УДК 517.968

В. Т. ДАЦЫК
Брест, БрГТУ

МЕТОД РЕДУКЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Пусть область
$$\Omega = \{(x;y) : x \in \mathbf{R}, 0 < y < T, T \in \mathbf{R}\}.$$
Рассмотрим в этой области уравнение диффузии дробного порядка $0 < \alpha \le 1$
$$Lu(x;y) \equiv u_{xx}(x;y) - D_{0y}^{\alpha} u(x;y) = f(x;y) \tag{1}$$
с начальным условием
$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x;y) = \tau(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$
Здесь
$$D_{xy}^{\alpha} g(y) = \frac{sign(y-x)}{\Gamma(-\alpha)} \int_x^y \frac{g(s)ds}{|y-s|^{\alpha+1}} \ -$$
оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка $\alpha \in \mathbf{R}$ с началом в точке x [1];
$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt \ -$$
гамма-функция Эйлера.

На основании формулы
$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\alpha-1} g(y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{y \to 0} \int_0^y \frac{g_0(s) s^{\alpha-1} ds}{|y-s|^{\alpha}} = \Gamma(\alpha) \lim_{y \to 0} y^{1-\alpha} g(y),$$
где $y^{1-\alpha} g(y) = g_0(y) \in C[0;T]$, $0 < \alpha \le 1$, начальное условие (2) представим в виде
$$\lim_{y \to 0} y^{1-\alpha} u(x;y) = \frac{\tau(x)}{\Gamma(\alpha)}, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{3}$$
Пусть $u(x;y)$ является решением уравнения (1) и удовлетворяет (3). Т.к. $u(x;y) \in C(\Omega)$, то
$$\lim_{y \to 0} D_{0y}^{\beta-1} u(x;y) = 0, \tag{4}$$
где $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$. Из обобщенной формулы Ньютона-Лейбница
$$D_{xy}^{\alpha} D_{xy}^{\beta} g(y) = D_{xy}^{\alpha+\beta} g(y) - \sum_{k=1}^{n} \frac{|y-x|^{-\alpha-k}}{\Gamma(1-\alpha-k)} \lim_{y \to x} D_{xy}^{\beta-k} g(y) \quad (n-1 < \beta \le n, n \in \mathbf{N})$$

на основании закона композиции операторов дробного порядка $D_{xy}^{\alpha}D_{xy}^{\beta}g(y)=D_{xy}^{\alpha+\beta}g(y)$, получим

$$D_{0y}^{\alpha}u(x;y)=D_{0y}^{\beta}D_{0y}^{\beta}u(x;y)$$

и уравнение (1) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-D_{0y}^{\beta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}+D_{0y}^{\beta}\right)u(x;y)=f(x;y). \qquad (5)$$

Обозначив

$$\frac{\partial u(x;y)}{\partial x}+D_{0y}^{\beta}u(x;y)=v(x;y),$$

Получаем, что функция $u(x;y)$ является решением системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x;y)}{\partial x}+D_{0y}^{\beta}u(x;y)=v(x;y),\\ \dfrac{\partial v(x;y)}{\partial x}-D_{0y}^{\beta}v(x;y)=f(x;y).\end{cases}$$

Таким образом, задача Коши для уравнения диффузии дробного порядка методом редукции свелась к системе дифференциальных уравнений меньшего порядка.

Решая полученную систему с учетом (4), найдем

$$u(x;y)=\int_0^y\int_{-\infty}^x v(s;t)w(x-s;y-t)dsdt,$$

где

$$v(x;y)=\int_x^{+\infty}\tau(s)w(s-x;y)ds-\int_x^{+\infty}\int_0^y f(s;t)w(x-s;y-t)dsdt,$$

$$w(x;y)=\frac{1}{y}e_{1,\beta}^{1,0}\left(-\frac{x}{y^{\beta}}\right),$$

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\omega\pi)}e^{t}t^{-\delta}E_{1/\alpha}(zt^{\beta};\mu)dt-$$

функция типа Райта,

$$E_{1/\alpha}(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\mu)}-$$

функция типа Миттаг-Леффлера.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск : Наука и техника, 1987. – 688 с.