При таком подходе в рамках логистической системы интегрируются функции производства, снабжения и сбыта, т.е. система по принципу построения представляется макрологистической. Такая система решает в глобальном плане следующие основные вопросы:

– производство продукции,
– выработка общей концепции товародвижения,
– выбор рациональных материальных потоков,
– определение объема запасов,
– объема требуемых складских мощностей для их хранения,
– необходимость их расширения или нового строительства,
– необходимый объем капитальных вложений, как для увеличения производства продукции, так и для расширения складских площадей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аникин, Б. А. Логистика : учеб. пособие // Б. А. Аникин. – М. : Инфра-М. – 2009. – 327 с.
2. Бажин, И. И. Информационные системы менеджмента / И. И. Бажин. – М. : ГУВШЭ. 2009. 688 с.

УДК 51:004.02

Е.Н. ШВЫЧКИНА
Брест, БрГТУ

РЕШЕНИЕ ХЕМОСТАТ-МОДЕЛЕЙ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОДАЧЕЙ ПИТАТЕЛЬНОГО РЕСУРСА МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Для описания лимитированного роста популяции в хемостате рассмотрим модель, которая основывается на кинетике Моно и записывается в виде системы дифференциальных уравнений Михаэлиса-Ментен [1, 2]. Наличие природных сезонных изменений приводит к необходимости уточнения модели простого хемостата, а именно, рассмотрения модели с периодически изменяющимися коэффициентами. Такой подход является естественным с точки зрения экологии, так как можно ожидать, что уровни питательных веществ во многих экосистемах находятся в зависимости от дня и ночи, или имеют более длительную сезонную зависимость. Система дифференциальных уравнений, описывающая такую модель, будет иметь вид [1, 3]

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (u(t) - s(t))d - x_1(t) f_1(s(t)) - x_2(t) f_2(s(t)), \\ \dot{x}_1(t) = (f_1(s(t)) - d) x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = (f_2(s(t)) - d) x_2(t), \end{cases} \tag{1}$$

где $f_i(t) = \frac{m_i\, s(t)}{a_i + s(t)}$ $(i = 1{,}2)$, периодическая функция $u(t)$ определяет скорость подачи питательного субстрата в хемостат; параметр d называется потоком; функция $s(t)$ обозначает плотность питательного субстрата; $x_1(t),\ x_2(t)$ – плотности микроорганизмов в момент времени t; s_0 – начальная концентрация субстрата; параметры a_i $(i = 1{,}2)$ – константы Михаэлиса-Метен; величины m_i $(i = 1{,}2)$ обозначают максимальные скорости роста i –го микроорганизма.

В данной работе, для функции вида $u(t) = u_0 + u_m \sin(\omega t)$, будем применять метод приближенного исследования основанный на методе гармонической линеаризации [3]. Используя компьютерную реализацию построения приближенных решений методом гармонической линеаризации, получим расчетные формулы и программные алгоритмы, которые позволяют не только вычислять параметры установившихся колебаний в системе (1), но и формулировать условия существования различных типов колебательных режимов.

Согласно общей схеме метода гармонического баланса установившиеся колебания в системе (1) ищутся в форме N-х частичных сумм Фурье [3]. В случае гармонической линеаризации, рассмотрим только постоянные слагаемые и линейные гармоники. Т. е. будем искать приближенные решения в виде

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + s_c \cos(t\omega) + s_s \sin(t\omega), \\ x_1(t) &= x_{10} + x_{1c}\cos(t\omega) + x_{1s}\sin(t\omega), \\ x_2(t) &= x_{20} + x_{2c}\cos(t\omega) + x_{2s}\sin(t\omega), \end{aligned} \tag{2}$$

где коэффициенты s_{10}, s_{1c}, s_{1s}, x_{i0}, x_{ic}, x_{is} $(i = 1, 2)$ подлежат определению. В силу не отрицательности решений системы (1) коэффициенты выражений (2) должны удовлетворять условиям:

$$s_0 \geq 0,\ \ \sqrt{s_c^2 + s_s^2} \leq s_0,\ \ \sqrt{x_{ic}^2 + x_{is}^2} \leq x_{i0},\ \ u_0 \geq x_{i0}\ \ (i = 1, 2). \tag{3}$$

Пример построения устойчивого колебательного режима.

Положим следующий набор параметров системы (1):

$$d = 1, m_1 = 2, a_1 = 1, u_0 = 5, \omega = 1, m_2 = 2{,}58, a_2 = 1{,}6,\ u_m = 1. \tag{4}$$

Подставим (4) в уравнения (1) и (2). Подставим полученные равенства (2) в (1) и, приравнивая при синусах и косинусах линейных гармоник левых и правых частях уравнений (1), учитывая обозначения $s_c = A\cos\eta$, $s_s = A\sin\eta$, получим уравнение для нахождения параметра η.

$$1.4\cos(2\eta) + (5.6\sin(\eta) + 7.9)\cos(\eta) = 6.5\sin(\eta) + 1.5,$$

решая, которое получим

$$\eta = -3.13,\ \eta = -0.5 \pm 0.3i,\ \eta = 0.04.$$

Из найденных значений x_{i0}, x_{ic}, x_{is} $(i = 1, 2)$ выберем, то, которое удовлетворяет условию (3) ($\sqrt{x_{ic}^2 + x_{is}^2} \le x_{i0}$). В данном случае − это значение $\eta = 0.04$. Таким образом, все неизвестные коэффициенты приближенного решения (2) однозначно определены и оно примет вид

$$\begin{gathered} s(t) = 1.05 + 0.2\sin(t) + 0.009\cos(t), \\ x_1(t) = 0.76 + 0.003\sin(t) - 0.08\cos(t), \\ x_2(t) = 3.19 + 0.27\sin(t) - 0.43\cos(t). \end{gathered} \tag{5}$$

На рисунке 1 изображены графики решений (5), из которых мы можем видеть, что реализуется режим сосуществования двух микроорганизмов $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

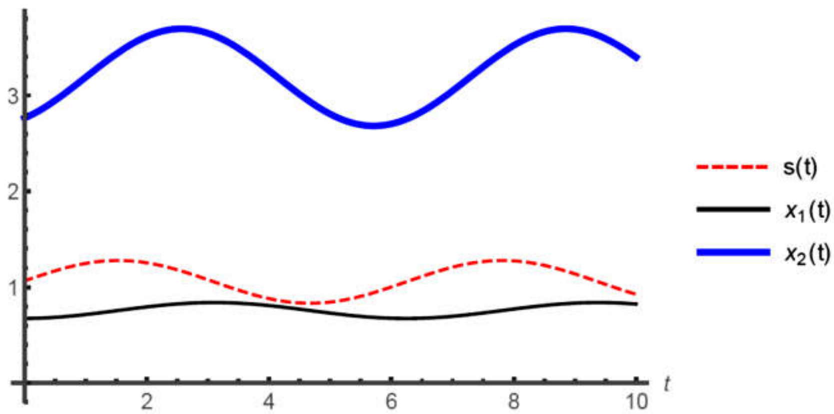

Рисунок 1 – Графики приближенных решений (5)

Сравним полученный результат построения приближенных решений с результатом численного интегрирования системы (1) (см. рисунок 2). Система (1), параметры которой определены как (4), примет вид

$$\begin{gathered} s'(t) = -\frac{2\,s(t)\,x_1(t)}{s(t)+1} - \frac{2.58\,s(t)\,x_2(t)}{s(t)+1.6} - s(t) + \sin(t) + 5, \\ x_1{}'(t) = \left(\frac{2\,s(t)}{s(t)+1} - 1\right)x_1(t), \quad x_2{}'(t) = \left(\frac{2.58s(t)}{s(t)+1.6} - 1\right)x_2(t). \end{gathered} \tag{6}$$

Начальные условия:

$$s(0) = 1.06, x_1(0) = 0.67, x_2(0) = 2.76. \tag{7}$$

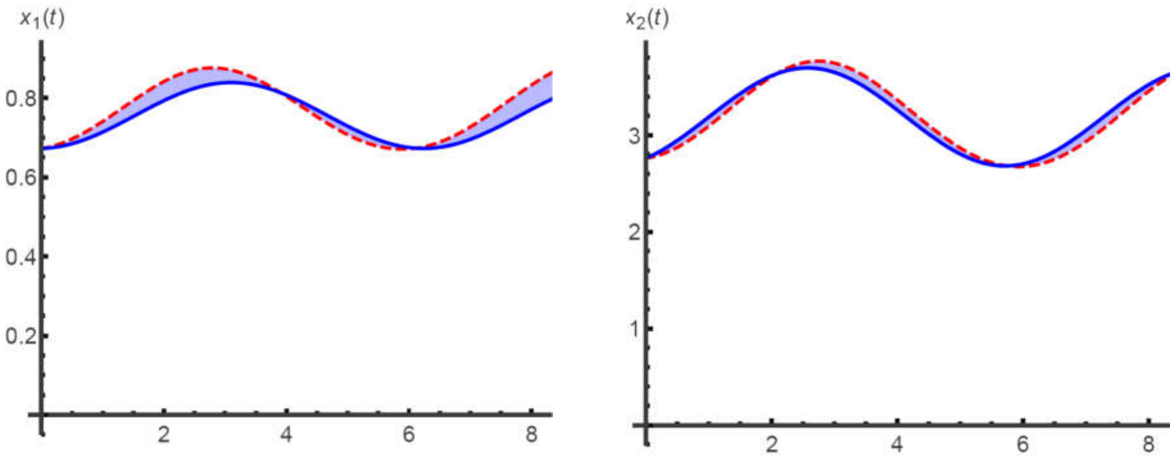

Рисунок 2 – Графики приближенных решений (5) и численных решений задачи Коши (6)−(7)

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smith, H. L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H. L. Smith, P. Waltman. − Cambridge University Press, 1995. − 313 p.

2. Chichurin, A. V. Computer simulation of two chemostat models for one nutrient resource / A. V. Chichurin, H. N. Shvychkina // Mathematical Biosciences. – 2016. − № 278. – P. 30–36.

3. Колосов, Г. Е. Исследование установившихся колебательных процессов в хемостате / Г. Е. Колосов, Д. В. Нежеметдинова, // Автоматика и телемеханика. – 2000. − № 1. – С. 118–132.

УДК 539.12

Е.М. ОВСИЮК, А.Д. КОРАЛЬКОВ, А.А. НИКОЛАЕНКО
Мозырь, МГПУ имени И. П. Шамякина

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СКАЛЯРНАЯ ЧАСТИЦА С ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ ДАРВИНА–КОКСА ВО ВНЕШНЕМ КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Исходим из системы уравнений Кокса в форме Прока [1]

$$D_\alpha \Phi - \lambda F_\alpha{}^\beta \Phi_\beta = \frac{mc}{\hbar}\Phi_\alpha, \quad D^\alpha \Phi_\alpha = \frac{mc}{\hbar}\Phi, \tag{1}$$

где учитываем обозначение

$$D_\alpha = i\nabla_\alpha - \frac{e}{\hbar c}A_\alpha.$$

Ненулевой параметр λ означает наличие у частицы дополнительной структуры Дарвина–Кокса (она означает распределение заряда частицы по сфере конечного размера). Отметим физические размерности величин