УДК 624.04

Игнатюк В.И., Алексеев Т.Ю.

УЧЕБНАЯ КОМПЬЮТЕРНАЯ ПРОГРАММА РАСЧЕТА СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ РАМ МЕТОДОМ СИЛ

Введение. В современных условиях решение расчетных задач требует применения современных компьютеров и компьютерных программ, облегчающих математические вычисления и избавляющих студента от больших объемов однородных вычислений.

При этом учебные компьютерные программы должны строиться на принципах, отличных от тех, которые используются в программах расчетного и проектно-конструкторского назначения, в которых после ввода исходных данных выполняется расчет и в том или ином виде получаются результаты решения задачи. Такие программы не обладают обучающими свойствами и не ориентированы на познание методов расчета.

В любом из методов расчета сооружений можно выделить две его стороны, одна из которых представляет суть и физические основы работы сооружения и метода расчета, а вторая связана с математической реализацией метода и большими (в той или иной степени) объемами вычислений.

О принципах создания учебных компьютерных программ. Учебные компьютерные программы должны уменьшать объем ручных вычислений, облегчать трудоемкие вычислительные процессы, сохраняя при этом сущность и принципы методов расчета, должны способствовать изучению методов расчета, их физической сути и физических основ работы сооружений, а также должны представлять возможности для исследования поведения и работы сооружений при изменении их характеристик и параметров, то есть должны представлять собой обучающе-исследовательские системы [2].

Главная сложность при разработке таких программ – найти то соотношение двух сторон в задаче, в методе расчета, которое позволяло бы, с одной стороны, максимально облегчить математические вычисления, уменьшить объем ручного счета, а с другой стороны, сохранить сущностно-физическую сторону задач и методов расчета. Решение этой проблемы требует глубокого анализа методов расчета, которые при их реализации в учебных программах следует разделить на две части. Одна из них, менее трудоемкая с вычислительной точки зрения, но несущая в себе суть и физические основы метода и способствующая его изучению и познанию, должна выполняться вручную. Вторая, менее информативная, но более трудоемкая и объемная по вычислениям, должна передаваться компьютеру. Это разделение в разных методах расчета может быть совершенно разным, что зависит от процедур методов, при этом в одном методе расчета на разных его этапах эти части могут взаимно переплетаться друг с другом.

Здесь делается попытка реализации изложенных подходов при составлении учебной компьютерной программы расчета статически неопределимых рам методом сил.

Алгоритм расчета. Метод сил включает в себя целый ряд процедур и этапов расчета, часть из которых в большей степени наполнены физической сутью и физическими основами метода расчета и работы сооружения и содержат менее сложные вычисления, другая же часть больше связана с математической реализацией метода расчета, с большими (в той или иной степени) объемами вычислений, которые достаточно сложно выполнять без привлечения компьютерной техники и специальных вычислительных программ.

Кратко процедура расчета методом сил статически неопределимых рам состоит [1] из следующих этапов:

1. Определяется степень статической неопределимости (число «лишних» связей) рамы *Л*.

2. Выбирается основная система метода сил (О.С.), то есть статически определимая, геометрически неизменяемая система, получаемая из заданной статически неопределимой рамы путем отбрасывания лишних связей и замены их неизвестными усилиями X_1, X_2, … $X_Л$, которые являются основными неизвестными метода расчета.

Для любой статически неопределимой рамы существует очень большое число основных систем метода сил. Для расчета из них принимается одна О.С., называемая расчетной, в качестве которой выбирают самую рациональную О.С., в которой построение эпюр усилий было бы как можно более простым, а также эпюры были бы как можно более простыми по форме, что в дальнейшем может существенно упростить и облегчить расчет.

3. В расчетной О.С. метода сил строятся единичные эпюры усилий $\bar{M}_1, \bar{M}_2, \ldots \bar{M}_Л$ от действия единичных значений неизвестных метода сил $X_1, X_2, \ldots X_Л$ и грузовая эпюра изгибающих моментов M_P от действия внешней нагрузки.

4. Вычисляются значения единичных коэффициентов и свободных членов канонических уравнений метода сил, которые по своей сути являются перемещениями, по формулам Мора:

$$\delta_{ii} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i^2 \, dx}{EJ}\,; \quad \delta_{ik} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \, \bar{M}_k \, dx}{EJ}\,;$$

$$\Delta_{iP} = \sum_1^n \int_0^l \frac{\bar{M}_i \, M_P \, dx}{EJ}\,, \tag{1}$$

где $\bar{M}_i$, $\bar{M}_k$ – зависимости изменения изгибающих моментов (их эпюр) в О.С. от действия сил $X_i = 1$ и $X_k = 1$; M_P – зависимость изменения изгибающего момента (эпюры) в О.С. от действия внешних нагрузок; EJ – жесткость стержня (участка) при изгибе, n – число участков интегрирования, l – длины участков интегрирования.

Вычисление интегралов Мора в формулах (1) выполняется по формулам Симпсона и трапеций.

Заметим, что если построить суммарную единичную эпюру:

$$\bar{M}_S = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \ldots + \bar{M}_Л\,, \tag{2}$$

то можно вычислить сумму всех единичных перемещений

$$\delta_{SS} = \sum_{i=1}^{Л} \sum_{k=1}^{Л} \delta_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{M}_S^2 \, dx}{EJ} \tag{3}$$

и сумму всех грузовых перемещений

$$\Delta_{SP} = \sum_{i=1}^{Л} \Delta_{iP} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{M}_S \, M_P \, dx}{EJ}. \tag{4}$$

5. Решается система канонических уравнений метода сил, имеющая вид:

$$\begin{cases} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \ \ldots \ + \delta_{1Л}X_Л + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \ \ldots \ + \delta_{2Л}X_Л + \Delta_{2P} = 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \ \ldots \ + \delta_{3Л}X_Л + \Delta_{3P} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{Л1}X_1 + \delta_{Л2}X_2 + \delta_{Л3}X_3 + \ldots + \delta_{ЛЛ}X_Л + \Delta_{ЛP} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

где δ_{ik} и Δ_{iP} – единичное и грузовое перемещения по направлению силы X_i от действия соответственно силы X_k единичной величины и внешней нагрузки.

Система канонических уравнений метода сил (5) является неод-

Игнатюк Валерий Иванович, *к.т.н., зав. кафедрой строительной механики Брестского государственного технического университета.*
Алексеев Тарас Юрьевич, *студент строительного факультета Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

нородной системой линейных алгебраических уравнений и может быть решена, например, способом Гаусса.

6. После определения неизвестных метода сил X_i (i = 1 … $Л$) расчет и построение окончательных эпюр изгибающих моментов в системе выполняется на основе принципа независимости действия сил по формуле:

$$M = M_1X_1 + M_2X_2 + \ldots + M_ЛX_Л + M_P\,. \qquad (6)$$

7. По эпюре M строим окончательную эпюру поперечных сил Q.

8. По эпюре Q способом вырезания узлов с учетом действующих в узлах внешних нагрузок строится эпюра продольных сил N.

Алгоритм программы. В рассматриваемой здесь компьютерной программе выполняется следующее разделение указанных процедур метода сил на две части.

Вручную предлагается выполнить этапы 1–3, 7 и 8, которые несут в себе в большей степени физическую суть метода, позволяют более глубоко понять и изучить метод и основные его принципы. Этапы 1–3 позволяют закрепить навыки определения числа лишних связей, выбора рациональных расчетных О.С. метода сил, навыки кинематического анализа систем, построения эпюр внутренних сил в статически определимых системах (О.С.), показать и закрепить умение вычисления перемещений по формулам Мора (1) различными способами, для чего вручную необходимо вычислить коэффициенты δ_{ss} (3) и Δ_{sP} (4), являющиеся как проверочными в расчете, так и контрольными в программе.

Программа проверяет правильность вычисления величин δ_{ss} и Δ_{sP} (с учетом допускаемых погрешностей) и при их верном вычислении выполняет расчет наиболее трудоемких этапов метода сил 4, 5, 6, то есть вычисляет все коэффициенты и свободные члены (единичные и грузовые перемещения (1)) системы уравнений, производит решение системы канонических уравнений метода сил (5) с определением неизвестных метода сил X_1, X_2, … $X_Л$, выполняет расчет и построение окончательной эпюры изгибающих моментов M (6).

Эпюры поперечных и продольных сил Q и N (этапы расчета 7 и 8) студент должен в конце рассчитать и построить опять же самостоятельно (вручную), а также выполнить статическую проверку равновесия рамы.

При неверном вычислении коэффициентов δ_{ss} или Δ_{sP} программа выдает соответствующее сообщение, и требуется произвести их расчет (или одного из них) заново с последующим новым их вводом в программу для контроля.

Описание программы. Программа MetSil составлена в среде программирования C# [3], работает под управлением системы Windows, исходный текст программы имеет объем 5 Мб, исполняемый файл MetSil.exe –180 Кб.

Ввод исходных данных осуществляется в основном окне программы, представленном на рисунке 3, в котором показан ввод эпюры M_P для рамы, представленной на рисунке 1, расчетная основная система метода сил для которой ($Л$=5) изображена на рисунке 2.

Рис. 1. Расчетная схема рамы

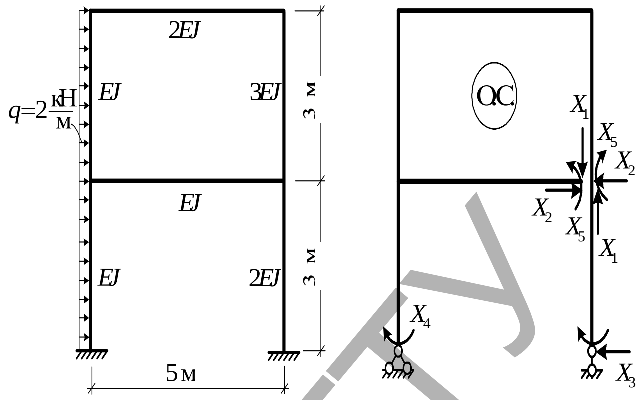

Рис. 2. Основная система метода сил

Стандартный для Windows удобный и эстетичный графический интерфейс и достаточно развитый сервис делают работу в программе простой и понятной.

После ввода исходной информации, включающей координаты узлов, привязку стержней и их жесткостные характеристики, ординаты единичных ($\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$, … $\overline{M}_Л$) и грузовой (M_P) эпюр изгибающих моментов, программу можно запустить на расчет.

В результате появляется окно, представленное на рисунке 4, в котором необходимо ввести проверочные для расчета значения суммарных единичного δ_{ss} и грузового Δ_{sP} перемещений. Эти перемещения необходимо вычислить предварительно.

Если контрольные значения вычислены неверно, то программа выдает соответствующее сообщение.

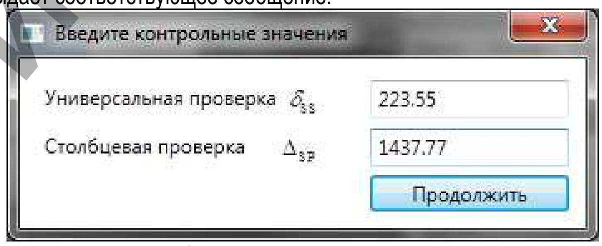

Рис. 4. Окно ввода контрольных величин

Если контрольные значения вычислены верно, то программа выполняет полный расчет рамы – вычисляются все единичные коэффициенты (δ_{ik}) и свободные члены (Δ_{iP}) системы канонических уравнений метода сил, решается система канонических уравнений (5), определяются неизвестные метода сил X_i, выполняется расчет всех ординат (6) и графическое построение окончательной эпюры изгибающих моментов M.

Сервис программы включает в себя следующие возможности:

- диалоговый режим ввода исходной информации, обработки и анализа промежуточных и окончательных результатов решения задачи;
- сохранение в файл как исходных данных, так и результатов расчета;
- печать исходных данных и результатов расчета в численном (табличном) и в графическом видах;
- масштабирование изображений рам и ординат эпюр усилий в окнах графики;
- перемещение графических объектов (схем рам, эпюр усилий) с помощью мыши;
- возможность задавать число знаков после запятой на эпюрах усилий в окне графики;
- наличие разветвленной системы Помощи, которая содержит следующие разделы: метод расчета, работа с программой, ввод исходных данных, система меню программы, полезные советы, расчет рамы, правила записи ординат эпюр.

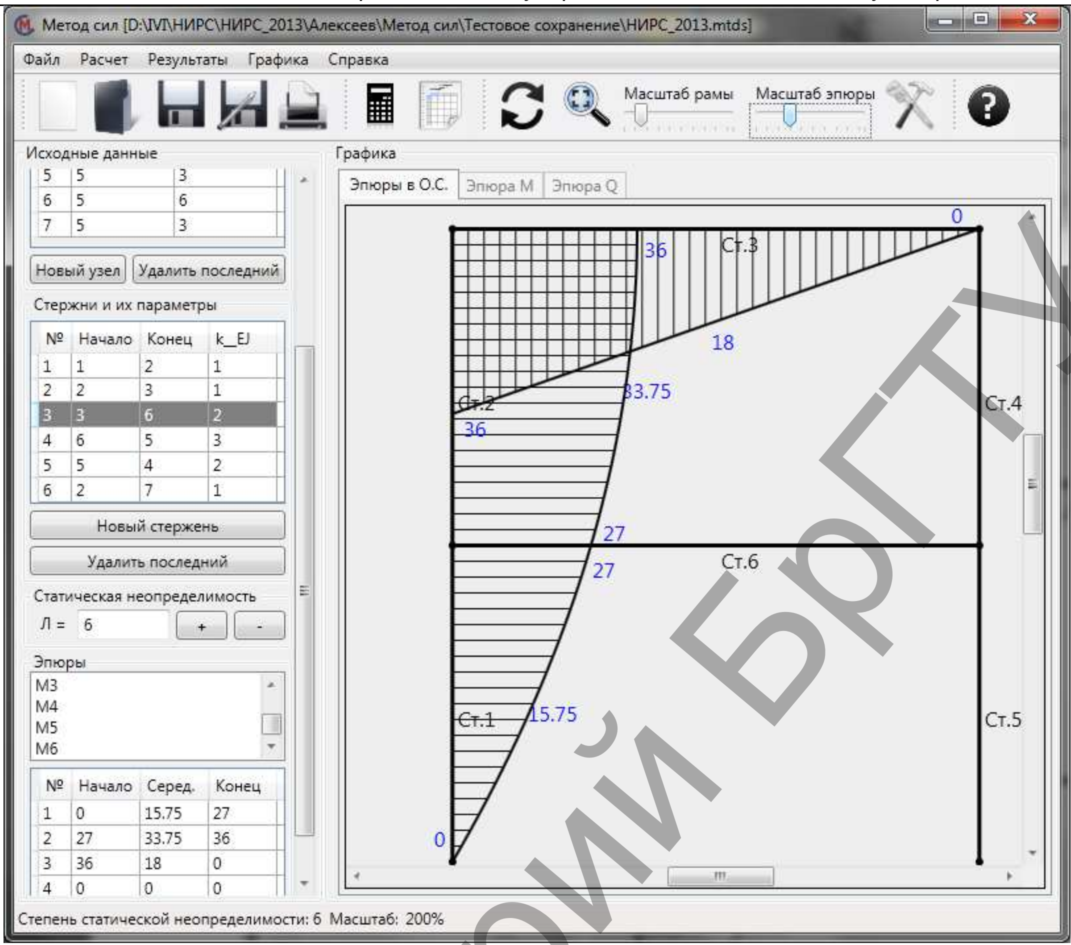

Рис. 3. Основное окно программы «MetSil»

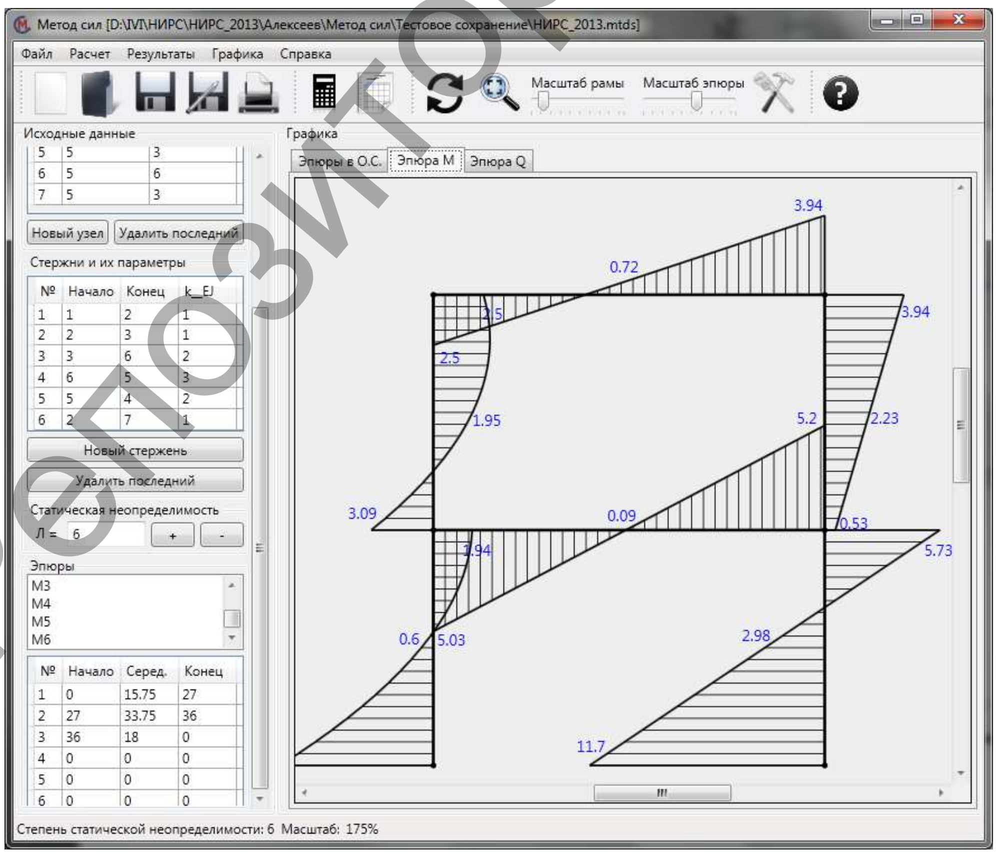

Рис. 5. Окончательная эпюра изгибающих моментов

Результаты расчета в программе представляются как в табличном, так и в графическом виде – изображается окончательная эпюра изгибающих моментов M. Для рассматриваемой рамы (рисунок 2), окно результатов расчета и окончательная эпюра M показаны на рисунке 5.

При успешно выполненном расчете программа позволяет выполнять анализ характера зависимостей эпюр изгибающих моментов M и поперечных сил Q в раме и исследовать влияние величин жесткостей стержней на значения усилий в раме при одной и той же нагрузке, что делается уже без контроля.

Заключение. Разработанная учебная компьютерная программа MetSil позволяет производить расчет статически неопределимых рам методом сил с выполнением ряда этапов расчета, определяющих суть и физический смысл задачи (включая вычисление суммарных единичного и грузового перемещений, являющихся контрольными в программе), вручную и с вычислением наиболее объемной части численных расчетов компьютером.

Программа используется при выполнении расчетно-проектировочных заданий и может применяться в самостоятельной работе при изучении соответствующего раздела дисциплины «Строительная механика». После выполнения основного расчета программа позволяет выполнить расчет рассматриваемой рамы уже без контроля при изменении жесткостных характеристик участков стержней, что позволяет производить исследование влияния жесткостных характеристик стержней на величины усилий в системе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
2. Игнатюк, В.И. Создание учебных компьютерных программ для курса строительной механики // Вышэйшая школа. – 2001. – № 6. – С. 35–38.
3. C# 4.0: Полное руководство: пер. с англ. – М.: ООО «Вильямс», 2011. – 1056 с.

Материал поступил в редакцию 13.12.13

IHNATSIUK V.I., ALEKSEEV T.U. Tutorial computer program for calculation hyperstatic frames by force

Here is described the development of tutorial computer programs for calculation hyperstatic frames by force method as the training research system as well as the principles of working out of such programs.

УДК 517.544

Юхимук М.М., Юхимук Т.Ю.

ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Введение. Впервые краевая задача для бесконечно связных областей была рассмотрена в работе [1]. В дальнейшем к этой тематике обращались неоднократно [2–4]. Исследование краевых задач для бесконечно связных областей близко по своему содержанию к исследованию краевых задач с бесконечным индексом, основы теории которых были созданы Н.В. Говоровым [5]. Он установил определённую связь между разрешимостью таких задач, распределением нулей и асимптотическим поведением специальных классов целых функций. Анализ такого рода задач является важным в силу их практической направленности (например, они хорошо моделируют композиционные материалы с богатой микроструктурой [6]). В настоящей работе в замкнутой форме даётся общее решение краевой задачи о скачке для бесконечно связных областей и мероморфных правых частей. Базой для исследования служат некоторые конструкции, предлагаемые в [7] для решения задачи о скачке в случае конечносвязных областей и рациональных правых частей.

1. Показатель сходимости комплексной последовательности. Пусть последовательность $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ такова, что $0<|\alpha_1|\le|\alpha_2|\le\ldots\le|\alpha_n|\le\ldots$ и $\lim\limits_{j\to\infty}|\alpha_j|=+\infty$. Показателем сходимости последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ называется число $\tau=\inf\limits_{\lambda}\left\{\lambda\in\mathbb{R}\ \middle|\ \sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_j|^{\lambda}}<+\infty\right\}$. При этом при $\lambda>\tau$ ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{|\alpha_j|^{\lambda}}$ сходится, а при $\lambda<\tau$ – расходится. При $\lambda=\tau$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Если ряд расходится для всех $\lambda\in\mathbb{R}$, то полагают $\tau=+\infty$.

<u>Утверждение 1</u>: Пусть для некоторой последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ точек комплексной плоскости $\lim\limits_{j\to\infty}\alpha_j=\infty$, причём $0<|\alpha_1|\le|\alpha_2|\le\ldots\le|\alpha_j|\le\ldots$ Пусть также $\inf\limits_{j\ne k}|\alpha_j-\alpha_k|=d>0$. В этом случае последовательность $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ обладает показателем сходимости, не превышающим двух.

<u>Доказательство</u>: Построим последовательность $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, члены которой заведомо мажорируются модулями соответствующих членов последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$, то есть $\forall j\in\mathbb{N}\ \left(|\beta_j|\le|\alpha_j|\right)$. Для этого, очевидно, нужно максимально «плотно» заполнить $\mathbb{C}$ касающимися внешним образом окружностями радиуса $\frac{d}{2}$ с центрами в точках $\beta_j\ \left(j\in\mathbb{N}\right)$. Все возможные разбиения плоскости правильными многоугольниками исчерпываются тремя случаями – разбиением правильными треугольниками, квадратами и шестиугольниками. Если вписать в каждый из этих многоугольников окружность, то окажется, что отношение площади круга к площади описанного около него многоугольника будет наибольшим именно для шестиугольника. Поэтому внутри окружности достаточно большого радиуса наибольшее число окружностей радиуса $\frac{d}{2}$ будет при следующем «шестиугольном» размещении их центров: $\beta_1=0$; $\beta_2=d$; $\beta_3=\frac{d}{2}+\frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_4=-\frac{d}{2}+\frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_5=-d$; $\beta_6=-\frac{d}{2}-\frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_7=\frac{d}{2}-\frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_8=\frac{3d}{2}-\frac{d\sqrt{3}}{2}i$;

***Юхимук Михаил Михайлович**, старший преподаватель кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
***Юхимук Татьяна Юрьевна**, ассистент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.