ZHELTKOVICH A.E., MAKHNIST L.P., GORBACHEVSKI V.M., LAVRINYUK E.Yu. Modeling of the fall of a material point in the gravitational field of the Earth

This work provides the obtained equations of the motion of a material point in the gravitational field of the Earth depending on the influence on the relative motion of a point of the angular rotation of the Earth.

Exact solutions describing the change of the path and the speed of a particle were obtained based on the solution of the systems of three interdependent linear nonhomogeneous second- and third-order differential equations.

The field of use of the given solution can be extended to solving applied problems related to the calculation of the accurate speed, path and place of fall of the deorbited extraterrestrial objects which have completed their service life.

УДК 004.5;621.38

Бутов А.А.

УСОВЕРШЕНСТВОВАННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ БУЛЕВОЙ ФОРМУЛЫ МНОГОУГОЛЬНИКА В ДИЗЪЮНКТИВНОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Введение. Для описания геометрических объектов (например, в системах автоматизированного проектирования топологии интегральных схем [1, 2]) обычно используются методы аналитической геометрии, векторной алгебры, теории матриц [1–5].

Альтернативные способы описания, появившиеся в последнее время, основаны на использовании булевых формул в скобочной [6] и в дизъюнктивной нормальной [7–9] формах. В частности, метод, предлагаемый в работе [9], хотя и удобен с точки зрения практической реализации, однако имеет недостаток, связанный с существованием класса задач, для которых решение находится лишь приближенно. Усовершенствованный метод, описываемый в данной работе, всегда позволяет находить точное решение. Это означает, что для любой задачи элементы решения, интерпретируемые как выпуклые компоненты, будут покрывать в совокупности всю область плоскости, занимаемую многоугольником.

1 Основные определения, постановка задачи

Многоугольник на плоскости задается своей *границей* – замкнутой не пересекающейся ломаной линией, состоящей из отрезков прямых или *сторон* многоугольника. Эту границу можно определить последовательностью *угловых точек* или *вершин* многоугольника $p_1, p_2, \ldots, p_n$, получаемых при последовательном обходе его вдоль границы (рис. 1, где $n = 11$).

Так как каждая пара соседних угловых точек ограничивает соответствующую сторону многоугольника, то его границу можно задать также последовательностью сторон многоугольника: $s_1, s_2, \ldots, s_n$, где $s_1 = (p_1, p_2)$, $s_2 = (p_2, p_3)$, …, $s_n = (p_n, p_1)$.

Рис. 1. Вершины и стороны многоугольника

Вершина p_1, которая служит начальной угловой точкой для последовательного обозначения отрезков, образующих границу многоугольника, называется *начальной*. В качестве начальной будем выбирать вершину, наиболее удаленную от начала координат.

Каждой стороне s_i многоугольника поставим в соответствие *ориентированную прямую* v_i, содержащую точки p_i и p_{i+1}. Будем считать, что она ориентирована от p_i к p_{i+1}.

Рассмотрим некоторую произвольную точку плоскости p, заданную парой декартовых координат (x, y). Будем считать, что точка p расположена *слева от прямой* v_i, если она принадлежит полуплоскости, расположенной слева от ориентированной прямой v_i, или лежит на прямой v_i. Все возможные варианты левостороннего расположения точки p относительно ориентированной прямой v_i представлены на рисунке 2 (последние два варианта соответствуют случаю, когда прямая v_i параллельна координатной оси X).

Как и в работе [6], будем обозначать отрезки ломаной буквами a, b, c, …, границу многоугольника как abc…, а полуплоскости, расположенные слева от соответствующих ориентированных прямых, – буквами A, B, C, … (считая, что каждая из этих полуплоскостей включает в себя еще и все точки порождающей ее ориентированной прямой). Введем также предикаты a, b, c, … для описания положения некоторой точки p на плоскости, полагая, что $a(p) = 1$, если и только если $p \in A$.

Основываясь на таких предикатных переменных, в работе [6] описан метод построения скобочной булевой формулы F, представляющей многоугольник и обладающей следующим свойством: если выполнить подстановку предикатных координат произвольной точки плоскости, то формула F примет значение 1 в случае, когда точка принадлежит данному многоугольнику, и значение 0 – в противном случае.

Аналогичная задача решается и в работах [7–9], однако булева формула F там строится в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ).

Целью настоящей работы является доработка метода нахождения булевой формулы многоугольника в ДНФ, изложенного в работе [9]. Усовершенствованный метод позволяет устранить недостаток, связанный с невозможностью всегда находить точное решение рассматриваемой задачи.

2. Выпуклые и вогнутые углы многоугольника. Рассмотрим пару соседних сторон, задающую некоторый угол многоугольника.

Рис. 2. Варианты левостороннего расположения точки относительно ориентированной прямой

***Бутов А.А.**, к.т.н., доцент кафедры экономической кибернетики Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники.*
Беларусь, БГУИР, 220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6.

Если этот угол меньше 180 градусов, будем называть его *выпуклым*, иначе – *вогнутым*. Например, на рисунке 1 угол, образованный сторонами s_1 и s_2, будет вогнутым, а сторонами s_5 и s_6, – выпуклым.

Пара ориентированных прямых, соответствующая соседним сторонам a и b многоугольника, ограничивает участок плоскости, который можно представить формулой $A \cap B$, если стороны образуют выпуклый угол, и формулой $A \cup B$ – если они образуют вогнутый угол.

Если все углы многоугольника будут выпуклыми, то такой многоугольник называется *выпуклым*. Например, выпуклый многоугольник с границей *abcde* будет занимать участок плоскости: $A \cap B \cap C \cap D \cap E$, а его булева формула будет иметь вид: $F = abcde$.

Каждой стороне многоугольника припишем *ранг*, равный числу тех смежных с ней углов, которые являются вогнутыми.

3. Базовый метод нахождения элементов покрытия многоугольника. Будем говорить, что многоугольник M^* является *элементом покрытия* многоугольника M, если все точки плоскости, которые принадлежат многоугольнику M^*, принадлежат также и многоугольнику M.

Кроме того, будем говорить, что многоугольник M поглощает любой свой элемент покрытия M^*.

В работах [6, 7] показано, что булеву формулу любого многоугольника можно представить в ДНФ, которая соответствует покрытию многоугольника его выпуклыми компонентами.

Приемлемый на практике способ нахождения элементов покрытия многоугольника M, основанный на последовательном анализе его сторон, описан в работе [9]. Будем называть этот способ базовым. Его суть заключается в том, что каждая из сторон используется для обхода границы многоугольника M в прямом направлении с учетом следующих правил. Если при обходе встречается выпуклый угол, то выполняется переход по этому углу на очередную сторону многоугольника. Если же встречается вогнутый угол, то текущая сторона продлевается дальше до первого пересечения с другой стороной многоугольника, после чего выполняется переход на эту сторону и движение по ней в прямом направлении. Такой процесс обхода продолжается до тех пор, пока мы не окажемся на стороне (или на линии, являющейся продолжением стороны) многоугольника, которая уже была пройдена раньше. В результате граница обхода будет представлять собой контур или будет включать в себя контур. Так как направление движения изменялось только выпуклыми углами, то фигура, ограниченная найденным контуром, будет представлять собой выпуклый многоугольник и являться элементом покрытия многоугольника M. Такой обход границы при поиске элементов покрытия нужно вести не только в прямом, но и в обратном направлении аналогичным образом. После этого из полученного множества элементов покрытия многоугольника M удаляются все те элементы, которые поглощаются какими-либо другими элементами того же множества.

4. Усовершенствованный метод нахождения булевой формулы многоугольника. Как уже было сказано, базовый метод нахождения элементов покрытия не всегда приводит к получению точного решения для рассматриваемой задачи. Применив его, например, к многоугольнику, показанному на рисунке 1, мы получим точное решение. Однако, чуть видоизменив этот многоугольник путем увеличения длины стороны s_2 (рис. 3), мы получим уже приближенное решение (непокрытый выпуклыми компонентами остаток показан на рисунке 3 серым цветом).

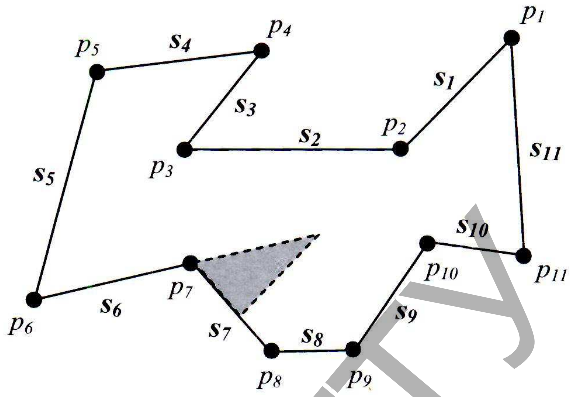

Рис. 3. Многоугольник с непокрытым остатком

Эмпирически было установлено, что базовый метод нахождения элементов покрытия многоугольника всегда позволяет получить точное решение, если граница многоугольника не содержит сторон с рангом 2 (т.е. сторон, у которых оба смежных угла являются вогнутыми).

Этот факт позволяет усовершенствовать базовый метод нахождения элементов покрытия так, что для любого многоугольника будет найдено точное решение. Усовершенствованный метод включает в себя следующие действия.

1. К многоугольнику M применяется базовый метод нахождения элементов покрытия, т.е. последовательно перебираются все стороны $s_1, s_2, \ldots, s_n$ многоугольника, в результате чего находятся все порождаемые ими элементы покрытия, которые после удаления поглощаемых элементов образуют множество C. При этом можно сократить перебор, если учесть тот факт, что стороны с нулевым рангом не дают никаких новых элементов покрытия в сравнении с элементами покрытия, которые порождаются сторонами с рангом 1 и рангом 2.

Если многоугольник M не содержит сторон с рангом 2, то выполняется переход к пункту 6.

2. Многоугольник M заменяется двумя смежными (имеющими общий отрезок внутри своих границ) компонентами M^1 и M^2, получаемыми путем разбиения M на две части. Для этого сторону с рангом 2 достаточно продлить в прямом или обратном направлении до первого пересечения с другой стороной многоугольника.

Если сторон с рангом 2 несколько, например m, то из $2 \times m$ вариантов продления выбирается тот вариант, который позволяет преобразовать большее число сторон с рангом 2 в стороны с рангом 1.

Каждый из вновь полученных многоугольников M^1 и M^2 подвергается анализу на наличие в нем сторон с рангом 2. Если такой многоугольник имеется, то он заменяется парой смежных компонент тем же способом, что описан в этом пункте выше. Такой процесс анализа и преобразования порождаемых компонент-многоугольников продолжается до тех пор, пока каждый из них не будет содержать только стороны с рангом 0 и 1. В итоге будут найдены многоугольники, которые обозначим: $M^i, M^j, \ldots, M^k$.

3. К каждому многоугольнику $M^i, M^j, \ldots, M^k$ последовательно применяется базовый метод нахождения элементов покрытия. В результате будут найдены множества $C^i, C^j, \ldots, C^k$, содержащие элементы покрытия многоугольников $M^i, M^j, \ldots, M^k$ соответственно.

4. Последовательно перебираются элементы, входящие в множества $C^i, C^j, \ldots, C^k$, и для каждого из них проверяется, поглощается ли этот элемент каким-либо элементом множества C. Если поглощение отсутствует, то такой элемент добавляется во вспомогательное множество C^*, первоначально пустое.

5. Если $C^* \neq \varnothing$, то элементы множества C^* добавляются в множество C.

6. Все элементы множества C заменяются представляющими их конъюнкциями соответствующих предикатных переменных. Тогда дизъюнкция этих конъюнкций и будет представлять собой искомую булеву формулу многоугольника в ДНФ.

Изложенный метод проиллюстрируем на примере многоугольника M, изображенного на рисунке 3. Упростим этот рисунок, убрав метки вершин многоугольника и дав новые обозначения его сторонам (рис. 4).

Применив к многоугольнику M базовый метод, находим множество $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_5\}$ его элементов покрытия с границами $a^+g^-hi^+k^-$, $b^{\pm}e^-f^+k^-$, c^+def, j^+ka^+, $b^+k^-j^+e^-$ соответственно. Здесь, как и в работе [9], индексами «+» и «-» помечены соответственно удлиненные и укороченные стороны; индексом «±» помечены стороны, которые продлены с одной и укорочены с другой стороны; индексом «~» помечен отрезок прямой, лежащий на линии, являющейся продолжением стороны.

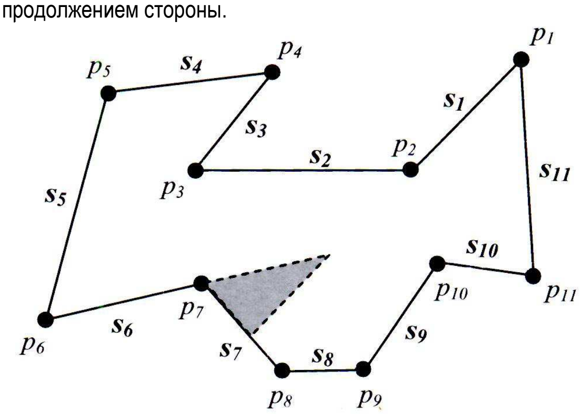

Рис. 4. Упрощенный вид многоугольника M

Т.к. многоугольник M содержит всего одну сторону с рангом 2, то имеется только два варианта его замены смежными компонентами M^1 и M^2. Эти варианты равноценны, т.к. оба позволяют получить компоненты M^1 и M^2, не содержащие сторон с рангом 2 (рис. 5).

Рассмотрим, например, вариант 2. К многоугольникам M^1 и M^2 последовательно применим базовый метод построения булевой формулы и найдем множества C^1 и C^2, содержащие элементы покрытия многоугольников M^1 и M^2 соответственно.

Последовательно перебираем элементы, входящие в множества C^1 и C^2, и для каждого из них проверяем, поглощается ли этот элемент каким-либо элементом множества C. В результате оказывается, что только один элемент покрытия, имеющий границу $g^+hi^+b^{\pm}$, не поглощается ни одним элементом множества C и, поэтому, будет помещен во вспомогательное множество C^*, а затем – и в множество C. В итоге искомая булева формула многоугольника M в ДНФ будет иметь следующий вид:

$$F = aghik \vee befk \vee cdef \vee jka \vee bkje \vee ghib\,.$$

Заключение. Данная работа представляет собой доработку метода нахождения булевой формулы многоугольника в ДНФ, изложенного в работе [9]. Усовершенствованный метод устраняет недостаток, связанный с существованием класса задач, для которых решение находится лишь приближенно.

Предлагаемый метод всегда позволяет находить точное решение. Это означает, что для любой задачи элементы решения, интерпретируемые как выпуклые компоненты, будут покрывать в совокупности всю область плоскости, занимаемую многоугольником.

Необходимо отметить, что направление исследований, связанное с представлением многоугольников булевыми формулами, открывает новые возможности для решения широкого круга оптимизационных задач, например в области топологического проектирования интегральных схем, путем использования развитого аппарата булевой алгебры.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Шестаков, Е.А. Автоматизированная система подготовки информации для формирования фотошаблонов / Е.А. Шестаков, А.А. Бутов, Т.Л. Орлова, А.А. Воронов // Искусственный интеллект. – Донецк. – 2008. – № 4. – С. 200–207.
2. Фейнберг, В.З. Геометрические задачи машинной графики больших интегральных схем. – М.: Радио и связь, 1987. – 178 с.
3. Ласло, М. Вычислительная геометрия и компьютерная графика на С++ / Пер. с англ. – М.: БИНОМ, 1997. – 304 с.
4. Препарата, Ф. Вычислительная геометрия: введение / Ф. Препарата, М. Шеймос // Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 478 с.
5. Никулин, Е.А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики – СПб.: БХХ-Петербург, 2005. – 576 с.
6. Закревский, А.Д. Канонические булевы формулы многоугольников // Информатика. – 2009. – № 2. – С. 93–101.
7. Поттосин, Ю.В. Использование булевых функций для представления многоугольников / Ю.В. Поттосин, Е.А. Шестаков // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. – 2008. – № 2(3). – С. 106–115.
8. Бутов, А.А. Простой метод нахождения булевой формулы многоугольника в дизъюнктивной нормальной форме // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2011. – № 5: Физика, математика, информатика – С. 35–38.
9. Бутов, А.А. Метод нахождения булевой формулы многоугольника в дизъюнктивной нормальной форме без использования дополнительных предикатных переменных // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2012 – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 48–51.

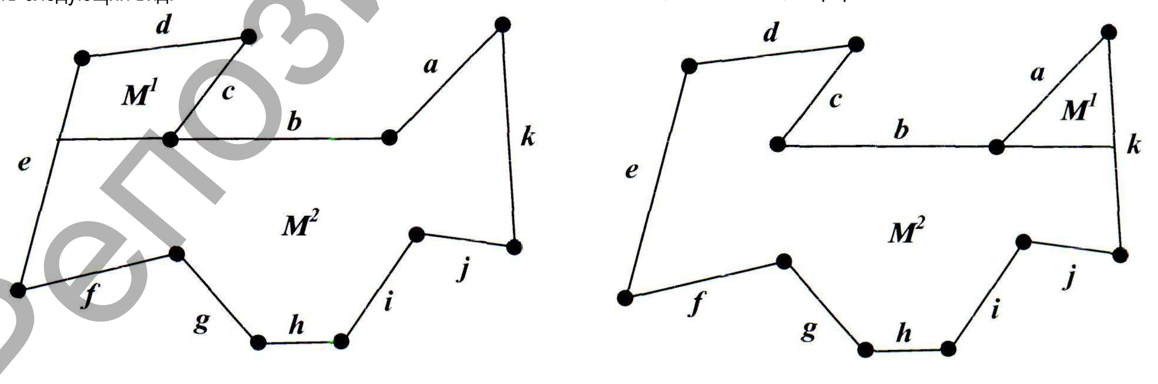

Рис. 5. Два варианта замены многоугольника M компонентами M^1 и M^2

Материал поступил в редакцию 28.06.13

BUTOV A.A. An improved method of finding a polygon Boolean formula in disjunctive normal form

The work focused on finalizing the method of finding a polygon Boolean formulas in disjunctive normal form, as set out in the preceding paper. An improved method eliminates the drawback associated with the existence of a class of problems for which the solution is only approximate.

The proposed method always allows to find an exact solution. This means that for every problem solving elements that are interpreted as convex components are combined to cover the entire region of the plane occupied by the polygon.

The method can be used, in particular, in the systems computer-aided design of integrated circuits topology.