Результаты расчета в программе представляются как в табличном, так и в графическом виде – изображается окончательная эпюра изгибающих моментов M. Для рассматриваемой рамы (рисунок 2), окно результатов расчета и окончательная эпюра M показаны на рисунке 5.

При успешно выполненном расчете программа позволяет выполнять анализ характера зависимостей эпюр изгибающих моментов M и поперечных сил Q в раме и исследовать влияние величин жесткостей стержней на значения усилий в раме при одной и той же нагрузке, что делается уже без контроля.

Заключение. Разработанная учебная компьютерная программа MetSil позволяет производить расчет статически неопределимых рам методом сил с выполнением ряда этапов расчета, определяющих суть и физический смысл задачи (включая вычисление суммарных единичного и грузового перемещений, являющихся контрольными в программе), вручную и с вычислением наиболее объемной части численных расчетов компьютером.

Программа используется при выполнении расчетно-проектировочных заданий и может применяться в самостоятельной работе при изучении соответствующего раздела дисциплины «Строительная механика». После выполнения основного расчета программа позволяет выполнить расчет рассматриваемой рамы уже без контроля при изменении жесткостных характеристик участков стержней, что позволяет производить исследование влияния жесткостных характеристик стержней на величины усилий в системе.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Минск: БНТУ, 2009. – 756 с.
2. Игнатюк, В.И. Создание учебных компьютерных программ для курса строительной механики // Вышэйшая школа. – 2001. – № 6. – С. 35–38.
3. C# 4.0: Полное руководство: пер. с англ. – М.: ООО «Вильямс», 2011. – 1056 с.

Материал поступил в редакцию 13.12.13

IHNATSIUK V.I., ALEKSEEV T.U. Tutorial computer program for calculation hyperstatic frames by force

Here is described the development of tutorial computer programs for calculation hyperstatic frames by force method as the training research system as well as the principles of working out of such programs.

УДК 517.544

Юхимук М.М., Юхимук Т.Ю.

ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО СВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Введение. Впервые краевая задача для бесконечно связных областей была рассмотрена в работе [1]. В дальнейшем к этой тематике обращались неоднократно [2–4]. Исследование краевых задач для бесконечно связных областей близко по своему содержанию к исследованию краевых задач с бесконечным индексом, основы теории которых были созданы Н.В. Говоровым [5]. Он установил определённую связь между разрешимостью таких задач, распределением нулей и асимптотическим поведением специальных классов целых функций. Анализ такого рода задач является важным в силу их практической направленности (например, они хорошо моделируют композиционные материалы с богатой микроструктурой [6]). В настоящей работе в замкнутой форме даётся общее решение краевой задачи о скачке для бесконечно связных областей и мероморфных правых частей. Базой для исследования служат некоторые конструкции, предлагаемые в [7] для решения задачи о скачке в случае конечносвязных областей и рациональных правых частей.

1. Показатель сходимости комплексной последовательности. Пусть последовательность $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ такова, что $0 < |\alpha_1| \le |\alpha_2| \le \ldots \le |\alpha_n| \le \ldots$ и $\lim\limits_{j\to\infty} |\alpha_j| = +\infty$. Показателем сходимости последовательности $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ называется число $\tau = \inf\limits_{\lambda}\left\{\lambda \in \mathbb{R} \,\middle|\, \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_j|^{\lambda}} < +\infty\right\}$. При этом при $\lambda > \tau$ ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|\alpha_j|^{\lambda}}$ сходится, а при $\lambda < \tau$ – расходится. При $\lambda = \tau$ ряд может как сходиться, так и расходиться. Если ряд расходится для всех $\lambda \in \mathbb{R}$, то полагают $\tau = +\infty$.

Утверждение 1: Пусть для некоторой последовательности $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ точек комплексной плоскости $\lim\limits_{j\to\infty} \alpha_j = \infty$, причём $0 < |\alpha_1| \le |\alpha_2| \le \ldots \le |\alpha_j| \le \ldots$ Пусть также $\inf\limits_{j\ne k} |\alpha_j - \alpha_k| = d > 0$. В этом случае последовательность $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ обладает показателем сходимости, не превышающим двух.

Доказательство: Построим последовательность $(\beta_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, члены которой заведомо мажорируются модулями соответствующих членов последовательности $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$, то есть $\forall j \in \mathbb{N}\ (|\beta_j| \le |\alpha_j|)$. Для этого, очевидно, нужно максимально «плотно» заполнить $\mathbb{C}$ касающимися внешним образом окружностями радиуса $\frac{d}{2}$ с центрами в точках β_j $(j \in \mathbb{N})$. Все возможные разбиения плоскости правильными многоугольниками исчерпываются тремя случаями – разбиением правильными треугольниками, квадратами и шестиугольниками. Если вписать в каждый из этих многоугольников окружность, то окажется, что отношение площади круга к площади описанного около него многоугольника будет наибольшим именно для шестиугольника. Поэтому внутри окружности достаточно большого радиуса наибольшее число окружностей радиуса $\frac{d}{2}$ будет при следующем «шестиугольном» размещении их центров: $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = d$; $\beta_3 = \frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_4 = -\frac{d}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_5 = -d$; $\beta_6 = -\frac{d}{2} - \frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_7 = \frac{d}{2} - \frac{d\sqrt{3}}{2}i$; $\beta_8 = \frac{3d}{2} - \frac{d\sqrt{3}}{2}i$;

***Юхимук Михаил Михайлович**, старший преподаватель кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
***Юхимук Татьяна Юрьевна**, ассистент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

$\beta_9 = 2d$ и т.д. Введём более удобную для использования двойную индексацию членов последовательности $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$:

$$\beta_{nk}^{(1)} = d\left(n + k\sqrt{3}i\right), \qquad \beta_{nk}^{(2)} = d\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\left(k+\frac{1}{2}\right)i\right)$$

$\left(n,k \in \mathbb{Z}\right)$. Найдём показатель сходимости последовательности $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$:

$$\tau = \inf_{\lambda}\left\{\lambda \left| \sum_{\substack{n,k\in\mathbb{Z}\\(n,k)\neq(0,0)}} \frac{1}{\left|\beta_{nk}^{(1)}\right|^{\lambda}} + \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\left|\beta_{nk}^{(2)}\right|^{\lambda}} < +\infty \right.\right\} =$$

$$= \inf_{\lambda}\left\{\lambda \left| \sum_{\substack{n,k\in\mathbb{Z}\\(n,k)\neq(0,0)}} \left(d\sqrt{n^2+3k^2}\right)^{-\lambda} + \sum_{n,k\in\mathbb{Z}} \left(d\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+3\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\right)^{-\lambda} < +\infty \right.\right\}$$

(фигурирующие здесь ряды являются абсолютно сходящимися, поэтому порядок следования членов подпоследовательностей $\left(\beta_{nk}^{(1)}\right)_{n,k\in\mathbb{Z}}$ и $\left(\beta_{nk}^{(2)}\right)_{n,k\in\mathbb{Z}}$ не указывается). Последовательность $\left(\beta_{nk}^{(2)}\right)_{n,k\in\mathbb{Z}}$ получается из последовательности $\left(\beta_{nk}^{(1)}\right)_{n,k\in\mathbb{Z}}$ параллельным переносом на вектор $\left(\frac{d}{2};\frac{d\sqrt{3}}{2}\right)$. Учитывая это, а также очевидную симметрию в расположении членов последовательности $\left(\beta_{nk}^{(1)}\right)_{n,k\in\mathbb{Z}}$ на плоскости, можно утверждать, что показатель сходимости последовательности $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$ равен $\tau = \inf\limits_{\lambda}\left\{\lambda \left| \sum\limits_{n,k\in\mathbb{N}}\left(\sqrt{n^2+3k^2}\right)^{-\lambda} < +\infty\right.\right\}$. Известно [8], что двойной ряд $\sum\limits_{n,k\in\mathbb{N}}\left(an^2+2bnk+ck^2\right)^{-\mu}$ сходится, если $a>0$, $b^2<ac$ и $\mu>1$. Поэтому ряд $\sum\limits_{n,k\in\mathbb{N}}\left(\sqrt{n^2+3k^2}\right)^{-\lambda} = \sum\limits_{n,k\in\mathbb{N}}\left(n^2+3k^2\right)^{-\frac{\lambda}{2}}$ сходится при $\frac{\lambda}{2}>1$, т.е. при $\lambda>2$. Таким образом, показатель сходимости τ последовательности $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}$ равен двум. Занумеруем члены последовательностей $\left(\beta_{nk}^{(1)}\right)_{n,k\in\mathbb{Z}}$ и $\left(\beta_{nk}^{(2)}\right)_{n,k\in\mathbb{Z}}$ в порядке неубывания их модулей: $0=|\beta_1|\le|\beta_2|\le\ldots\le|\beta_j|\le\ldots$ Тогда для любой последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$, такой, что $\inf\limits_{j\neq k}\left|\alpha_j-\alpha_k\right|=d$, и для любого $j\in\mathbb{N}$ будет выполняться неравенство $\left|\alpha_j\right|\ge\left|\beta_j\right|$, откуда $\forall\lambda>2$ $\left(\frac{1}{\left|\alpha_j\right|^{\lambda}}\le\frac{1}{\left|\beta_j\right|^{\lambda}}\right)$ и $\sum\limits_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\left|\alpha_j\right|^{\lambda}}\le\sum\limits_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\left|\beta_j\right|^{\lambda}}<+\infty$.

Поэтому показатель сходимости последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ не превышает двух, что и требовалось доказать. Из доказательства также вытекает, что наименьшее целое χ, при котором заведомо $\sum\limits_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\left|\alpha_j\right|^{\chi}}<+\infty$, равно трём.

Применим аналогичный метод для оценки показателя сходимости последовательности, все члены которой расположены внутри некоторой полосы.

Утверждение 2: Пусть для некоторой последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ точек комплексной плоскости $\left|\operatorname{Im}\alpha_j\right|\le A$, где A – достаточно большое, но конечное число. Пусть также $\lim\limits_{j\to\infty}\alpha_j=\infty$, $0<|\alpha_1|\le|\alpha_2|\le\ldots\le|\alpha_j|\le\ldots$ и $\inf\limits_{j\neq k}|\alpha_j-\alpha_k|=d>0$. Тогда показатель сходимости последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ не превышает единицы.

Доказательство: Построим последовательность $\left(\beta_j\right)_{j=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ так же, как в доказательстве предыдущего утверждения, и аналогичным образом выделим из неё подпоследовательности

$$\beta_{nk}^{(1)} = d\left(n + k\sqrt{3}i\right), \qquad \left(n\in\mathbb{Z},\ k=\overline{-\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}\right];\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}\right]}\right);$$

$$\beta_{nk}^{(2)} = d\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{3}\left(k+\frac{1}{2}\right)i\right); \quad \left(n,k\in\mathbb{Z},\ k=\overline{-\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right];\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right]}\right),$$

члены которых лежат в полосе $\left|\operatorname{Im}\alpha_j\right|\le A$. Вычислим показатель сходимости построенной последовательности:

$$\tau = \inf_{\lambda}\left\{\lambda \left| \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ k=\overline{-\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}\right];\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}\right]}}} \frac{1}{\left|\beta_{nk}^{(1)}\right|^{\lambda}} + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ k=\overline{-\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right];\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right]}}} \frac{1}{\left|\beta_{nk}^{(2)}\right|^{\lambda}} < +\infty \right.\right\} =$$

$$= \inf_{\lambda}\left\{\lambda \left| \sum_{k=-\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}\right]}^{\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}\right]} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(d\sqrt{n^2+3k^2}\right)^{-\lambda}\right) + \right.\right.$$

$$\left.+ \sum_{k=-\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\right]}^{\left[\frac{A}{d\sqrt{3}}-\frac{1}{2}\right]} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(d\sqrt{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2+3\left(k+\frac{1}{2}\right)^2}\right)^{-\lambda}\right) < +\infty \right\} = 1.$$

Занумеровав члены последовательностей $\left(\beta_{nk}^{(1)}\right)_{n,k\in\mathbb{Z}}$ и $\left(\beta_{nk}^{(2)}\right)_{n,k\in\mathbb{Z}}$ в порядке неубывания их модулей, получим:

$$\forall\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}\ \left(\left|\operatorname{Im}\alpha_j\right|\le A\ \wedge\ \inf_{j\neq k}\left|\alpha_j-\alpha_k\right|=d\right)\ \forall\lambda>1$$

$$\left(\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\left|\alpha_j\right|^{\lambda}}\le\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\left|\beta_j\right|^{\lambda}}<+\infty\right).$$

Поэтому показатель сходимости последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ не превышает единицы, что и требовалось доказать.

Следствие: Пусть все члены последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ лежат в некоторой полосе комплексной плоскости, причём $\lim\limits_{j\to\infty}\alpha_j=\infty$, $0<|\alpha_1|\le|\alpha_2|\le\ldots\le|\alpha_j|\le\ldots$ и $\inf\limits_{j\neq k}|\alpha_j-\alpha_k|=d>0$. Тогда показатель сходимости последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ не превышает единицы.

Доказательство: Путём умножения каждого члена последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ на множитель вида $e^{i\theta}$ можно «развернуть» полосу так, чтобы она стала параллельна действительной оси. Модули членов последовательности, а вместе с ними и показатель сходимости последовательности при этом, очевидно, не изменятся. Полученная полоса может быть заключена в более широкую, симметричную относительно действительной оси. Таким образом, для членов последовательности $\left(\alpha_j\right)_{j=1}^{\infty}$ выполняются все условия утверждения 2, поэтому показатель её сходимости не превышает единицы.

2. Задача о скачке для мероморфных правых частей. Пусть $\left\{L_k \mid k \in \mathbb{N}\right\}$ – счётное семейство простых гладких замкнутых попарно непересекающихся контуров, ограничивающих непересекающиеся области D_k^+, причём $\min\limits_{t \in L_k} |t| \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$. Обозначим $D^- = \mathbb{C} \setminus \left(\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k^+}\right)$. Требуется найти кусочно-аналитическую в бесконечно связной области $D^- \bigcup \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k^+\right)$ функцию $\Phi(z)$, предельные значения которой непрерывны вплоть до кривых L_k и удовлетворяют на них краевым условиям:

$$\Phi_k^+(t) - \Phi^-(t) = f_k(t), \; t \in L_k, \; k = \overline{1,\infty}, \tag{1}$$

где $f_k(z)$ – заданные мероморфные функции, причём каждая из функций f_k непрерывна на соответствующем контуре L_k.

Каждую из правых частей задачи (1) можно представить в виде

$$f_k(z) = g_k(z) + r_k(z) + \tilde{r}_k(z), \tag{2}$$

где $g_k(z)$ – целая функция, $r_k(z)$ – рациональная функция, все полюсы которой лежат в области D_k^+, $\tilde{r}_k(z)$ – мероморфная функция, все полюсы которой лежат в области $\mathbb{C} \setminus \overline{D_k^+}$ (очевидно, такое представление не является единственным).

Утверждение 3: Задача (1) имеет бесконечное множество решений вида

$$\Phi(z) = \begin{cases} h(z) - \sum\limits_{l=1}^{\infty}\left\{r_l(z) - Q_l(z)\right\}, \; z \in D^-; \\ h(z) + \left\{g_k(z) + Q_k(z)\right\} + \tilde{r}_k(z) - \sum\limits_{\substack{l=\overline{1,\infty} \\ l \neq k}}\left\{r_l(z) - Q_l(z)\right\}, \; z \in D_k^+, \end{cases} \tag{3}$$

где $h(z)$ – произвольная целая функция, а $Q_k(z)$ – некоторые многочлены $(k \in \mathbb{N})$. При этом разность между любыми двумя решениями является целой функцией и определяется одним и тем же аналитическим выражением и в области D^-, и в каждой из областей D_k^+.

Доказательство: Формально решение задачи (1) может быть записано в виде:

$$\Phi(z) = \begin{cases} h(z) - \sum\limits_{l=1}^{\infty} r_l(z), \; z \in D^-; \\ h(z) + g_k(z) + \tilde{r}_k(z) - \sum\limits_{\substack{l=\overline{1,\infty} \\ l \neq k}} r_l(z), \; z \in D_k^+, \end{cases} \tag{4}$$

где $h(z)$ – произвольная целая функция. Формальность этого решения состоит в том, что ряды, членами которых являются рациональные функции, не являются заведомо сходящимися. Потребуем, чтобы функция $r_k(z)$ являлась правильной рациональной дробью. В этом случае она может быть однозначно представлена в виде:

$$r_k(z) = \frac{P_1^{(k)}(z)}{\left(z - \alpha_1^{(k)}\right)^{\gamma_1^{(k)}}} + \frac{P_2^{(k)}(z)}{\left(z - \alpha_2^{(k)}\right)^{\gamma_2^{(k)}}} + \ldots + \frac{P_{n_k}^{(k)}(z)}{\left(z - \alpha_{n_k}^{(k)}\right)^{\gamma_{n_k}^{(k)}}},$$

где $\alpha_j^{(k)} \in D_k^+$ – полюсы кратностей $\gamma_j^{(k)} \in \mathbb{N}$ соответственно, а $P_j^{(k)}(z)$ – многочлены степеней не выше $\gamma_j^{(k)} - 1$ $\left(j = \overline{1, n_k}\right)$.

Перенумеруем все полюсы функций $r_k(z)$ $(k \in \mathbb{N})$ в порядке неубывания их модулей (в случае равенства модулей больший индекс сопоставим полюсу с большим аргументом). Так как по условию $\min\limits_{t \in L_k} |t| \xrightarrow[k \to \infty]{} \infty$, то получим сходящуюся к бесконечности последовательность чисел $\alpha_j \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k^+$. По теореме Миттаг-Леффлера существует мероморфная функция $f(z)$, имеющая полюсы в точках α_j и только в этих точках, и такая, что главные части функции f в точках α_j совпадают с соответствующими этим точкам дробями $\dfrac{P_j(z)}{\left(z - \alpha_j\right)^{\gamma_j}}$. Данная функция может быть записана в виде ряда: $f(z) = \sum\limits_{j=1}^{\infty}\left\{\dfrac{P_j(z)}{\left(z - \alpha_j\right)^{\gamma_j}} - Q_j(z)\right\}$, или, в силу абсолютной сходимости ряда, в «старых» обозначениях, $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\left\{\dfrac{P_j^{(k)}(z)}{\left(z - \alpha_j^{(k)}\right)^{\gamma_j^{(k)}}} - Q_j^{(k)}(z)\right\}$. Здесь $Q_j^{(k)}(z)$ – многочлены, «обеспечивающие» сходимость ряда. Запишем равенство (2) в виде:

$$f_k(z) = \left\{g_k(z) + \sum_{j=1}^{n_k} Q_j^{(k)}(z)\right\} + \sum_{j=1}^{n_k}\left\{\frac{P_j^{(k)}(z)}{\left(z - \alpha_j^{(k)}\right)^{\gamma_j^{(k)}}} - Q_j^{(k)}(z)\right\} + \tilde{r}_k(z). \tag{5}$$

Так же, как и в равенстве (2), 1-е слагаемое в (5) является целой функцией, 2-е – рациональной функцией с полюсами в области D_k^+, 3-е – мероморфной функцией, все полюсы которой лежат в области $\mathbb{C} \setminus \overline{D_k^+}$. В этом случае равенство (4) примет вид:

$$\Phi(z) = \begin{cases} h(z) - \sum\limits_{l=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_l}\left\{\dfrac{P_j^{(l)}(z)}{\left(z - \alpha_j^{(l)}\right)^{\gamma_j^{(l)}}} - Q_j^{(l)}(z)\right\}, \; z \in D^-; \\ h(z) + \left\{g_k(z) + \sum\limits_{j=1}^{n_k} Q_j^{(k)}(z)\right\} + \tilde{r}_k(z) - \\ - \sum\limits_{\substack{l=\overline{1,\infty} \\ l \neq k}}\sum\limits_{j=1}^{n_l}\left\{\dfrac{P_j^{(l)}(z)}{\left(z - \alpha_j^{(l)}\right)^{\gamma_j^{(l)}}} - Q_j^{(l)}(z)\right\}, \; z \in D_k^+. \end{cases} \tag{6}$$

При этом ряды, фигурирующие в (6), являются абсолютно и равномерно сходящимися в любом круге $|z| \le R$, если исключить из них конечное число членов, имеющих полюсы в этом круге. Обозначая многочлен $\sum\limits_{j=1}^{n_k} Q_j^{(k)}(z)$ через $Q_k(z)$, мы и получим формулу (3).

Докажем вторую часть утверждения. Выбор многочленов $Q_j^{(k)}(z)$ в (5) не является определённым. Поэтому мы можем получить решение вида

$$\Phi_1(z)=\begin{cases} h_1(z)-\sum\limits_{l=1}^{\infty}\left\{r_l(z)-\tilde{Q}_l(z)\right\},\ z\in D^-;\\ h_1(z)+\left\{g_k(z)+\tilde{Q}_k(z)\right\}+\tilde{r}_k(z)-\\ -\sum\limits_{\substack{l=1,\infty\\ l\neq k}}\left\{r_l(z)-\tilde{Q}_l(z)\right\},\ z\in D_k^+, \end{cases} \qquad (7)$$

отличное от решения вида (3). Найдём разность решений (3) и (7):

$$\Phi(z)-\Phi_1(z)=\begin{cases} h(z)-h_1(z)+\left\{Q_k(z)-\tilde{Q}_k(z)\right\}-\\ -\left[\sum\limits_{\substack{l=1,\infty\\ l\neq k}}\left\{r_l(z)-Q_l(z)\right\}-\sum\limits_{\substack{l=1,\infty\\ l\neq k}}\left\{r_l(z)-\tilde{Q}_l(z)\right\}\right],\ z\in D^-;\\ h(z)-h_1(z)+\left\{Q_k(z)-\tilde{Q}_k(z)\right\}-\\ -\left[\sum\limits_{\substack{l=1,\infty\\ l\neq k}}\left\{r_l(z)-Q_l(z)\right\}-\sum\limits_{\substack{l=1,\infty\\ l\neq k}}\left\{r_l(z)-\tilde{Q}_l(z)\right\}\right],\ z\in D_k^+. \end{cases}$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, представляет собой разность двух мероморфных функций, имеющих одинаковые полюсы и одинаковые главные части в этих полюсах, т.е. является целой функцией. Поэтому и разность $\Phi(z)-\Phi_1(z)$ является целой функцией, причём определяется одним и тем же аналитическим выражением и в области D^-, и в каждой из областей D_k^+ $(k\in\mathbb{N})$.

Пример 1: Пусть правые части задачи имеют вид $f_k(t)=g_k(t)+\dfrac{A_k}{t-\alpha_k}+\tilde{r}_k(t),\ t\in L_k, k\in\mathbb{N}$, где $g_k(z)$ – целая функция, $\tilde{r}_k(z)$ – мероморфная, не имеющая полюсов в $\overline{D_k^+}$, а $\alpha_k\in D_k^+$. Пусть также выполняются следующие условия:

а) $\inf\limits_{\substack{t_j\in L_j, t_k\in L_k\\ j\neq k}}|t_j-t_k|>0$; б) последовательность $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ – ограничена в $\mathbb{C}$.

Первого условия достаточно, чтобы для полюсов α_k из $D=\bigcup\limits_{k\in N}D_k^+$ выполнялось строгое неравенство $\inf\limits_{j\neq k}|\alpha_j-\alpha_k|>0$. Но тогда, в силу утверждения 1, последовательность $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ обладает показателем сходимости, не превышающим двух. Это означает, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{|\alpha_k|^3}$ заведомо сходится.

В этом случае, очевидно, в каждой из областей $\mathbb{C}\setminus\overline{D_k^+}$ $(k\in\mathbb{N})$ будет сходиться ряд:

$\sum\limits_{\substack{l=1,\infty\\ l\neq k}}\left\{\dfrac{A_l}{z-\alpha_l}+\dfrac{A_l}{\alpha_l}+\dfrac{A_l z}{\alpha_l^2}\right\}=\sum\limits_{\substack{l=1,\infty\\ l\neq k}}\dfrac{A_l z^2}{\alpha_l^2(z-\alpha_l)}$. Записав «скачки» в виде:

$$f_k(t)=\left\{g_k(t)-\frac{A_k}{\alpha_k}-\frac{A_k t}{\alpha_k^2}\right\}+\left\{\frac{A_k}{t-\alpha_k}+\frac{A_k}{\alpha_k}+\frac{A_k t}{\alpha_k^2}\right\}+\tilde{r}_k(t),$$

получим общее решение задачи:

$$\Phi(z)=\begin{cases} h(z)-z^2\sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{A_l}{\alpha_l^2(z-\alpha_l)},\ z\in D^-;\\ h(z)+\left\{g_k(z)-\dfrac{A_k}{\alpha_k}-\dfrac{A_k z}{\alpha_k^2}\right\}+\tilde{r}_k(z)-\\ -z^2\sum\limits_{\substack{l=1,\infty\\ l\neq k}}\dfrac{A_l}{\alpha_l^2(z-\alpha_l)},\ z\in D_k^+. \end{cases}$$

Пример 2: Пусть при условиях примера 1 все контуры L_k полностью лежат внутри некоторой полосы. Тогда, в силу следствия из утверждения 2, последовательность $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}$ обладает показателем сходимости, не превышающим единицу, и общее решение задачи запишется в более простом виде:

$$\Phi(z)=\begin{cases} h(z)-z\sum\limits_{l=1}^{\infty}\dfrac{A_l}{\alpha_l(z-\alpha_l)},\ z\in D^-;\\ h(z)+\left\{g_k(z)-\dfrac{A_k}{\alpha_k}\right\}+\tilde{r}_k(z)-z\sum\limits_{\substack{l=1,\infty\\ l\neq k}}\dfrac{A_l}{\alpha_l(z-\alpha_l)},\ z\in D_k^+. \end{cases}$$

Заключение. В работе получена оценка показателя сходимости комплексной последовательности в случаях расположения её членов на всей плоскости и в пределах некоторой полосы. В общем виде найдено решение задачи о скачке для бесконечно связных областей и мероморфных правых частей. Полученные результаты, в частности, могут быть использованы при исследовании задач проводимости композиционных материалов.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ахиезер, Н.И. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов / Н.И. Ахиезер // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1945. – Т. 9. – С. 275–290.
2. Пааташвили, В.А. О линейной задаче сопряжения в случае счётного множества замкнутых контуров / В.А. Пааташвили // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1965. – Т. 37, № 1. – С. 31–36.
3. Толочко, М.Э. О разрешимости однородной краевой задачи Римана для бесконечно связной области / М.Э. Толочко // Доклады АН БССР. – 1974. –Т. 18, № 5. – С. 398–401.
4. Чибрикова, Л.И. Основные краевые задачи для аналитических функций / Л.И. Чибрикова. – Казань, 1977. – 303 с.
5. Говоров, Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом / Н.В. Говоров. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
6. Mityushev, V.V. Analytical Methods for Heat Conduction in Composites and Porous Media / V.V. Mityushev, E.V. Pesetskaya, S.V. Rogosin // Cellular and Porous Materials: Thermal Properties Simulation and Prediction ; A.Öchsner, G. Murch, and M. de Lemos eds. – Amsterdam: Wiley-VCH, 2007. – P. 124–167.
7. Юхимук, М.М. Задача о скачке для многосвязных и бесконечно связных областей / М.М. Юхимук // Веснік Брэсцкага універсітэта. – 2006. – № 1(25). – С. 17–24.
8. Титчмарш, Е. Теория функций: пер. с англ. – 2-е изд., перераб. / Е. Титчмарш. – М.: Наука, 1980. – 464 с.

Материал поступил в редакцию 31.12.13

YUKHIMUK M.M., YUKHIMUK T.Yu. Jump problem for infinitely connected domains

This work represents the estimation of the exponent of convergence of a complex sequence in case its terms are located on the whole plane and within a strip. A closed-form solution for a jump problem for infinitely connected domains and meromorphic right-hand members has been obtained.