \right] \Bigg| +$$

$$+ \left| \sum_{j=b+1}^{q} \left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(t_k)) \left[L_n^{jd,<n_0}(t_{k+1}) - L_n^{jd,<n_0}(t_k) \right] - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{\mu_r \le t} \Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r) \int_0^1 f^{1j}(\phi(s, \mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r))) ds \right] \right| +$$

$$+ \left| \sum_{j=b+1}^{q} \left[\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{1j}(x_n(t_k)) \left[L_n^{jd,\ge n_0}(t_{k+1}) - L_n^{jd,\ge n_0}(t_k) \right] - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \sum_{\mu_r \le t} \Delta L^{jd,\ge n_0}(\mu_r) \int_0^1 f^{1j}(\phi(s, \mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r))) ds \right] \right| =$$

$$= \sum_{j=1}^{b} I_5^{j1}(t) + \sum_{j=1}^{b} I_5^{j2}(t) + \sum_{j=b+1}^{q} I_5^{j3}(t) + \sum_{j=b+1}^{q} I_5^{j4}(t).$$

Далее, используя лемму 2, то, что $I^j = 0$ при $j = \overline{1,b}$ определения функций $x_n(t)$ и $\varphi(t, \mu, x, u)$, для достаточно больших n и $t \notin \bigcup_{r=1}^{n_0} (\mu_r - \frac{1}{\gamma^v(n)}, \mu_r)$ получим

$$I_5^{j1}(t) \le C \sum_{\mu_r \le t} \left| \Delta L^{id,<n_0}(\mu_r) \right| \left(\sum_{i=1}^{p} \left| x_n^i(t_{k_r^v}) - x^i(\mu_r -) \right| \right) +$$

$$+\sum_{\beta=1}^{q} \operatorname*{var}_{t \in (\mu_r - \frac{1}{\gamma^j(n)} - h_n, \mu_r)} L^{\beta c}(t) + \sum_{m=b+1}^{q} \gamma^m(n) h_n + \frac{1}{n} + \varepsilon +$$

$$+ \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n + \sum_{i=1}^{p} \sum_{m=b+1}^{q} \left| \Delta L^m(\mu_r) \right| (1 - \xi_{k_r^j}^{rm}) + C \sum_{i=1}^{p} \sum_{m=1}^{b} \left| \Delta L^m(\mu_r) \right| \times$$

$$\times \left| \sum_{z=0}^{k_r^j - k_r^v - 1} f^{im}(x_n(t_{k_r^v + z}))(\xi_{k_r^v - k_r^m + z + 1}^{rm} - \xi_{k_r^v - k_r^m + z}^{rm}) \right| +$$

$$\left| (f_n^{1j}(x_n(t_{k_r^j})) - f_n^{1j}(x_n(t_{k_r^j + 1})))(\xi_2^{rj} - \xi_1^{rj}) \right|).$$

Для $I_5^{j2}(t)$ для любого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ имеем $\sum_{j=1}^{b} I_5^{j2}(t) \le C\varepsilon.$

Из леммы 2, при достаточно больших n и $t \notin \bigcup_{r=1}^{n_0} (\mu_r - \frac{1}{\gamma^v(n)}, \mu_r)$ получим

$$I_5^{j3}(t) \le C \sum_{\mu_r \le t} \left| \Delta L^{id,<n_0}(\mu_r) \right| \left(\sum_{i=1}^{p} \left| x_n^i(t_{k_r^v}) - x^i(\mu_r -) \right| \right) +$$

$$+\sum_{\beta=1}^{q} \operatorname*{var}_{t \in (\mu_r - \frac{1}{\gamma^j(n)} - h_n, \mu_r)} L^{\beta c}(t) + \sum_{j=b+1}^{q} \gamma^j(n) h_n + \frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n).$$

Аналогично для $I_5^{j4}(t)$ имеем $\sum_{j=b+1}^{q} I_5^{j4}(t) \le C\varepsilon.$

Используя полученные оценки при достаточно больших n и $t \notin \bigcup_{r=1}^{n_0} (\mu_r - \frac{1}{\gamma^v(n)}, \mu_r)$, получим

$$\left| x_n(t) - x(t) \right| \le \sum_{i=1}^{p} \left| x_{n_0}^i(\tau_t) - x_0^i \right| + C \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=0}^{m_t-1} \left| x_n(t_k) - x(t_k) \right| \times$$

$$\times (\left| L_n^{jc}(t_{k+1}) - L_n^{jc}(t_k) \right| + C) + C \sum_{j=1}^{q} \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \le \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n}} \operatorname*{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^{jc}(t) +$$

$$+ Ch_n + C \sum_{j=1}^{b} \sum_{\mu_r \le t} \left| \Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r) \right| (\frac{1}{n} + \varepsilon + \frac{1}{\gamma^j(n)} + h_n +$$

$$+ \sum_{m=b+1}^{q} \left| \Delta L^m(\mu_r) \right| (1 - \xi_{k_r^j - k_r^m}^{rm}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{m=1}^{b} \left| \Delta L^m(\mu_r) \right| \left| \sum_{z=0}^{k_r^j - k_r^v - 1} f^{im}(x_n(t_{k_r^v + z}))(\xi_{k_r^v - k_r^m + z + 1}^{rm} - \xi_{k_r^v - k_r^m + z}^{rm}) \right| +$$

$$+\left|(f_n^{1j}(x_n(t_{k_r^j}))-f_n^{1j}(x_n(t_{k_r^j+1})))(\xi_2^{rj}-\xi_1^{rj})\right|)+$$

$$+C\sum_{j=1}^{q}\sum_{\mu_r\le t}\left|\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\right|(\sum_{m=b+1}^{q}\gamma^m(n)h_n+\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ |t_1-t_2|\le\frac{1}{\gamma^j(n)}+h_n}}\operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]}L^j(t)).$$

Введем обозначение $T_n=\bigcup_{k=0}^{m_t-1}\bigcup_{r=1}^{n_0}(kh_n+\mu_r-\frac{1}{\gamma^{\nu}(n)},kh_n+\mu_r)$.

Применяя лемму 1 к последнему неравенству, при достаточно больших n получим

$$\int_T\left|x_n(t)-x(t)\right|dt\le\int_{T\setminus T_n}\sum_{i=1}^{p}\left|x_{n0}^i(\tau_t)-x_0^i\right|dt+$$

$$+C\int_{T\setminus T_n}\sum_{j=1}^{q}\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ |t_1-t_2|\le\frac{1}{\gamma^j(n)}+h_n}}\operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]}L^{jc}(t)dt+C\int_{T\setminus T_n}h_n dt+$$

$$+C\int_{T\setminus T_n}\sum_{j=1}^{b}\sum_{\mu_r\le t}\left|\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\right|(\frac{1}{n}+\varepsilon+\frac{1}{\gamma^j(n)}+h_n)dt+$$

$$+C\sum_{\mu_r\le t}\left|\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\right|(\sum_{m=b+1}^{q}\left|\Delta L^m(\mu_r)\right|\times$$

$$\times(h_n+\frac{1}{\gamma^j(n)})+aCh_n\sum_{m=1}^{b}\left|\Delta L^m(\mu_r)\right|+C\int_{T\setminus T_n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{\mu_r\le t}\left|\Delta L^{jd,<n_0}(\mu_r)\right|\times$$

$$\times(\sum_{m=b+1}^{q}\gamma^m(n)h_n+\max_{\substack{t_1,t_2\in T\\ |t_1-t_2|\le\frac{1}{\gamma^j(n)}+h_n}}\operatorname*{var}_{t\in[t_1,t_2]}L^j(t))dt+\frac{C}{\gamma^{\nu}(n)}.$$

Устремляя $n\to\infty$ $h_n\to 0$ так, что $\gamma^j(n)h_n\to\infty$ для $j=\overline{1,b}$ и $\gamma^j(n)h_n\to 0$ для $j=\overline{b+1,q}$, а затем $\varepsilon\to 0$, получим $\int_T\left|x_n(t)-x(t)\right|dt\to 0$. **Теорема доказана.**

Аналогичная теорема для системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами была доказана в работе [11].

Список цитированных источников

1. Антосик, П. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский – М. : Мир, 1976. – 311 с.
2. Das, P. S. Existence and stability of measure differential equations / P. S. Das, R. R. Sharma // Czech. Math. J. – 1972. – Vol. 22, № 1. – P.145–158.
3. Завалищин, С. Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. – М. : Наука, 1991. – 256 с.
4. Лазакович, Н. В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н. В. Лазакович // Докл. НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 23–27.
5. Yablonski, A. Differential equations with generalized coefficients / A. Yablonski // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
6. Groh, J. A nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation and a Gronwall inequality in one dimension / J. Groh // Illionois J. Math. – 1980. – V. 24 (2). – P. 244–263.
7. Жук, А. И. Неавтономные системы дифференциальных уравненийс обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 6. – С. 20–23.
8. Жук, А. И. Системы квазидифференциальных уравнений в прямом произведении алгебр мнемофункций. Симметрический случай / А. И. Жук, А. К. Хмызов // Вестник Белорусского государственного университета. – 2010. – № 2 : Физика. Математика. Информатика.– С. 87–93.
9. Жук, А. И. Неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / А. И. Жук // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2014. – № 5 : Физика, математика, информатика. – С. 51–53.
10. Жук, А.И. Оценки скорости сходимости к ассоциированным решениям дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / А. И. Жук, О. Л. Яблонский // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 2 – С. 17–22.
11. Жук, А. И. Ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Смешанный случай / А. И. Жук, О. Л. Яблонский, С. А. Спасков // Весцi БДПУ. – 2019. – № 3 : Фiзiка, матэматыка, iнфарматыка, бiялогiя, геаграфiя. – С. 16–22.

References

1. Antosik, P. Teoriya obobshchennyh funkcij: sekvencial'nyj podhod / P. Antosik, YA. Mikusinskij, R. Sikorskij – M. : Mir, 1976. – 311 s.
2. Das, P. S. Existence and stability of measure differential equations / P. S. Das, R. R. Sharma // Czech. Math. J. – 1972. – Vol. 22, № 1. – P.145–158.
3. Zavalishchin, S. T. Impul'snye processy: modeli i prilo-zheniya / S. T. Zavalishchin, A. N. Sesekin. – M. : Nauka, 1991. – 256 s.
4. Lazakovich, N. V. Stohasticheskie differencialy v algebre obobshchennyh sluchajnyh processov / N. V. Lazakovich // Dokl. NAN Belarusi. – 1994. – T. 38, № 5. – S. 23–27.
5. Yablonski, A. Differential equations with generalized coefficients / A. Yablonski // Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
6. Groh, J. A nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation and a Gronwall inequality in one dimension / J. Groh // Illionois J. Math. – 1980. – V. 24 (2). – P. 244–263.
7. ZHuk, A. I. Neavtonomnye sistemy differencial'nyh uravnenijs obobshchennymi koefficientami v algebre obobshchennyh funkcij / A. I. ZHuk, O. L. YAblonskij // Dokl. NAN Belarusi. – 2013. – T. 57, № 6. – S. 20–23.
8. ZHuk, A. I. Sistemy kvazidifferencial'nyh uravnenij v pryamom proizvedenii algebr mnemofunkcij. Simmetricheskij sluchaj / A. I. ZHuk, A. K. Hmyzov // Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. – 2010. – № 2 : Fizika. Matematika. Informatika. – S. 87–93.
9. ZHuk, A. I. Neavtonomnye sistemy differencial'nyh uravnenij s obobshchennymi koefficientami v algebre mnemofunkcij / A. I. ZHuk // Vestnik Brestskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. – 2014. – № 5 : Fizika, matematika, informatika. – S. 51–53.
10. ZHuk, A.I. Ocenki skorosti skhodimosti k associirovannym resheniyam differencial'nyh uravnenij s obobshchennymi koefficientami v algebre mnemofunkcij / A. I. ZHuk, O. L. YAblonskij // Dokl. NAN Belarusi. – 2015. – T. 59, № 2 – S. 17–22.
11. ZHuk, A. I. Associirovannye resheniya sistemy neavtonomnyh differencial'nyh uravnenij s obobshchennymi koefficientami. Smeshannyj sluchaj / A. I. ZHuk, O. L. YAblonskij, S. A. Spaskov // Vesci BDPU. – 2019. – № 3 : Fizika, matematyka, infarmatyka, biyalogiya, geagrafiya. – S. 16–22.

Материал поступил в редакцию 15.12.2020

doi.org/10.36773/1818-1212-2020-123-5-5-8