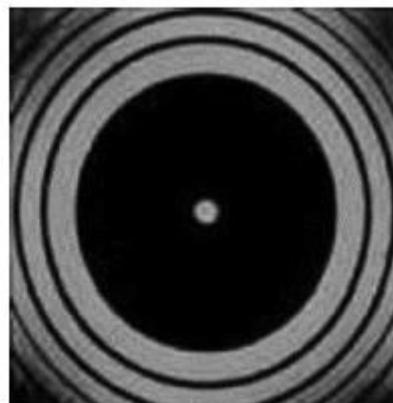
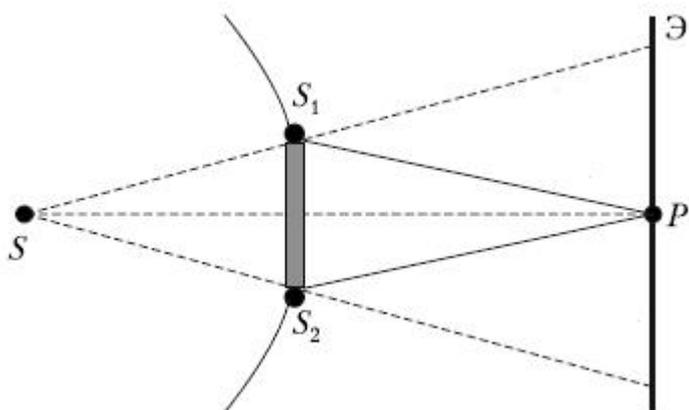


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ФИЗИКИ

Методические указания по разделу
«Волновая оптика:
дифракция Френеля и Фраунгофера»



УДК 535.421, 535.422, 535.423

В методических указаниях по разделу «Волновая оптика: дифракция Френеля и Фраунгофера» на примере конкретного задания показано, как трансформировать задачу в модель физического явления «дифракция света»; каким образом извлечь из текста задачи информацию о причинно-следственных связях данного явления (в частности, наличия разного рода преград на пути распространения световых волн с плоским и сферическими фронтами); как осуществить выбор функциональной зависимости от заданных параметров и произвести расчет.

Материал может быть использован при самостоятельной работе по выполнению типовых проектов студентами дневной и заочной форм получения высшего образования. Его целесообразно использовать на аудиторных занятиях по решению задач данной темы.

Составители: Величко Л.А., к.ф.-м.н., доцент кафедры физики БрГТУ;
Чугунов С.В., старший преподаватель кафедры физики БрГТУ;
Чугунова Э.В., учитель физики ГУО «Гимназии №4 г. Бреста».

Рецензент: Секержицкий В.С., к.ф.-м.н., доцент кафедры физики
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина»

*Посвящается памяти Николая Игнатьевича Чопчица,
автора этой и многих других задач по физике.*

1 Метод зон Френеля

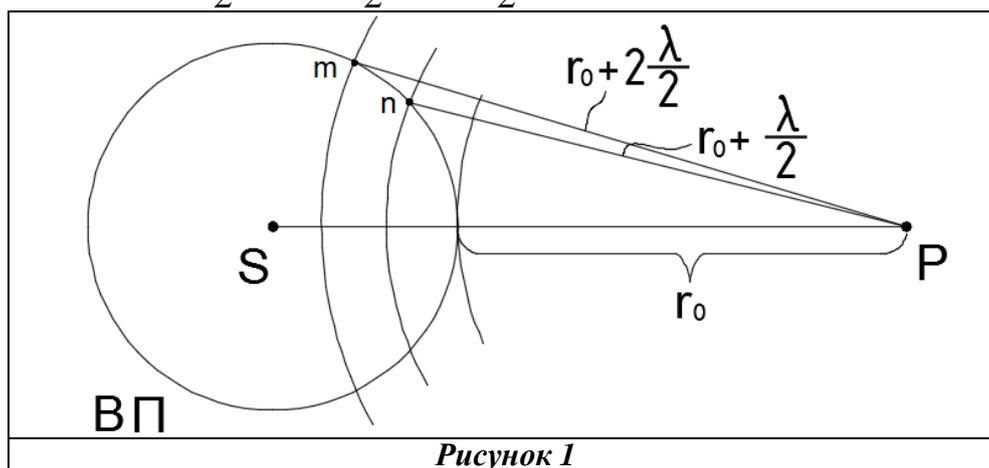
Распространение световой волны описывают, используя понятие «фронт волны», «волновая поверхность» (ВП), что представляет собой геометрическое место точек среды, до которой в момент времени t дошла волна. Эти точки, по Гюйгенсу, являются источниками вторичных волн. По Френелю, вторичные волны будут когерентными, а значит, будут интерферировать. В результате интерференции свет преимущественно распространяется в направлении внешней нормали \vec{n} к волновой поверхности в произвольной точке.

Если часть волновой поверхности закрыта непрозрачным экраном, то вторичные волны излучаются только открытыми участками ВП. Так, если на пути света, идущего от источника, поставить диафрагму с круглым отверстием, то вторичные волны излучаются только свободной частью ВП падающей волны, т. е. только той частью, которая совпадает с отверстием.

Если преградой распространению света является, например, диск, то за распространение света «отвечают» вторичные волны, посылаемые только открытой частью волновой поверхности.

Интерференцией вторичных волн объясняется наблюдаемое распределение интенсивности света в пространстве: образование максимумов (*max*) и минимумов (*min*) дифракционной картины. Нахождение результата дифракции света в конкретной точке пространства очень затруднено. Френель предложил простой и «облегченный» способ, который в дальнейшем получил название метод зон Френеля.

Рассмотрим распространение сферической ВП от точечного монохроматического источника S света с длиной волны λ в однородной среде. Исследуем поле волны в точке P . Опишем из точки P концентрические сферы, радиусы которых равны: r_0 ; $r_0 + \frac{\lambda}{2}$; $r_0 + 2\frac{\lambda}{2}$; $r_0 + 3\frac{\lambda}{2}$; ...



Как показано на рисунке 1, эти сферы разобьют ВП на кольцевые зоны, называемые зонами Френеля. Эти зоны такого размера, что расстояния от краев соседних зон до точки P отличаются на $\frac{\lambda}{2}$, т. е. колебания от крайних точек (n , m) соседних зон приходят в точку P в противофазе, а значит, компенсируют друг друга. Зоны Френеля надо строить с той стороны волновой поверхности, куда волна распространяется.

1.1 Дифракция света на оси круглого отверстия

На рисунке 2 показано, что между источником S и точкой наблюдения P находится непрозрачный экран \mathcal{E} с круглым отверстием радиуса r . Центр отверстия (точка O') находится на линии SP . По Френелю, экран закрывает часть ВП, т. е. эта часть ВП не посылает волны в точку P . Вторичные источники открытой части ВП посылают свет в точку P . Если в отсутствии преграды \mathcal{E} (т. е. при свободном распространении света) волна, пришедшая в точку P , имела амплитуду A_0 и интенсивность I_0 (энергия, приходящая на единицу площади за единицу времени, причем $I_0 = k \cdot A_0^2$), то, при наличии преграды, амплитуда и интенсивность света в этой точке зависят от числа зон Френеля, укладывающихся в отверстии. Коэффициент пропорциональности k часто принимают за единицу.

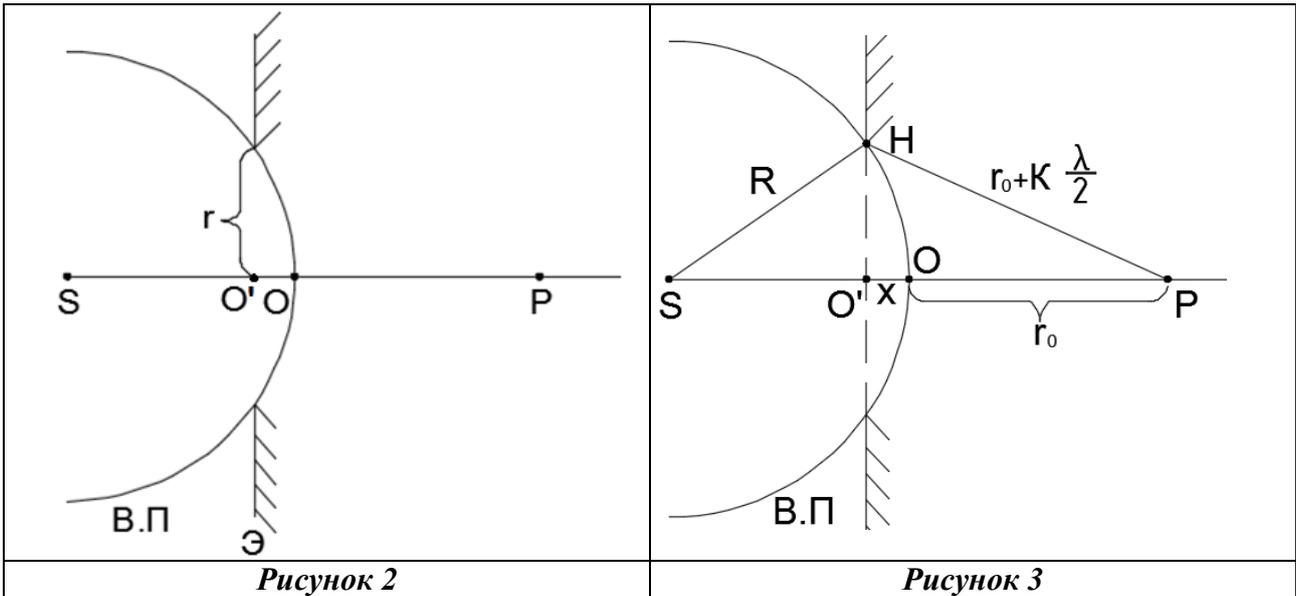


Рисунок 2

Рисунок 3

Определим число K зон Френеля, укладывающихся в отверстии для точки P . Волновая поверхность имеет радиус R (см. рис. 3). $O'H$ – радиус отверстия, равный r . Таким образом, $HP = r_0 + K \frac{\lambda}{2}$. Отрезок $O'O$ – обозначим x . Из двух прямоугольных треугольников $\Delta SHO'$ и $\Delta O'HP$ выразим $O'H$ и, приравняв два выражения, определим x :

$$(O'H)^2 = R^2 - (R-x)^2;$$

$$(O'H)^2 = \left(r_0 + K \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (r_0 + x)^2 = r^2 \quad (*)$$

Подставим x в уравнение (*), имеем $r^2 = \left(r_0 + K \frac{\lambda}{2}\right)^2 - (r_0 + x)^2$, раскроем скобки, и, пренебрегая слагаемым с λ^2 , получим:

$$r = \sqrt{\frac{r_0 R}{r_0 + R}} K \lambda \quad (1)$$

Очевидно, радиус r отверстия в экране есть одновременно радиус K -й зоны:

$r_K = \sqrt{\frac{r_0 R}{r_0 + R}} K \lambda$. Отсюда получаем, что отверстие радиуса $r = r_K$ открывает

часть ВП, на которой укладывается число зон $K = \frac{r^2(r_0 + R)}{\lambda r_0 R}$, которое зависит от взаимного расположения точки наблюдения, источника света и экрана с отверстием при заданных λ и r .

Пусть K – четное число зон Френеля, например $K=2$. В точке P почти не будет света, т. к. волны от зон взаимно ослабляют друг друга при этом большая часть света будет распределена вокруг точки P : темное пятно окружено светлым кольцом. Если K – нечетное число зон, например $K=3$, то в точке P будет свет. И светлая центральная точка будет окружена темным кольцом. В этом случае волна от третьей зоны ослабила волну от второй зоны, а ничем не ослабленная волна от первой зоны пришла в точку P .

Амплитуду результирующей волны (колебания) в точке P при большом числе K зон, можно записать в виде: $A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_K}{2}$, где A_1 – амплитуда волны, пришедшей в точку P от первой зоны, A_K – амплитуда волны от последней K -той зоны. Знак (-) соответствует четному, а знак (+) нечетному числу K . Стоит заметить, что для зон малого порядка справедливо приближение $A_1 \approx A_2 \approx \dots \approx A_K$. Если радиус отверстия увеличивать до бесконечности, вся ВП будет открыта, то $A_K \rightarrow 0$. И амплитуда результирующей волны $A = \frac{A_1}{2} = A_0$, т.е. составит половину амплитуды волны от первой зоны. Можно записать $A_1 = 2A_0$, действие первой зоны в 2 раза превосходит действие всей свободной ВП. Значит, интенсивность света в точке P за счет открытой только первой зоны равна $I \approx A_1^2 = 4A_0^2 \approx 4I_0$, т. е. в 4 раза превосходит интенсивность света I_0 от полностью открытой ВП.

Если на экран с отверстием радиуса r падает плоская волна (см. рис. 4), то число K зон Френеля, укладывающихся в отверстии, рассчитываем по формуле:

$$\left(r_0 + K \frac{\lambda}{2}\right)^2 - r_0^2 = r^2 = r_K^2; \quad r = r_K = \sqrt{r_0 K \lambda}, \quad \text{а} \quad K = \frac{r^2}{r_0 \lambda}.$$

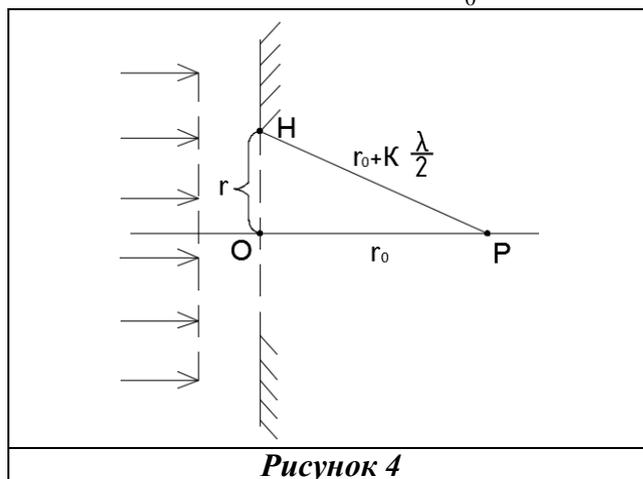


Рисунок 4

Интенсивность света в точке P можно увеличить, используя вместо экрана с отверстием зонную пластинку – такой экран – преграда, который закрывает все четные (или все нечетные зоны Френеля). Еще больший эффект, если изменить фазы волн, проходящих от соседних зон: изготавливают ступенчатую зонную

пластинку, подбирая высоту h ступени так, чтобы изменить фазу колебаний от соседних зон на π :

$$\frac{2\pi h(n-1)}{\lambda} = \pi \text{ или } h = \frac{\lambda}{2}(n-1), \text{ где } n - \text{ показатель преломления вещества}$$

пластинки, λ – длина волны.

Еще раз подчеркнем: если отверстие в экране такого размера, что открывает только первую зону (остальные закрыты), то интенсивность света $I_1 = 4I_0$.

Если закрыть половину центральной части отверстия, в котором укладывается первая зона Френеля (см. рис. 5а), то результирующая амплитуда:

$$A_{1/2} = \frac{A_1}{\sqrt{2}}, \text{ а интенсивность: } I_{1/2} = \left(\frac{A_1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{A_1^2}{2} = \frac{I_1}{2} = \frac{4I_0}{2} = 2I_0.$$

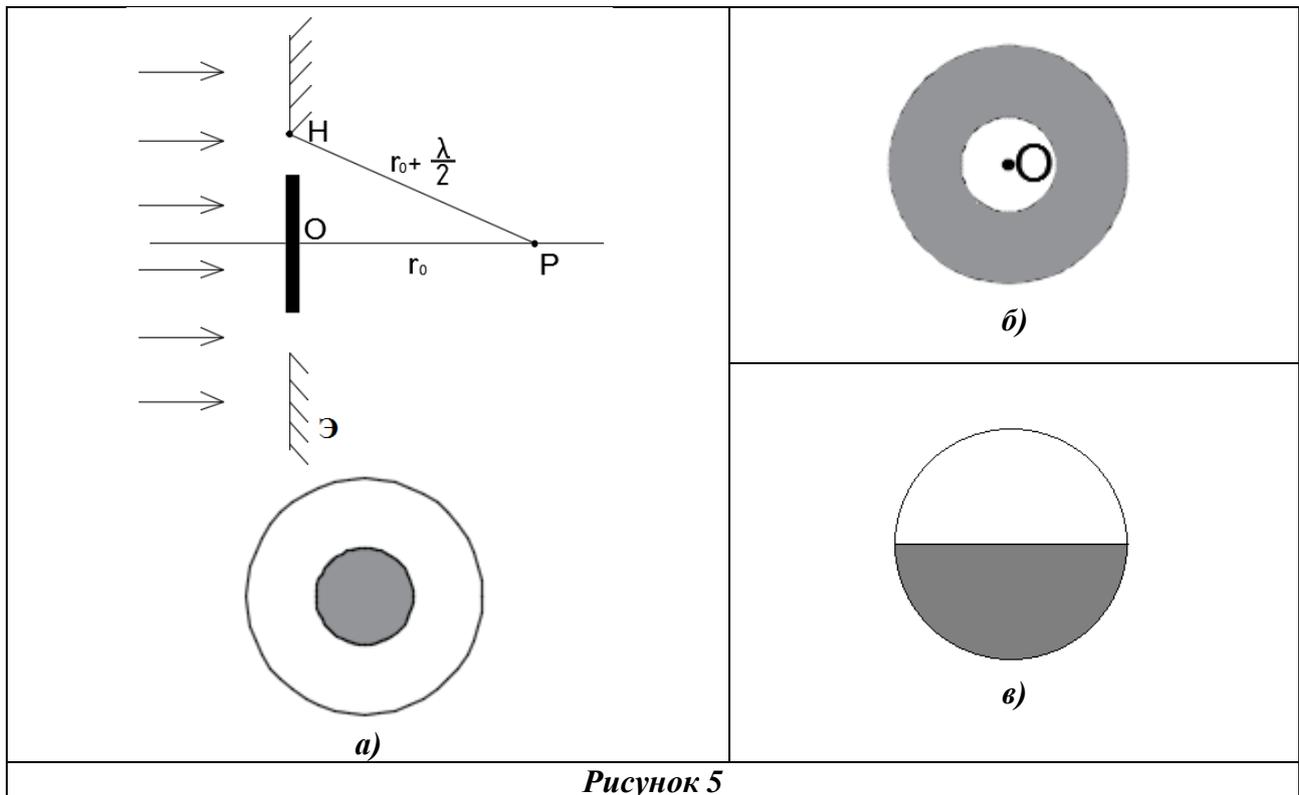


Рисунок 5

Если закрыть внешнюю половину первой зоны (см. рис. 5б), то результирующая амплитуда в точке P будет также равна $A_{1/2} = \frac{A_1}{\sqrt{2}}$, а интенсивность $I_{1/2} = 2I_0$.

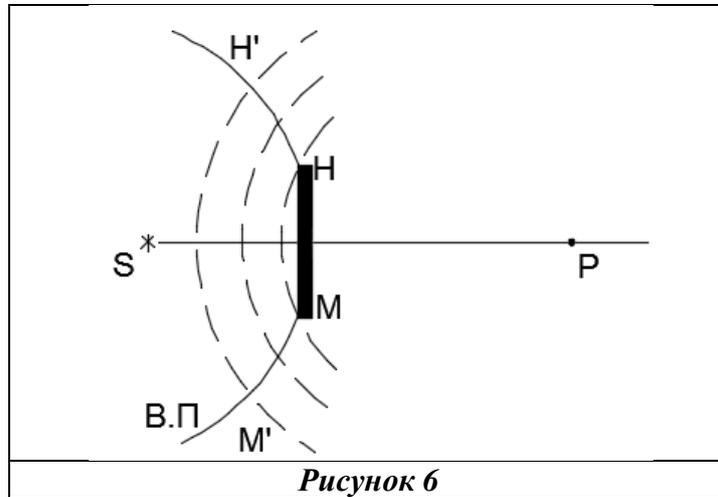
Неважно какая половина первой зоны закрыта. Интенсивность света в 2 раза превышает интенсивность света свободной ВП.

Если закрыть половину первой зоны по диаметру (см. рис. 5в), то амплитуда волны, излученной открытой половиной первой зоны: $A = A_1/2$, а интенсивность света в точке P равна: $I_{1/2} = \left(\frac{A_1}{2}\right)^2 = \frac{A_1^2}{4} = \frac{4I_0}{4} = I_0$

Свет «не заметил» закрытие половины первой зоны Френеля по диаметру и распространяется с интенсивностью, как будто преграды нет.

1.2 Дифракция на круглом непрозрачном диске

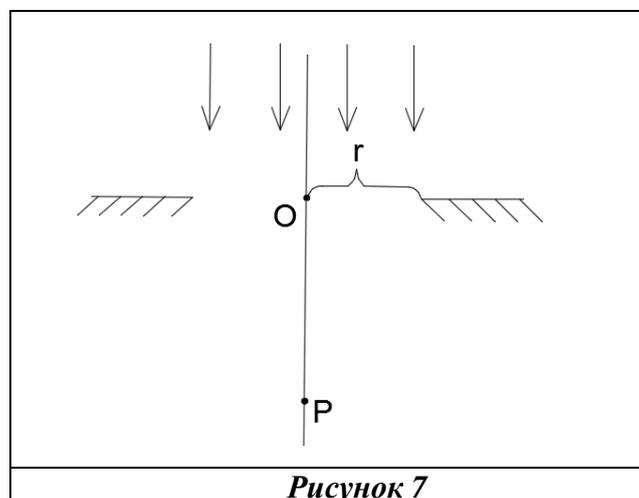
Пусть между источником S и точкой наблюдения P расположен непрозрачный диск (НМ) так, что его плоскость перпендикулярна SP . $H'H$ и MM' – участки свободной ВП (рис. 6). Разобьем участки свободной ВП на кольцевые зоны Френеля и начнем их построение от края (H или M) диска.



Пусть диск HM закрывает K первых зон. Тогда в точку P придут волны от остальных свободных зон, начиная с $K+1$ зоны. Зона с номером $K+1$ играет роль первой, посылающей волну в точку P . Амплитуда волны в этой точке от всех открытых зон равна половине амплитуды, приходящей от $K+1$ зоны: $A_p = \frac{A_{K+1}}{2}$. Таким образом, каков бы ни был радиус диска, в центре его геометрической тени в точке P всегда будет наблюдаться светлое пятно (пятно Пуассона).

2 Расчет дифракционной картины с использованием метода графического сложения колебаний

Пусть плоская волна падает на преграду с отверстием радиуса r (см. рис. 7).



Точка наблюдения P лежит на перпендикуляре, проходящем через центр отверстия - точку O . Разобьем ВП в пределах отверстия на N узких колец с центром в точке O так, чтобы вторичные волны от точек одного кольца имели одинаковые амплитуды \vec{a}_i и сдвиг фаз δ_i . Для графического нахождения результирующей волны задаем ось Ox , направление которой показывает фазу колебания, посланного источником света и дошедшего до точки наблюдения по прямой. Колебания, приходящие в точку P от первого кольца, изобразим вектором \vec{a}_1 . Фазу вектора \vec{a}_1 примем равной нулю. На рисунке 8 вектор \vec{a}_1 отложен вдоль Ox , причем его начало совпадает с точкой O .

Колебание в т. P от второго кольца изображено вектором \vec{a}_2 , составляющим угол δ_1 с осью Ox . Начало вектора \vec{a}_2 совмещено с концом \vec{a}_1 . Колебание от третьего кольца изображено вектором \vec{a}_3 , образующим ещё больший угол с осью Ox . Заметим, что угол δ_2 – разность фаз колебаний в т. P от второго и третьего колец. Совокупность всех векторов \vec{a}_i образует ломаную линию.

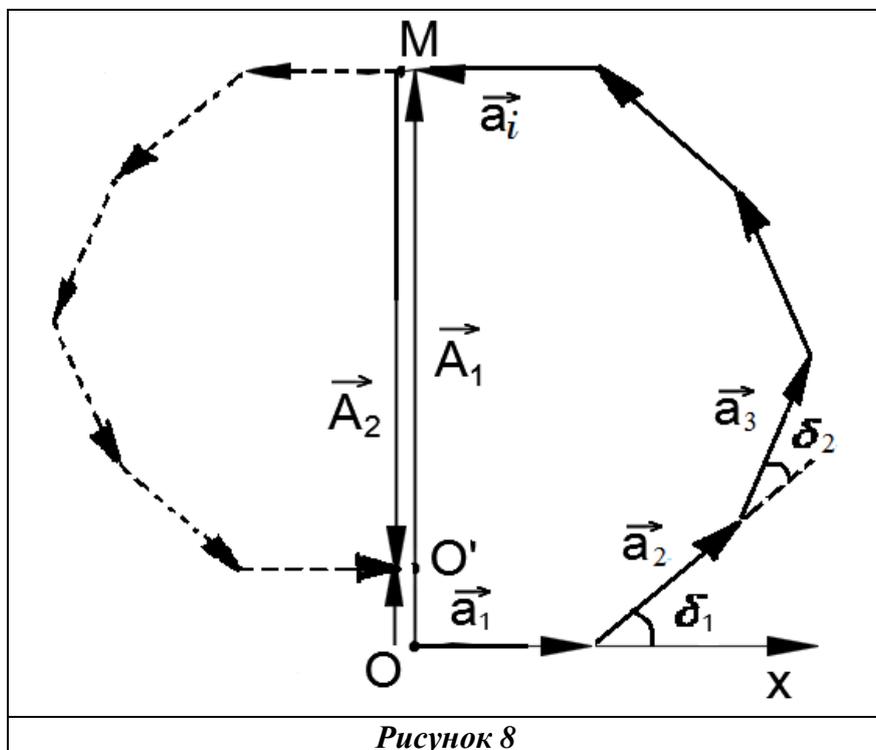


Рисунок 8

Суммарное колебание в т. P от всех колец изобразится вектором \vec{A} соединяющую т. O с концом вектора \vec{a}_i .

Пусть разность фаз колебаний от соседних колец δ_i равна $\pi/6$. Векторная сумма колебаний от шести колец изображена на рисунке 8. Видно, что векторы \vec{a}_6 и \vec{a}_1 противоположны по фазе, т. е. эти шесть колец соответствуют по действию первой зоне Френеля. Вектор \vec{A}_1 есть амплитуда колебаний в т. P от первой зоны. Следующие шесть колец породят колебания с амплитудой \vec{A}_2 , т. е. \vec{A}_2 – действие второй зоны в т. P (пунктирный отрезок ломаной слева). Вектор \vec{OO}' (соединяющий начало \vec{A}_1 (т. O) с концом \vec{A}_2 (т. O')) есть результирующая ампли-

туда колебания от первых двух зон. Из рисунка 8 видно, что $|\overline{OO'}| \ll |\vec{A}_1|$, т. е. действие двух открытых зон значительно слабее действию одной открытой.

Если $i \rightarrow \infty$, то ломаная линия OM (см. рис. 8) перейдет в плавную дугу, в виде полуокружности длиной L_1 (см. рис. 9).

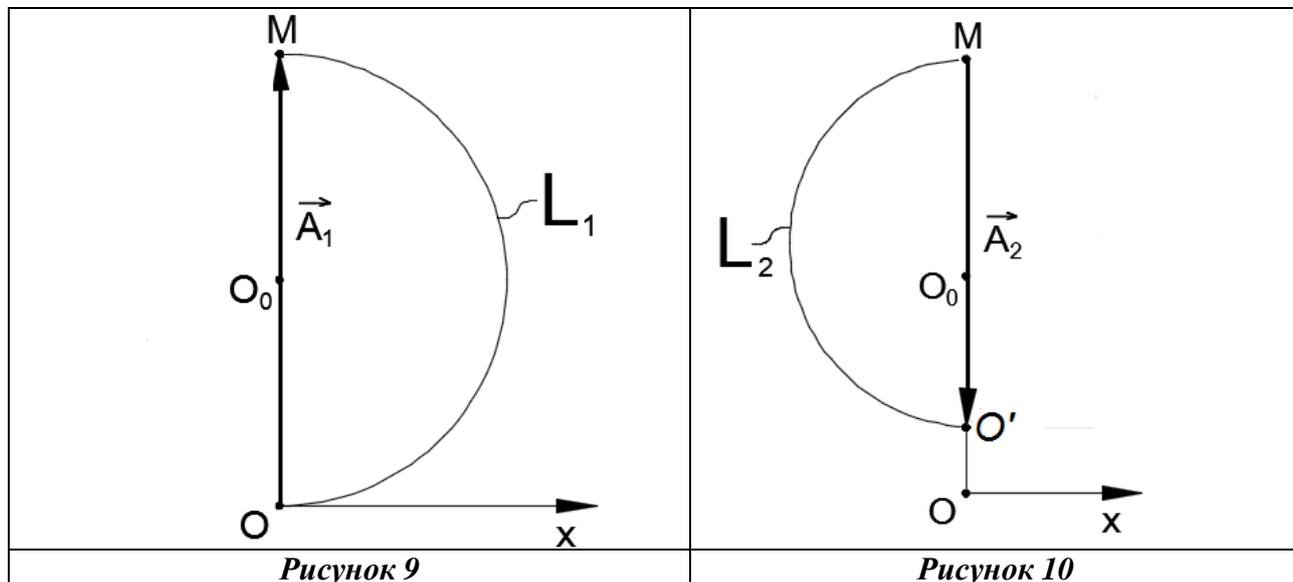


Рисунок 9

Рисунок 10

Амплитуда вектора \vec{A}_1 равна диаметру этой полуокружности. Амплитуда \vec{A}_2 второй зоны равна диаметру полуокружности $L_2 < L_1$ (см. рис. 10). Итак, если в отверстии укладывается две зоны Френеля, надо к концу вектора \vec{A}_1 (т. M) «пристроить» начало вектора \vec{A}_2 , а результат действия двух зон в т. P изобразится вектором, направленным от начала \vec{A}_1 (т. O) к концу \vec{A}_2 (т. O').

Амплитуды от всех остальных зон также будут диаметрами полуокружностей, причем, чем больше номер зоны, тем меньше длина соответствующей полуокружности. Полуокружности, соответствующие нечетным зонам, будут располагаться аналогично L_1 , т. е. справа от линии OM , а соответствующие четным зонам будут располагаться как L_2 , т. е. слева от линии OM .

Вектора $\vec{A}_3, \vec{A}_5, \vec{A}_7, \dots$ будут сонаправлены с \vec{A}_1 , а $\vec{A}_4, \vec{A}_6, \vec{A}_8, \dots$, сонаправлены с \vec{A}_2 . По Френелю, $A_1 > A_2 > A_3 > \dots$, т. к. амплитуды от вторичных источников (точки на ВП) зависят от косинуса угла между нормалью к ВП в области вторичного источника и направлением от этого источника к т. P . Чем больше номер зоны, тем больше этот угол, а значит, меньше косинус.

Подобные построения дают возможность определить амплитуду $A_{рез}$ результирующих колебаний в т. P в зависимости от размеров и формы отверстий в преградах. Например, при полностью открытой ВП (отсутствие препятствия между S и т. P) плавная линия перейдет в спираль (см. рис. 11).

При этом, результирующая амплитуда от всей открытой ВП в т. P составит: $A_0 = A_1/2$, где A_1 – амплитуда колебания, когда радиус отверстия равен радиусу первой зоны ($OM = A_1$).

Если в отверстие умещается только часть первой зоны, то разность фаз θ между крайними лучами – луч 1 (из центра отверстия) и луч 2 (от внешней

границы отверстия) меньше π : $\theta = 2\pi\Delta/\lambda$, где Δ - разность хода лучей 1 и 2 (см. рис. 12).

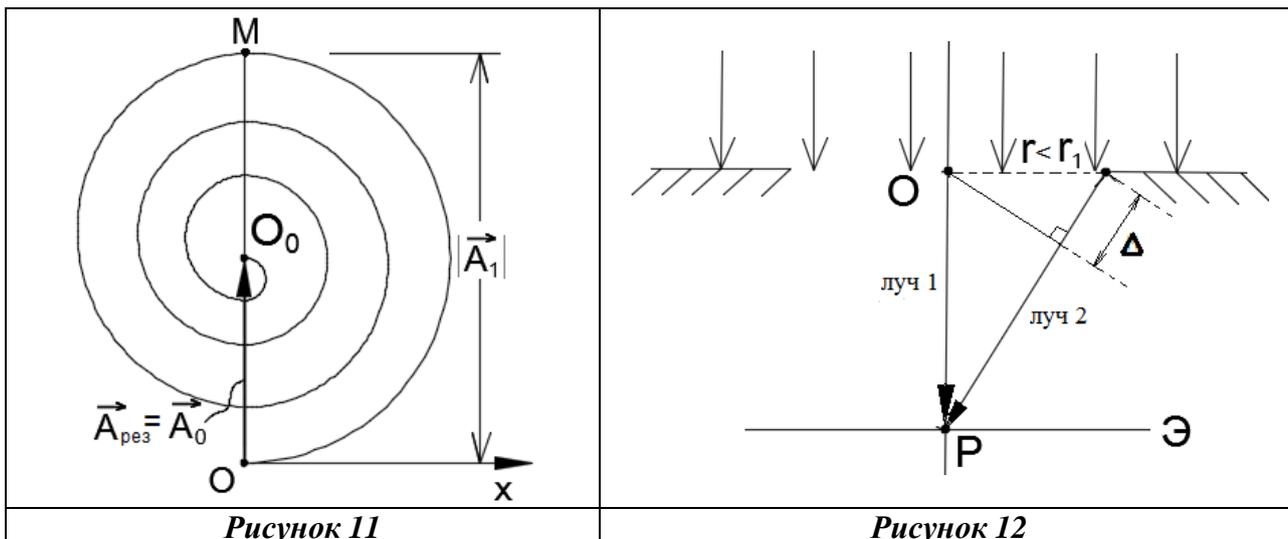


Рисунок 11

Рисунок 12

При векторном сложении колебаний (см. рис. 13) получится только часть полуокружности (радиуса A_0), дуга L' , опирающаяся на центральный угол θ . Длина хорды, стягивающей дугу, равна результирующей $\vec{A}_{рез}$ амплитуде колебания.

Если закрыть центральную часть отверстия, ограниченного первой зоной Френеля (см. рис. 5в), то при векторном сложении амплитуд колебаний от открытых колец первой зоны получится оставшаяся часть полуокружности радиуса A_0 (см. рис. 14) длиной L'' .

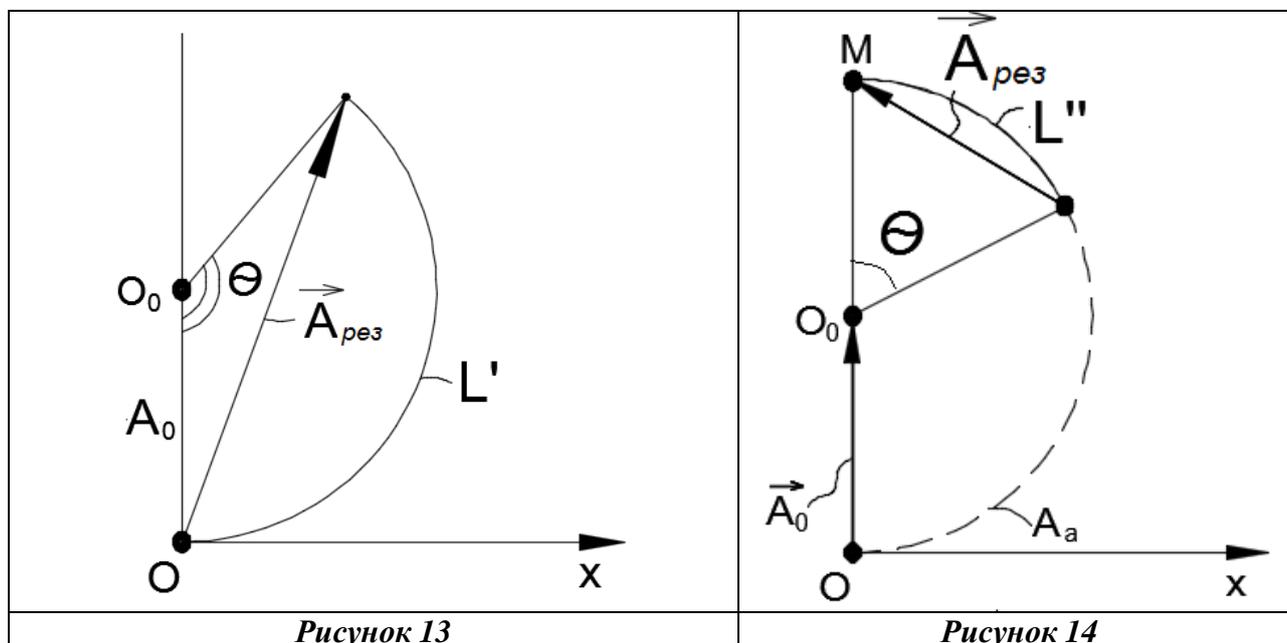


Рисунок 13

Рисунок 14

Её длина позволяет определить разность фаз θ и амплитуду результирующего колебания в т. P . (Напоминаем, хорда, стягивающая оставшуюся часть полуокружности L'' , есть $\vec{A}_{рез}$). Определив графически $A_{рез}$ в т. P , находят интенсивность света $I = kA_{рез}^2$.

Пример 1

Плоская монохроматическая волна интенсивности I_0 падает нормально на плоскую диафрагму D (рис. 15) с круглым отверстием радиуса r_1 .

На каком расстоянии от диафрагмы следует расположить экран \mathcal{E} , чтобы для т. P , лежащей на одном перпендикуляре с центром отверстия O , в отверстии укладывалась одна зона Френеля? Какова интенсивность света в т. P ? Как изменится интенсивность, если закрыть половину площади отверстия (центральную часть или по диаметру). Длина волны падающего света λ .

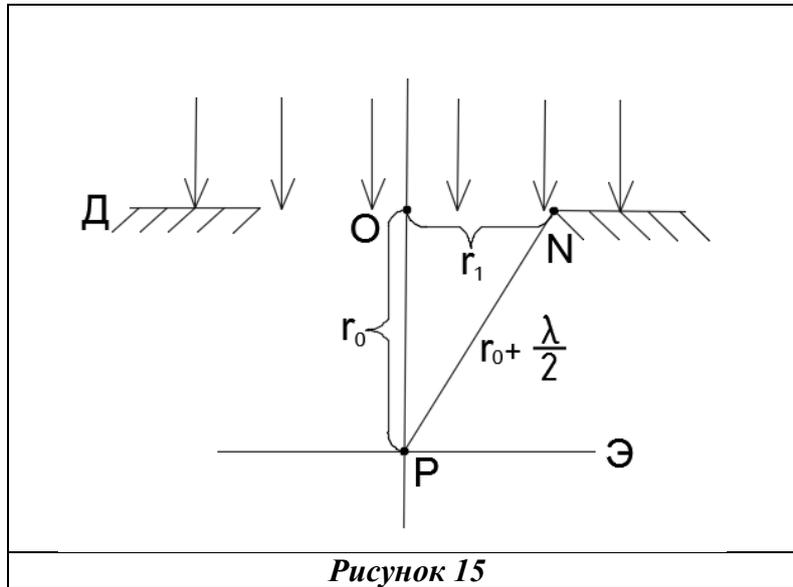


Рисунок 15

Вводим обозначения (см. рис. 15).

1. PN – отрезок, соединяющий центр экрана с краевой точкой отверстия.
2. В отверстии укладывается одна зона, значит, $NP = r_0 + \lambda/2$.
3. По теореме Пифагора определяем r_0 , пренебрегая слагаемым с λ^2 .

$$\left(r_0 + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - r_1^2 = r_0^2; \quad r_0^2 + r_0\lambda - r_1^2 = r_0^2 \rightarrow r_0 = \frac{r_1^2}{\lambda}$$

4. Падающая волна плоская (система параллельных лучей).

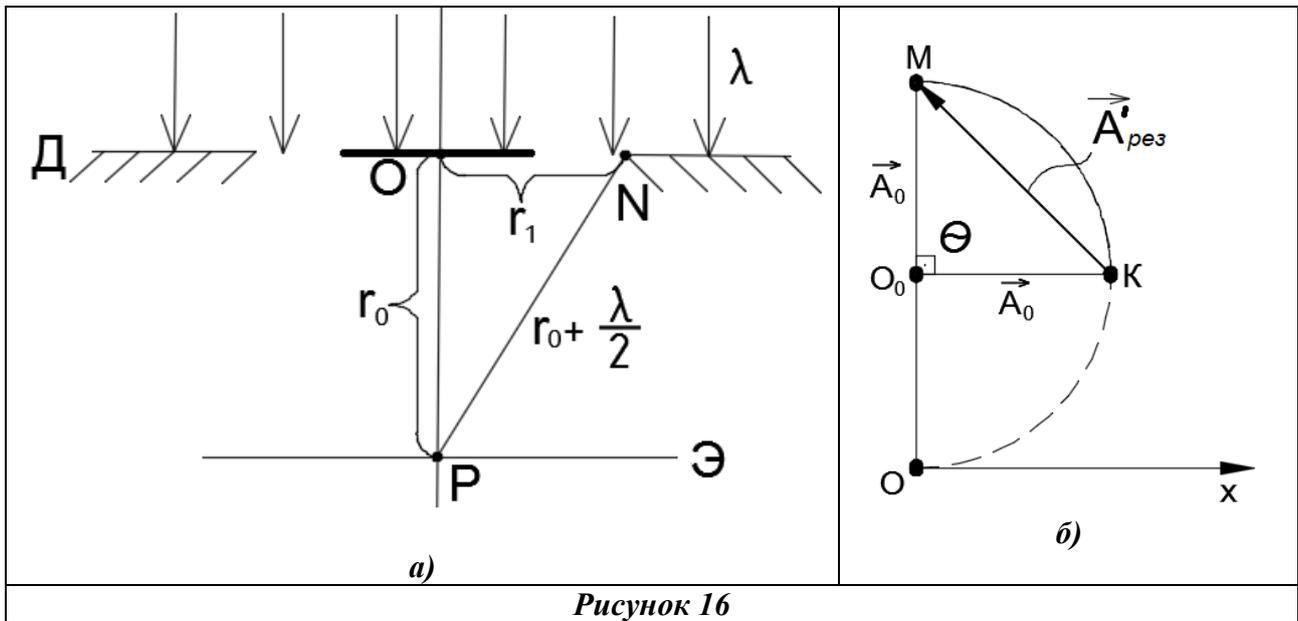
Интенсивность света, приходящего в т. P без диафрагмы, равна интенсивности I_0 падающей волны (см. рис. 11).

$$A_0 = \frac{A_1}{2} \rightarrow A_1 = 2A_0; \quad I = A_1^2 = 4A_0^2 = 4I_0,$$

где I – интенсивность света в точке P в присутствии диафрагмы, открывающей одну зону Френеля.

5. Закрываем центральную половину площади отверстия (см. рис. 16 (а)).

Напомним, что A_1 является диаметром полуокружности, а радиус этой полуокружности $A_0 = A_1/2$. Из т. O_0 строим полуокружность радиуса A_0 пунктиром (см. рис. 16 (б)). Затем половину полуокружности, за которую отвечают открытая площадь отверстия, изображаем сплошной линией KM . Соответствующий ей центральный угол $\theta = 90^\circ$. Хорда KM есть $\bar{A}'_{рез}$, т. е. амплитуда пришедшей в т. P волны. По теореме Пифагора: $(A'_{рез})^2 = 2A_0^2 \rightarrow A'_{рез} = \sqrt{2}A_0$.



Интенсивность света в т. P : $I' = (A'_{рез})^2 = 2A_0^2 = 2I_0$.

Отсюда, отношение интенсивности: $\frac{I'}{I} = \frac{2I_0}{4I_0} = \frac{1}{2}$, т. е. интенсивность уменьшается в 2 раза.

Закрываем половину площади отверстия по диаметру (см. рис. 5в)

Выше рассмотрен метод разбиения ВП на кольца, каждый из которых «породил» в т. P амплитуду колебания \vec{a}_i . Закрыв половину зоны, закрыли половину каждого кольца. Теперь в т. P приходят колебания с амплитудой $a_i/2$ от каждого кольца. При разбиении на кольца числом $i \rightarrow \infty$ длина полуокружности при суммировании $L'' = L/2$, где L – длина полуокружности для первой зоны Френеля. Новая полуокружность L'' опирается на новый диаметр, который равен новой амплитуде A'' волны, пришедшей в т. P .

$$L'' = \pi \frac{A''}{2}; \quad L = \pi \frac{A_1}{2}; \quad \frac{\pi}{2} A'' = \frac{\pi A_1}{2 \cdot 2} \rightarrow A'' = \frac{A_1}{2}.$$

Интенсивность света в т. P : $I'' = (A'')^2 = \left(\frac{A_1}{2}\right)^2 = \frac{A_1^2}{4} = \frac{(2A_0)^2}{4} = A_0^2 = I_0$.

На что обратить внимание! а) Каждая зона порождает в т. P амплитуду колебания, которую надо выразить через центральный угол θ и радиус окружности $A_0 = A_1/2$; б) амплитуды колебаний – вектора, поэтому при их суммировании используют обычное правило сложения векторов (начало следующего вектора совмещают с концом предыдущего); в) вся оставшаяся открытая ВП всегда «отправит» в т. P амплитуду \vec{A}_0 , чей конец всегда должен оказаться на векторной диаграмме в т. O_0 ; г) если открыта половина зоны Френеля, то амплитуда волны, пришедшей в т. P , составляет половину амплитуды волны от этой зоны (речь идет о ситуации, изображенной на рис. 5в). Например, закрыта $1/4$ второй зоны, т. е. открыта $3/4$ второй зоны, то амплитуда волны в т. P равна $3/4 A_2$, где A_2 – амплитуда волны от второй зоны, полностью открытой.

Пример 2 (задача №8)

Между источником S монохроматического света с длиной волны λ и точкой наблюдения P находится препятствие, форма которого показана на рисунке 17, при этом прямая SP проходит через центр системы окружностей на рисунке. Расстояние от источника до препятствия равно a , расстояние от препятствия до точки наблюдения равно b . Радиусы окружностей R_1, R_2, R_3 на рисунках заданы в виде $(N+N_i)$ зон, т. е. выражены в количестве зон Френеля для точки P , уместяющихся внутри соответствующего круга. Здесь N – целое число, которое Вы задаете сами, а N_i указано в таблице.

Выполнить следующие задания:

П. 1. Найти радиусы всех окружностей на рисунке в метрах для $m. P$ (см. рис. 17).

Заметим, что точечный источник S посылает сферическую световую волну.

Зададим следующие значения: $a=1$ м; $b=1,5$ м; $\lambda=500$ нм; $N_1 = \frac{3}{5}$; $N_2 = 1\frac{1}{6}$;

$$N_3 = 1\frac{3}{4}.$$

Пусть $N=2$, тогда: $K_1 = N + N_1 = 2\frac{3}{5}$; $K_2 = N + N_2 = 3\frac{1}{6}$; $K_3 = N + N_3 = 3\frac{3}{4}$.

Воспользуемся формулой (1) и определим радиусы всех окружностей на рисунке в метрах для т. P (см. рис. 17):

$$R_1 = \sqrt{\left(\frac{ab}{a+b}\right)(N + N_1)\lambda} = \sqrt{\frac{1 \cdot 1,5}{2,5} \cdot 2\frac{3}{5} \cdot 500 \cdot 10^{-9}} = 0,88 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 0,88(\text{мм})$$

$$R_2 = \sqrt{\left(\frac{ab}{a+b}\right)(N + N_2)\lambda} = \dots = 0,97(\text{мм})$$

$$R_3 = \sqrt{\left(\frac{ab}{a+b}\right)(N + N_3)\lambda} = \dots = 1,06(\text{мм})$$

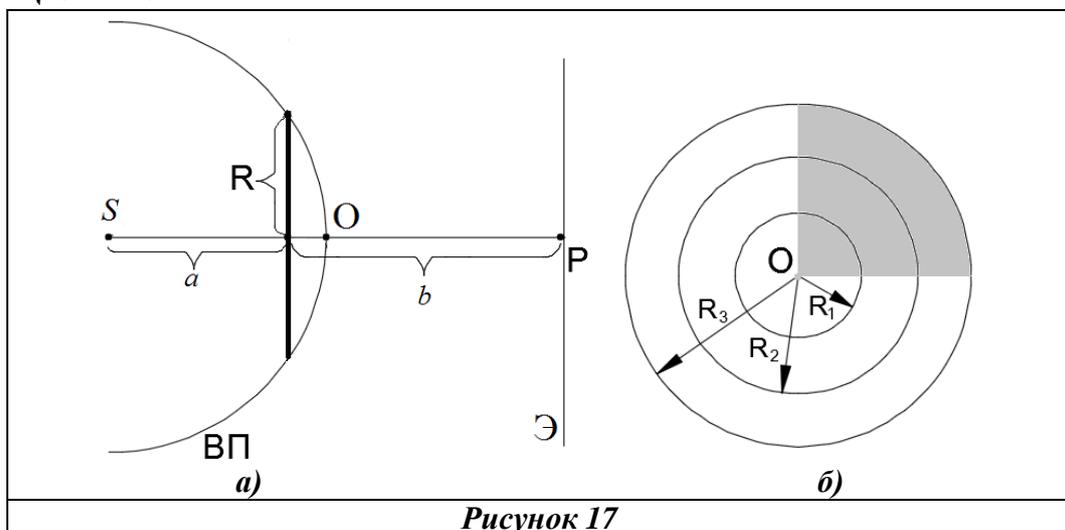


Рисунок 17

Обратить внимание: нумерация зон начинается от полюса сферической ВП, т. е. т. O .

П. 2. Построить векторы амплитуд светового вектора для т. P от отдельных участков волнового фронта, проходящего через препятствие, найти их модули и указать направления.

а) Круг радиуса R_1 охватывает площадь ВП, на которой укладывается $K_1=2+3/5$ зон Френеля. Начиная от т. O , обойдем окружность против часовой стрелки, описав угол $180^\circ \cdot 2 = 360^\circ$, т. е. необходимо оказаться в т. O и продолжить движение по окружности от т. O на центральный угол $\theta = 3/5 \cdot 180^\circ = 108^\circ$ (см. рис. 18) в т. O_1 .

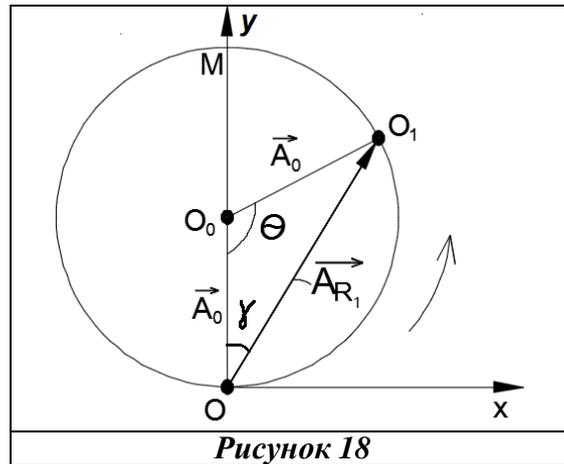


Рисунок 18

$\angle OO_0O_1 = \theta = 108^\circ$. Окружность имеет радиус A_0 . По теореме косинусов определим модуль вектора \vec{A}_{R1} :

$$OO_1^2 = OO_0^2 + O_0O_1^2 - 2OO_0 \cdot O_0O_1 \cos \theta$$

$$|\vec{A}_{R1}|^2 = A_{R1}^2 = A_0^2 + A_0^2 - 2A_0 \cdot A_0 \cos 108^\circ$$

$$A_{R1} = A_0 \sqrt{2(1 - \cos 108^\circ)} = 1,62A_0$$

Угол вектора \vec{A}_{R1} с осью Oy есть угол γ при т. O в равнобедренном $\triangle OO_0O_1$:

$$\gamma = \frac{180^\circ - \theta}{2} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$$

Угол этого вектора с осью Ox равен 54° .

б) В круге радиуса R_2 укладывается $K_2=3\frac{1}{6}$ зоны Френеля для т. P . По окружности радиуса A_0 , начав от т. O обойдем три раза по 180° , окажемся в т. M (см. рис. 19). $\frac{1}{6}$ следующей зоны отвечает углу $\frac{1}{6} \cdot 180^\circ = 30^\circ$. Опишем угол 30° и придем в т. M_1 . Эта точка является концом вектора \vec{A}_{R2} . А где его начало?

Следует иметь в виду, что из этих $3\frac{1}{6}$ зоны как бы уже учтены действия $2\frac{3}{5}$ зоны за счет круга радиуса R_1 , т. е. теперь стоит учесть действие $3\frac{1}{6} - 2\frac{3}{5} = \frac{17}{30}$ зоны. Напоминаем, каждой зоне соответствует разность фаз, равная 180° .

Амплитуда \vec{A}_{R2} изобразится хордой дуги O_1MM_1 , опирающейся на центральный угол $\theta = \frac{17}{30} \cdot 180^\circ = 102^\circ$, т. е. начало \vec{A}_{R2} есть т. O_1 – конец вектора \vec{A}_{R1} .

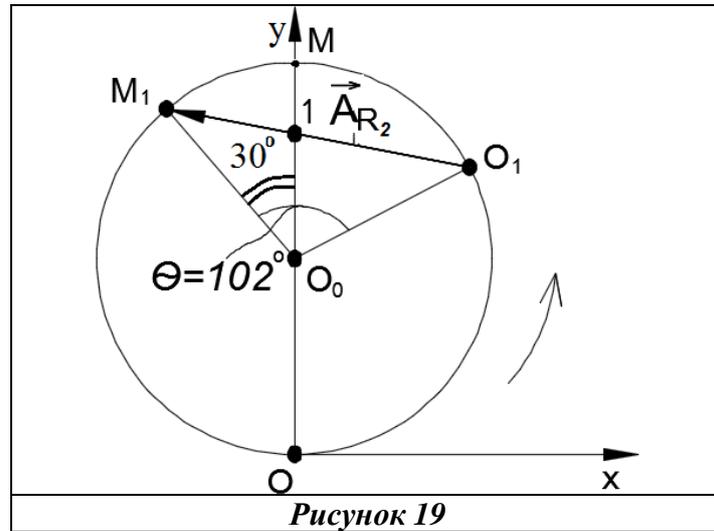


Рисунок 19

По теореме косинусов: $A_{R2} = A_0 \sqrt{2(1 - \cos 102^\circ)} = 1,56A_0$.

В равнобедренном $\triangle M_1O_0O_1$ угол при т. M_1 равен: $\frac{180^\circ - 102^\circ}{2} = 39^\circ$;
 $\angle M_1O_0M = 30^\circ$; $\angle M_1O_0M_1 = 180^\circ - (39^\circ + 30^\circ) = 111^\circ$; $\angle M_1M_1M = 180^\circ - 111^\circ = 69^\circ$.

Угол, образованный этим вектором с осью Ox , равен: $90^\circ + 69^\circ = 159^\circ$.

в) На круге радиуса R_3 умещается $K_3 = 3\frac{3}{4}$ зоны. Начав от т. O (см. рис. 20), опишем по окружности радиуса A_0 угол $3 \cdot 180^\circ$ и окажемся в т. M , затем опишем угол $3/4 \cdot 180^\circ = 135^\circ$ и придем в т. M_2 . Эта точка будет концом вектора \vec{A}_{R3} , а началом будет т. M_1 , которая есть конец вектора \vec{A}_{R2} .

Т. к. из $3\frac{3}{4}$ зоны третьего круга уже учтено действие в т. P $3\frac{1}{6}$ зоны круга

R_2 , то надо оценить действие $3\frac{3}{4} - 3\frac{1}{6} = \frac{7}{12}$ зоны. Соединим точки M_1 и M_2 .

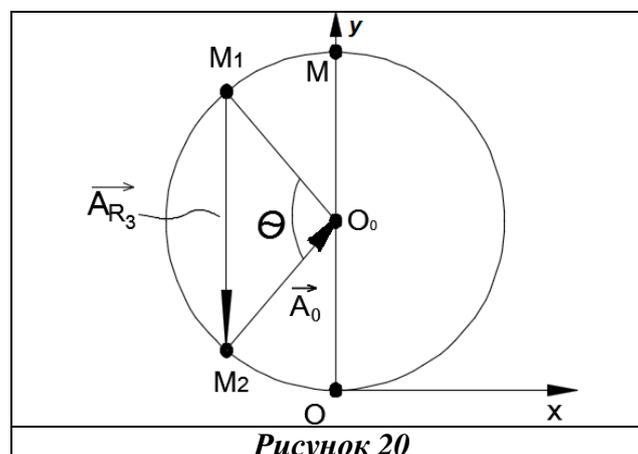


Рисунок 20

Хорда M_1M_2 равна длине вектора \vec{A}_{R_3} , центральный угол $\theta = \frac{7}{12} \cdot 180^\circ = 105^\circ$.

По теореме косинусов рассчитаем $A_{R_3} = A_0 \sqrt{2(1 - \cos 105^\circ)} = 1,59A_0$.

В $\triangle M_1O_0M_2$ угол при M_1 равен $\frac{180^\circ - 105^\circ}{2} = 37,5^\circ$.

Вектор \vec{A}_{R_3} образует с осью Ox угол $97,5^\circ$, с осью Oy угол $172,5^\circ$.

Действие остальной свободной ВП выразится в т. P вектором \vec{A}_0 , направленным из конца вектора \vec{A}_{R_3} в т. O_0 . На рисунке 20 этот вектор совпадает с M_2O_0 . Его углы с осью Ox и осью Oy равны 45° .

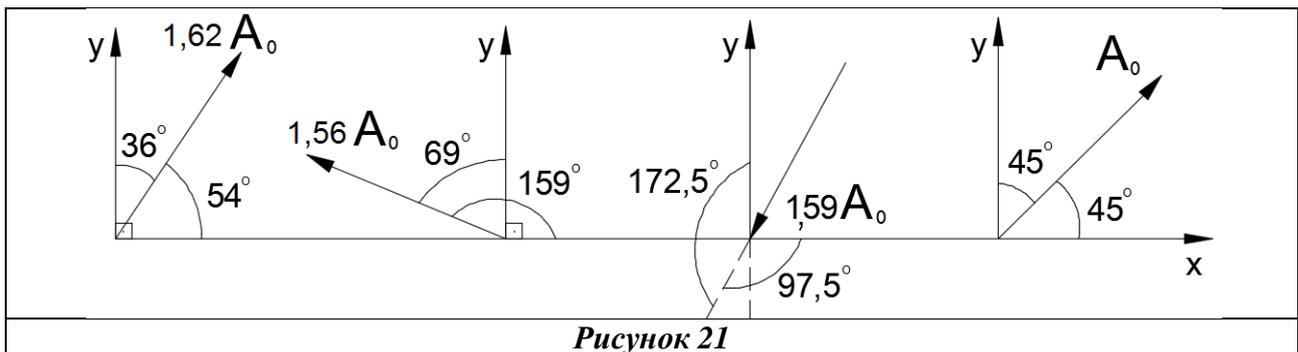


Рисунок 21

На рисунке 21 показаны модули и направления всех векторов, соответствующих отдельным полностью открытым заданным зонам.

По условию, каждый круг, каждая зона перекрыта на $1/4$ часть площади (см. рис. 17б), таким образом, открыты $3/4$ части каждой области, которые и испускают свет. Амплитуды $A'_{R_1}, A'_{R_2}, A'_{R_3}$ составляют теперь $3/4$ от $A_{R_1}, A_{R_2}, A_{R_3}$, и только A_0 сохраняет свое значение.

Рассчитаем:

$$A'_{R_1} = \frac{3}{4} \cdot 1,62A_0 = 1,22A_0; \quad A'_{R_2} = \frac{3}{4} \cdot 1,56A_0 = 1,17A_0;$$

$$A'_{R_3} = \frac{3}{4} \cdot 1,59A_0 = 1,19A_0; \quad A_0' = A_0.$$

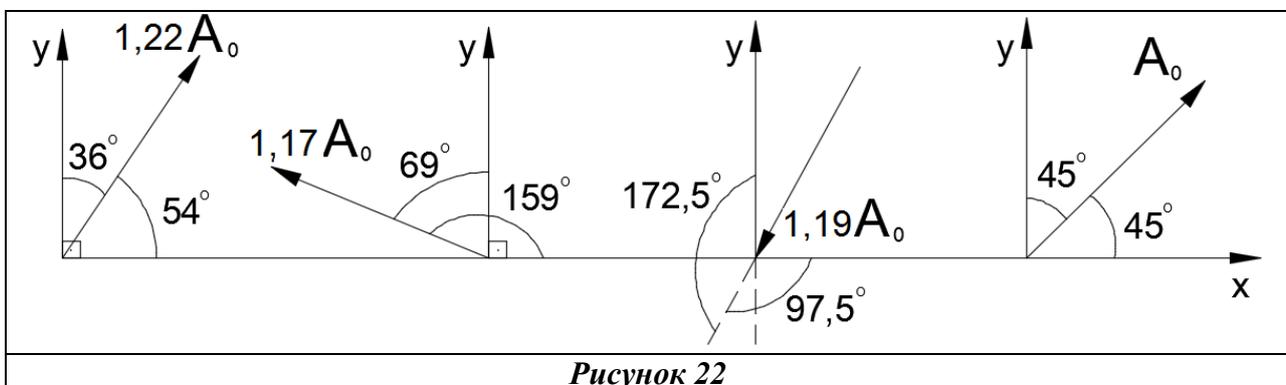


Рисунок 22

На рисунке 22 изображены векторы амплитуд светового вектора для т. P от отдельных участков ВП, проходящего через препятствие (зачерненные области на рисунке 17б), а также их модули и направления.

П. 3. Построить и найти амплитуду светового вектора в т. Р при наличии препятствия.

$$\text{Результирующая амплитуда } A'_{рез} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^4 A'_{R_i,x}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^4 A'_{R_i,y}\right)^2},$$

где $A'_{R_i,x}$ – проекция на ось координат. Рассчитаем проекции всех векторов на ось Ox (см. рис. 22):

$$A'_{R1x} = A'_{R1} \cdot \cos 54^\circ = 1,22A_0 \cdot 0,66 = 0,72A_0,$$

$$A'_{R2x} = A'_{R2} \cdot \cos 159^\circ = 1,17A_0 \cdot (-0,93) = -1,09A_0,$$

$$A'_{R3x} = A'_{R3} \cdot \cos 97,5^\circ = 1,19A_0 \cdot (-0,13) = -0,16A_0,$$

$$A'_{0x} = A_0 \cos 45^\circ = 0,71A_0,$$

$$A'_{резx} = \sum_{i=1}^4 A'_{R_i,x} = A_0(0,72 - 1,09 - 0,16 + 0,71) = 0,18A_0.$$

Рассчитаем проекции всех векторов на ось Oy :

$$A'_{R1y} = A'_{R1} \cdot \cos 36^\circ = 1,22A_0 \cdot 0,81 = 0,99A_0,$$

$$A'_{R2y} = A'_{R2} \cdot \cos 69^\circ = 1,17A_0 \cdot 0,36 = 0,42A_0,$$

$$A'_{R3y} = A'_{R3} \cdot \cos 172,5^\circ = 1,19A_0 \cdot (-0,99) = -1,18A_0,$$

$$A'_{0y} = A_0 \sin 45^\circ = 0,71A_0,$$

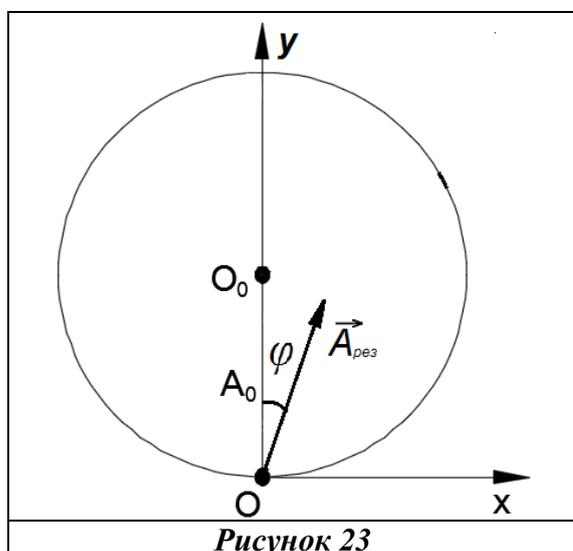
$$A'_{резy} = \sum_{i=1}^4 A'_{R_i,y} = A_0(0,99 + 0,42 - 1,18 + 0,71) = 0,94A_0.$$

Таким образом, модуль результирующего вектора $\vec{A}'_{рез}$ равен:

$$A'_{рез} = A_0 \sqrt{(0,18)^2 + (0,94)^2} = 0,96A_0 \approx A_0$$

Определим угол φ (см. рис. 23):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A'_{резx}}{A'_{резy}} = \frac{0,18A_0}{0,94A_0} = 0,19 \Rightarrow \varphi = 10,8^\circ.$$



П. 4. Найти отношение интенсивности света в точке наблюдения P при наличии препятствия к интенсивности I_0 света в той же точке в отсутствие препятствия.

Интенсивность света прямо пропорциональна квадрату амплитуды света, в общем случае коэффициент пропорциональности k :

$$\frac{I_{рез}}{I_0} = \frac{k \cdot A_{рез}^2}{k \cdot A_0^2} = \frac{0,96^2 A_0^2}{A_0^2} = 0,92.$$

П. 5. В открытую часть, находящуюся внутри первой окружности, вставляется прозрачная пластинка толщиной h с показателем преломления n . Пренебрегая изменением интенсивности света при прохождении пластинки, выполнить п. 4.

Введение пластинки привело к изменению фазы волны от части ВП радиуса R_1 , появилась дополнительная разность хода лучей $\Delta = h(n - 1)$, и, как следствие, появилась дополнительная разность фаз $\Delta\theta$.

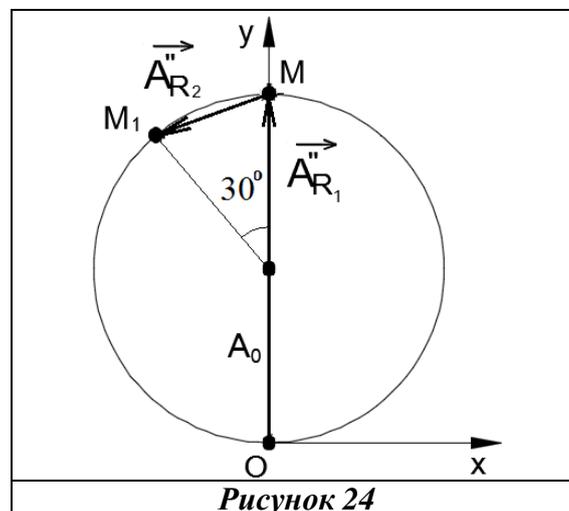
Дано: $h = 1$ мкм; $\lambda = 500$ нм; $n = 1,1$.

Определим дополнительную разность хода лучей: $\Delta = 1 \cdot 10^{-6}(1,1 - 1) = 0,1 \cdot 10^{-6}$ м

Составим пропорцию и определим дополнительную разность фаз:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda - 2\pi \\ \Delta - \Delta\theta \end{array} \right\} \rightarrow \Delta\theta = \frac{2\pi \cdot \Delta}{\lambda} = \frac{360^\circ \cdot 0,1 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-7}} = 72^\circ.$$

Новые амплитуды обозначим $A''_{R_1}, A''_{R_2}, A''_{R_3}$.



На окружности радиуса A_0 отразим новое положение конца вектора \vec{A}''_{R_1} . Теперь этот вектор опирается на центральный угол $(108^\circ + 72^\circ) = 180^\circ$ (см. рис. 24), т. е. конец нового вектора окажется в т. M , начавшись в т. O . Модуль этого вектора есть длина OM , т. е. $A''_{R_1} = 2 \cdot A_0$, а углы этого вектора: с осью Ox равен 90° , а с осью Oy составляет 0° .

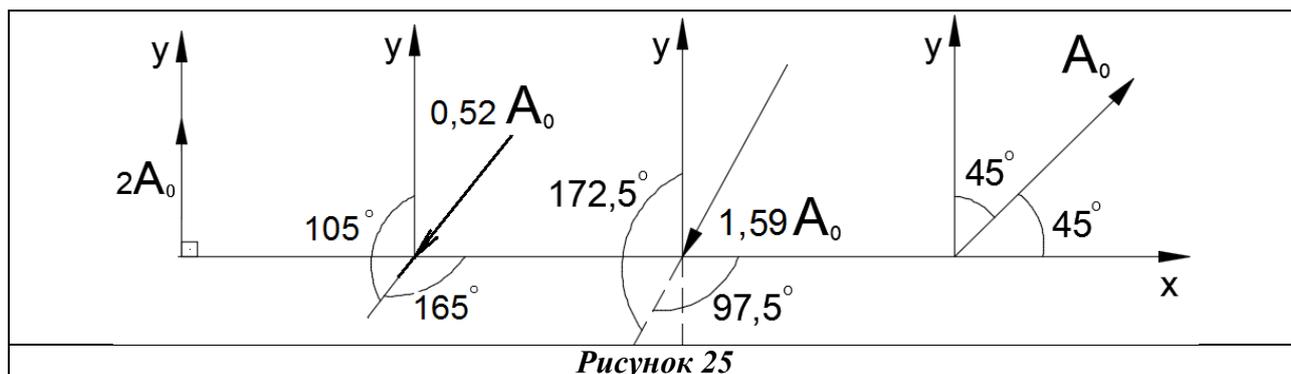
По-прежнему действие зон окружности R_2 приведет нас в т. M_1 . От т. O мы, как и раньше, «прошли» угол, равный $3 \cdot 180^\circ + 1/6 \cdot 180^\circ$ (см. рис. 24). Т. M_1 есть конец вектора \vec{A}''_{R_2} , а его начало находится в т. M , т. е. в точке, совпадающей с

концом вектора \vec{A}_{R1}'' . Модуль вектора \vec{A}_{R2}'' есть отрезок MM_1 . По теореме косинусов определим его значение: $A_{R2}'' = A_0 \sqrt{2(1 - \cos 30^\circ)} = 0,52A_0$.

Углы, образованные вектором \vec{A}_{R2}'' с осями координат, будут равны:

$$\text{с осью } Ox - 165^\circ, \text{ с осью } Oy - 180^\circ - \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 105^\circ.$$

Действие зон окружности R_3 и остальной свободной ВП сохраняется и по модулю и по направлению. Изобразим на координатной плоскости xOy все найденные вектора для случая, когда зоны полностью открыты (рис. 25).



Рассчитаем амплитуды и их проекции на оси Ox и Oy с учетом того, что 1/4 площади зон каждой окружности закрыта непрозрачным экраном.

Амплитуды	Проекция на ось Ox :	Проекция на ось Oy :
$\frac{3}{4} \cdot 2A_0 = 1,5A_0$	0	$1,5A_0$
$\frac{3}{4} \cdot 0,52A_0 = 0,39A_0$	$0,39A_0 \cos 165^\circ = -0,38A_0$	$0,39A_0 \cos 105^\circ = -0,1A_0$
$\frac{3}{4} \cdot 1,59A_0 = 1,19A_0$	$1,19A_0 \cos 97,5^\circ = -0,155A_0$	$1,19A_0 \cos 172,5^\circ = -1,18A_0$
A_0	$A_0 \cos 45^\circ = 0,71A_0$	$A_0 \sin 45^\circ = 0,71A_0$
	$\Sigma = 0,175A_0$	$\Sigma = 0,93A_0$

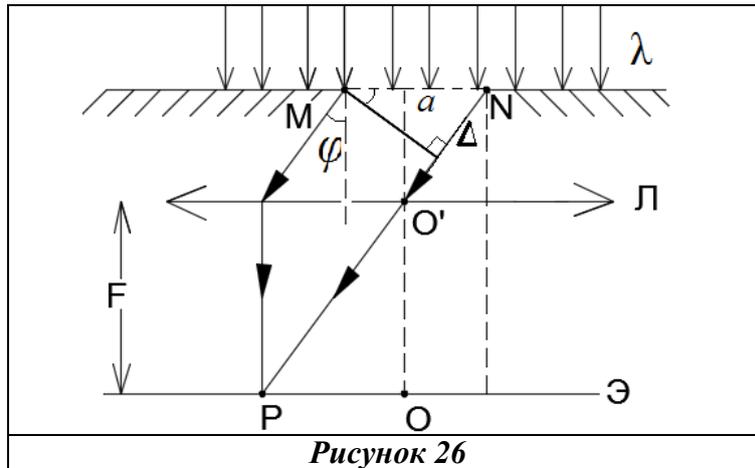
Результирующая амплитуда $A_{рез}'' = A_0 \sqrt{0,175^2 + 0,93^2} = 0,946A_0$.

$$\text{Отношение } \frac{I_{рез}''}{I_0''} = \frac{K \cdot (0,946A_0)^2}{K \cdot A_0^2} = 0,946^2 = 0,89.$$

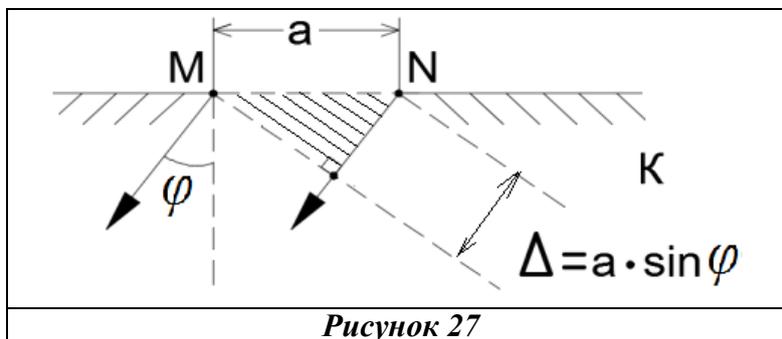
П. 6 На систему из двух длинных прямоугольных щелей падает нормально свет с длиной волны λ . Пусть I_0' – интенсивность света, наблюдаемого в направлении первоначального распространения в отсутствие среднего непрозрачного промежутка шириной b . Найти отношение интенсивности света, наблюдаемого в направлении, определяемом углом φ , к I_0' . При $\varphi < 0$ угол отклоняется от вертикали по часовой стрелке.

Дифракция в параллельных лучах – дифракция Фраунгофера.

Рассмотрим нормальное падение плоской монохроматической волны с длиной волны λ на щель шириной a (рис. 26). Пусть \vec{A}_0 – амплитуда падающей на щель волны.



$\Delta = a \sin \varphi$ – разность хода лучей от точек M и N , где φ – угол дифракции для произвольной точки на экране, т. е. угол отклонения лучей от первоначального направления. Во всех точках фронта падающей волны колебания имеют одинаковую фазу. Однако фаза колебаний вдоль фронта дифрагированной волны изменяется от точки к точке и для лучей от крайних точек M и N щели разность фаз равна: $\theta = \frac{\Delta}{\lambda/2} \cdot \pi = \frac{2\pi \cdot a \sin \varphi}{\lambda}$.



Согласно этому равенству θ зависит от угла дифракции φ при данных a и λ . Заметим, линза L не изменяет фазу колебаний.

Чтобы найти условие *max* и *min* освещенности (энергии) в какой-то точке экрана, например, в т. P , где линза собрала все параллельные лучи, дифрагировавшие под углом φ (экран помещают в фокальной плоскости L), разобьем щель на зоны Френеля. Это будут узкие полоски вдоль щели (рис. 27). Минимумы наблюдается при чётном числе зон Френеля. В этом случае разность фаз θ равна четному числу $(2m) \cdot \pi$.

$$\theta = 2m \cdot \pi = \frac{2\pi \cdot a \sin \varphi}{\lambda} \rightarrow a \sin \varphi = m\lambda, \quad \varphi = \varphi_{\min} - \text{угол дифракции, соответствующий минимуму } m\text{-порядка } (m = \pm 1; \pm 2; \dots).$$

Если угол дифракции равен нулю, то линза «соберет» все параллельные лучи в точке O экрана, которая расположена на перпендикуляре к щели, проведенном через оптический центр O' линзы. В этой точке экрана наблюдается центральный *max* (волны от всех точек фронта волны щели имеют одинаковую

фазу). Условие максимума k -го порядка запишем так: $a \sin \varphi_k = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}$, т. е. в щели должно укладываться нечетное число зон Френеля.

Чтобы рассчитать интенсивность света I_φ , надо векторно сложить колебания, соответствующие углу дифракции φ , приходящие в точку экрана, т. е. найти амплитуду результирующего колебания A_φ .

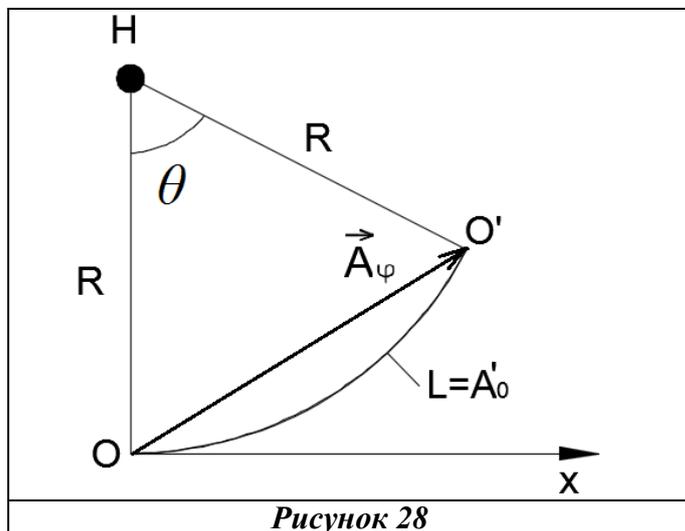
Для этого разобьем щель на N очень узких полосок шириной $\Delta a = \frac{a}{N}$, при-
 мем, что колебания от каждой точки одной полоски имеют одинаковую ампли-
 туду и фазу. Обозначим \vec{a}_i – амплитуду результирующей волны от одной пол-
 оски. Пусть угол дифракции $\varphi = \theta$. Векторное сложение амплитуд \vec{a}_i от отдель-
 ных полосок щели дает $\vec{A}_{рез} = \vec{A}'_0$.

$\vec{A}_{рез} = N\vec{a}_i = \vec{A}_0$, где \vec{A}_0 – амплитуда падающей на щель волны (интенсив-
 ность падающей волны $I'_0 \sim A_0^2$).

Когда $\varphi \neq 0$, разность фаз θ между волнами, излучаемыми вторичными ис-
 точниками, расположенными по краям щели (от крайних точек щели M и N),
 равняется:

$$\theta = \frac{2\pi a \sin \varphi}{\lambda} \quad (2),$$

а результирующая амплитуда колебаний все равно A_0 , т. е. как будто бы волны
 от всех точек щели пришли в некоторую точку экрана без разности фаз (такой
 точкой является т. O (см. рис. 26), совпадающая с главным фокусом линзы L).



Если ширину полоски уменьшать $\Delta a \rightarrow 0$, то результат векторного сложения
 \vec{a}_i изобразится плавной кривой, имеющей форму дуги окружности радиуса R (см.
 рис. 28). Длина дуги $L = A'_0$, а соответствующий центральный угол - θ . Длина хор-
 ды этой дуги OO' равна модулю A_φ . Окружность описана радиусом R из т. H .
 Длина дуги равна радиусу, умноженному на угол, на который опирается эта дуга.

$$L = R \cdot \theta \rightarrow R = \frac{L}{\theta} = \frac{A'_0}{\theta} \quad (3)$$

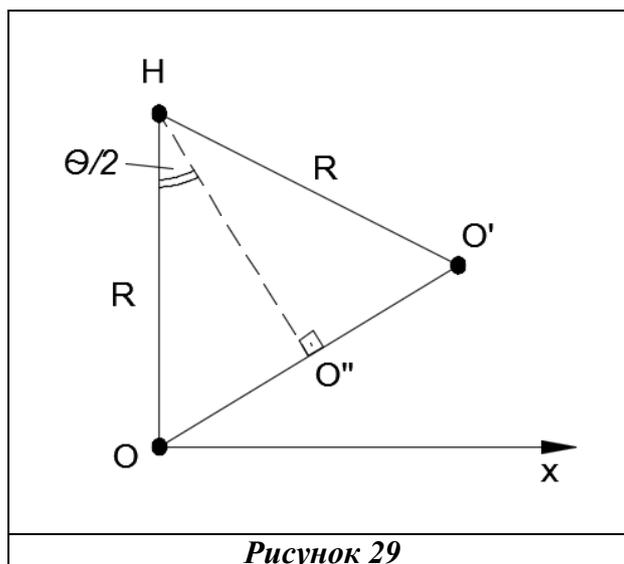


Рисунок 29

Чтобы рассчитать A_φ , опустим из т. Н перпендикуляр HO'' на OO' (см. рис. 29).

Хорда $OO' = 2OO''$. Из $\triangle HO''O$ выразим OO'' : $OO'' = R \sin \frac{\theta}{2}$.

Хорда $OO' = A_\varphi = 2R \sin \frac{\theta}{2}$, подставим R из (3),

$$A_\varphi = 2 \frac{A'_0}{\theta} \cdot \sin \frac{\theta}{2} = \frac{A'_0}{\theta/2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} = A'_0 \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\theta/2}$$

Интенсивность света $I_\varphi \sim A_\varphi^2$. Отношение интенсивности света, наблюдаемого в направлении, определяемом углом φ , к I_0 равно:

$$\frac{I_\varphi}{I_0} = \frac{A_0'^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{A_0'^2 \left(\frac{\theta}{2}\right)^2} = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}.$$

В задаче средний непрозрачный промежуток шириной b отсутствует, т. е. прозрачная щель имеет размер $a+b+c$.

Дано: $a = 5 \cdot 10^{-6}$ м; $b = 6 \cdot 10^{-6}$ м; $c = 7 \cdot 10^{-6}$ м; φ (угол дифракции) = $0,9^\circ$.

По формуле (2) рассчитаем угол θ в градусах и в радианах:

$$\theta^\circ = \frac{2\pi(a+b+c)\sin\varphi}{\lambda} = \frac{360^\circ(5+6+7) \cdot 10^{-6} \sin 0,9^\circ}{500 \cdot 10^{-9}} = 203,5^\circ;$$

$$\theta^{rad} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 18 \cdot 10^{-6} \cdot 0,0157}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 3,55 rad;$$

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \sin^2 \left(\frac{203,5^\circ}{2} \right) = \sin^2 101,8^\circ = 0,96;$$

$$\frac{\theta}{2} = \frac{3,55}{2} = 1,77(rad); \quad \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = (1,77)^2 = 3,15(rad)^2.$$

Теперь определим отношение интенсивности дифрагировавших волн под углом φ к интенсивности падающего света:

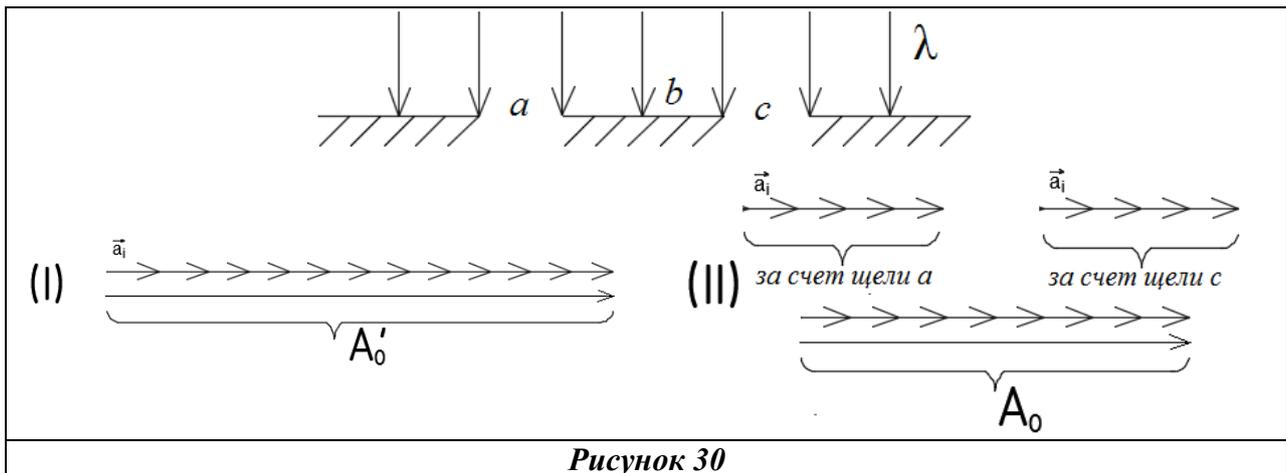
$$\frac{I_{\varphi}}{I_0'} = \frac{0,96}{3,15} = 0,3.$$

П. 7. Пусть I_0'' – интенсивность света, наблюдаемого в направлении первоначального распространения при наличии среднего непрозрачного промежутка шириной b . Найти отношение интенсивности света, наблюдаемого в этом случае в направлении угла φ , к I_0'' .

Теперь необходимо учесть то, что между двумя щелями шириной a и c есть непрозрачный участок шириной b . Представим графически амплитуды волн, дифрагировавших под углом $\varphi=0$ для случая (I) отсутствия непрозрачного участка и случая (II), когда он есть (рис. 30).

A_0' – амплитуда колебаний, когда прозрачная щель имеет размер $(a+b+c)$, т. е. это амплитуда падающей волны.

A_0 – амплитуда колебаний, когда прозрачная часть имеет размер $(a+c)$, это амплитуда волны дифрагировавшей под углом $\varphi=0$.



Видно, что амплитуды зависят от размера прозрачной части, а также от наличия непрозрачной части b . Отношения амплитуд:

$$\left. \begin{array}{l} A_0 \sim a + c \\ A_0' \sim a + b + c \end{array} \right\} \rightarrow \frac{A_0}{A_0'} = \frac{a + c}{a + b + c} \rightarrow A_0 = A_0' \frac{(5 + 7) \cdot 10^{-6}}{(5 + 6 + 7) \cdot 10^{-6}} = \frac{2}{3} A_0'.$$

Итак, амплитуда колебаний в направлении $\varphi=0$ – для двух щелей a и c меньше, чем когда они не разделены промежутком b , т. е. меньше, чем амплитуда падающей волны A_0' .

Рассчитаем амплитуду волны A_{φ} , дифрагировавшей под углом φ . Пусть $\varphi=0,9^{\circ}$.

Построим пунктиром дугу длиной A_0 и радиуса R , предварительно рассчитав центральный угол θ , на который опирается эта дуга (см. рис. 31).

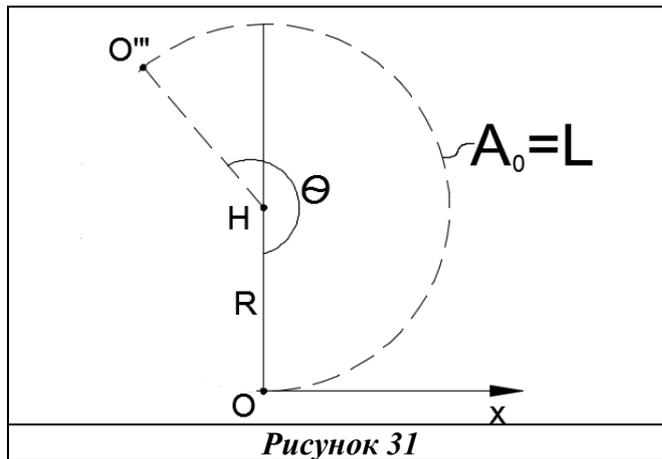


Рисунок 31

Прозрачная щель $(a+b+c)$ отвечает за разность хода $\Delta_{abc} = (a+b+c)\sin\varphi$.

Из пропорции:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda - 2\pi \\ \Delta_{abc} - \theta \end{array} \right\} \rightarrow \theta = \frac{2\pi \cdot \Delta_{abc}}{\lambda} = \frac{360^\circ \cdot (5+6+7) \cdot 10^{-6} \cdot 0,0157}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 203,5^\circ.$$

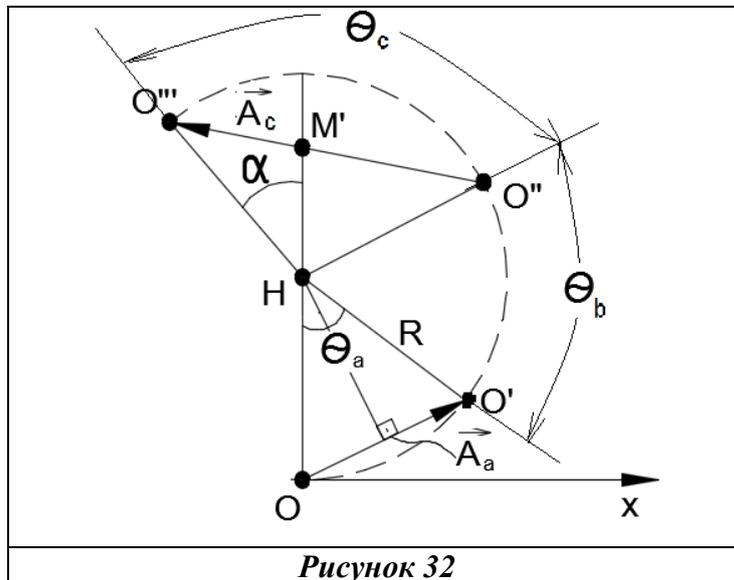


Рисунок 32

Зная длину дуги и угол θ , определим радиус этой дуги:

$$R = \frac{L}{\theta} = \frac{A_0}{\theta} = \frac{A_0}{3,55(\text{рад})}.$$

Щель a породит дугу (см. рис. 32), опирающуюся на угол θ_a , равный:

$$\theta_a = \frac{2\pi \cdot \Delta_a}{\lambda} = \frac{360^\circ \cdot 5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,0157}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 56,5^\circ.$$

Чтобы определить A_a амплитуду колебаний за счет щели a (на рисунке видно, что это хорда дуги радиуса R , опирающуюся на угол θ_a), воспользуемся аналогичными, как и в п.6, рассуждениями:

$$A_a = 2R \sin \frac{\theta_a}{2} = \frac{2A_0}{3,55} \cdot \sin \frac{56,5}{2} = \frac{2A_0}{3,55} \cdot \sin 28,2^\circ = 0,27 A_0.$$

По аналогии, для щели c : $\theta_c = \frac{2\pi \cdot \Delta_c}{\lambda} = \frac{360^\circ \cdot 7 \cdot 10^{-6} \cdot 0,0157}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 79,2^\circ$,

а амплитуда $A_c = \frac{2A_0}{\theta} \cdot \sin \frac{79,2^\circ}{2} = \frac{2A_0}{3,55} \cdot \sin 39,6^\circ = 0,36A_0$.

Чтобы отложить центральный угол $79,2^\circ$, нужно определить угол «пропуска», за счет b . Он составит: $\theta_b = \frac{2\pi \cdot \Delta_b}{\lambda} = \frac{360^\circ \cdot 7 \cdot 10^{-6} \cdot 0,0157}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 67,8^\circ$.

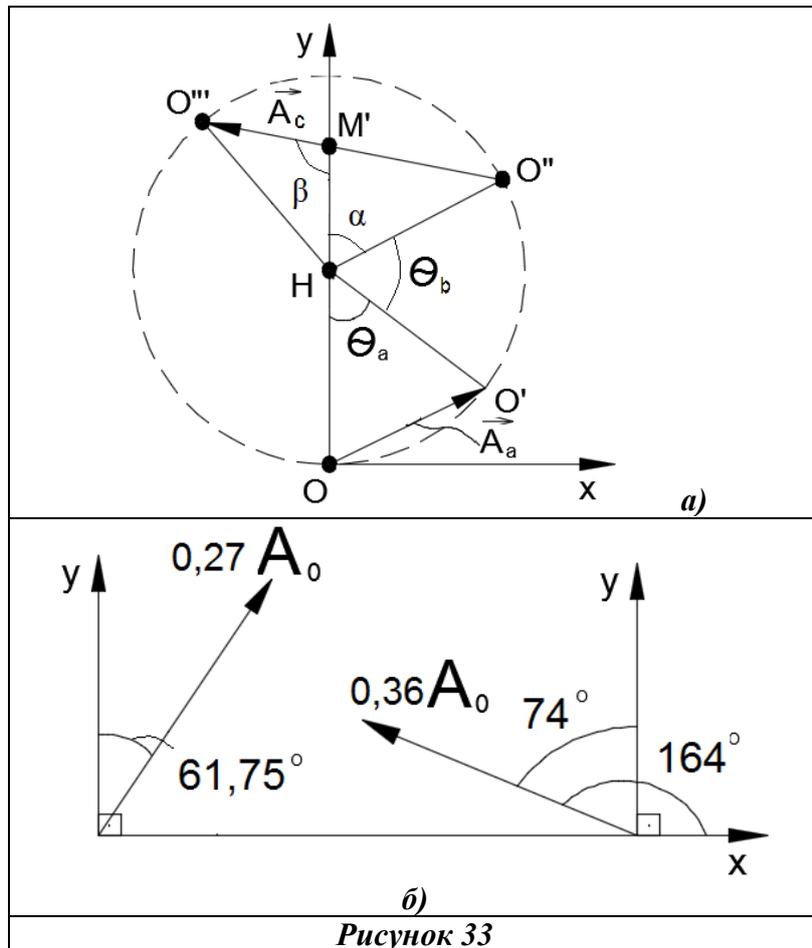


Рисунок 33

Поворачиваем радиус HO' на угол $67,8^\circ$ и ставим т. O'' (см. рис. 32). Начинаться вектор \vec{A}_c будет в т. O'' . Затем радиус HO'' повернем на угол $\theta_c = 79,2^\circ$ и поставим точку O''' . Чтобы рассчитать результирующую амплитуду $A_{рез}$ лучей от щелей a и c , дифрагировавших под углом $\varphi = 0,9^\circ$, найдем проекции \vec{A}_a и \vec{A}_c на оси Ox и Oy , просуммируем проекции амплитуд и воспользуемся теоремой Пифагора. $\triangle OHO'$ - равнобедренный (рис. 33а). $\angle HOO'$ есть угол между осью Oy и вектором \vec{A}_a . Этот угол равен: $\frac{180^\circ - \theta_a}{2} = \frac{180^\circ - 56,5^\circ}{2} = 61,75^\circ$.

$\triangle O''HO'''$ - равнобедренный. $\angle O''O'''H$ равен: $\frac{180^\circ - \theta_c}{2} = \frac{180^\circ - 79,2^\circ}{2} = 50,4^\circ$

$\angle OHO''$ равен: $\theta_a + \theta_b = 56,5^\circ + 67,8^\circ = 124,3^\circ$.

Угол α равен: $\alpha = 180^\circ - 124,3^\circ = 55,7^\circ$ (рис. 33а).

Угол $O'''HM'$ равен: $\theta_c - \alpha = 79,2^\circ - 55,7^\circ = 23,5^\circ$.

Следовательно, в $\Delta O'''HM'$ угол при т. M' равен: $\beta = 180^\circ - 50,4^\circ - 23,5^\circ = 106,1^\circ$.

Вектор \vec{A}_c составляет с осью Oy угол, равный $180^\circ - 106,1^\circ \approx 74^\circ$.

Рассмотрим рисунок 33б и определим проекции изображенных векторов на оси координат.

Проекция на ось Ox :	Проекция на ось Oy :
$0,27A_0 \sin 61,75^\circ = 0,238A_0$	$0,27A_0 \cos 61,75^\circ = 0,127A_0$
$0,36A_0 \cos 164^\circ = -0,346A_0$	$0,36A_0 \cos 74^\circ = 0,099A_0$
$\Sigma = -0,11A_0$	$\Sigma = 0,23A_0$

$$A_{рез} = A_0 \sqrt{(-0,11)^2 + 0,23^2} = 0,25A_0.$$

Т. к. $A_0 = \frac{2}{3}A'_0$, то $A_{рез} = 0,25 \frac{2}{3}A'_0 = 0,17A'_0$.

Отношение интенсивности света, наблюдаемого в направлении угла $\varphi = 0,9^\circ$, при наличии среднего непрозрачного участка к I''_0 равно:

$$\frac{I_\varphi}{I''_0} = \frac{kA_p^2}{kA_0'^2} = \frac{(0,17A'_0)^2}{A_0'^2} = 0,17^2 = 0,03.$$

П. 8. В одну из щелей (по Вашему выбору) вставляется пластинка из п.5. Найти те же отношения, что и в пп.6-7 в этом случае.

В щель c поместим пластинку толщиной $h=1$ мкм с показателем преломления $n=1,2$.

Пластинка «обеспечила» лучам от щели c дополнительную разность фаз.

$$\Delta\theta = \frac{2\pi h(n-1)}{\lambda} = \frac{360^\circ \cdot 1 \cdot 10^{-6} \cdot (1,2-1)}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 144^\circ$$

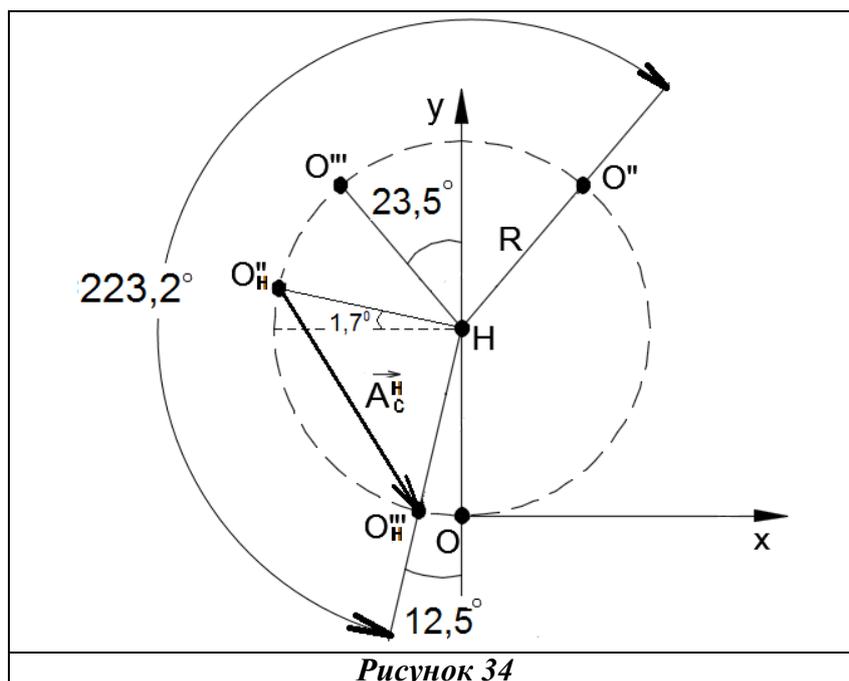


Рисунок 34

Геометрические построения выполним так: от радиусов HO'' и HO''' откладываем углы по 144° и ставим точки O'' и O''' соответственно (см. рис. 34). Хорда $O''O'''$ равна новой A_c'' , причем амплитуда результирующего колебания, вызванная (обусловленная) действием щели c не изменится, т. е. $A_c'' = A_c = 0,36A_0$. Эта хорда опирается на тот же угол $\theta_c = \angle O''HO''' = 79,2^\circ$.

Ориентация вектора \vec{A}_c'' на координатной плоскости xOy определяется углами, показанными на рисунке 35.

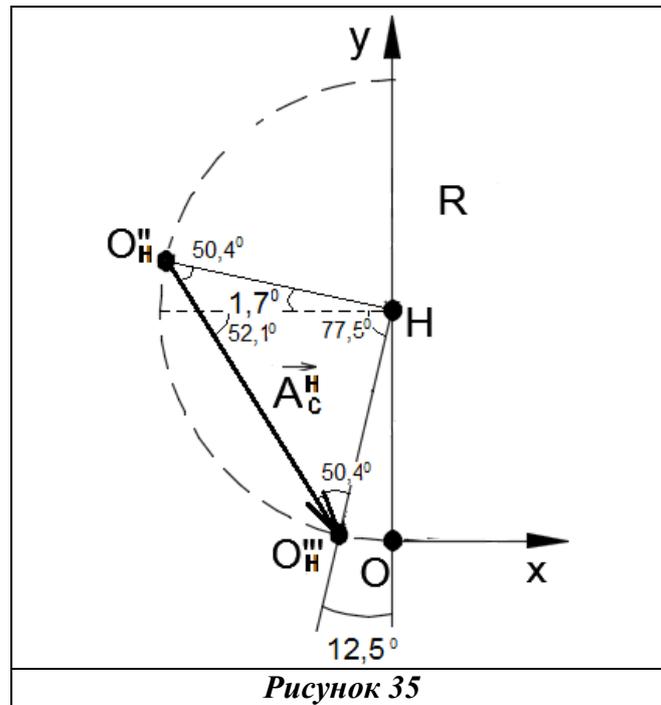


Рисунок 35

Проекция этого вектора на ось Ox : $0,36A_0 \cos 52,1^\circ = 0,22A_0$,
на ось Oy : $-0,36A_0 \sin 52,1^\circ = -0,284A_0$.

Изменений в \vec{A}_a и ее проекциях нет.

$$A_{рез}'' = A_0 \sqrt{(0,238 + 0,22)^2 + (0,127 - 0,284)^2} = 0,484A_0$$

$$\text{или } A_{рез}'' = 0,484 \cdot \frac{2}{3} A_0' = 0,323A_0'.$$

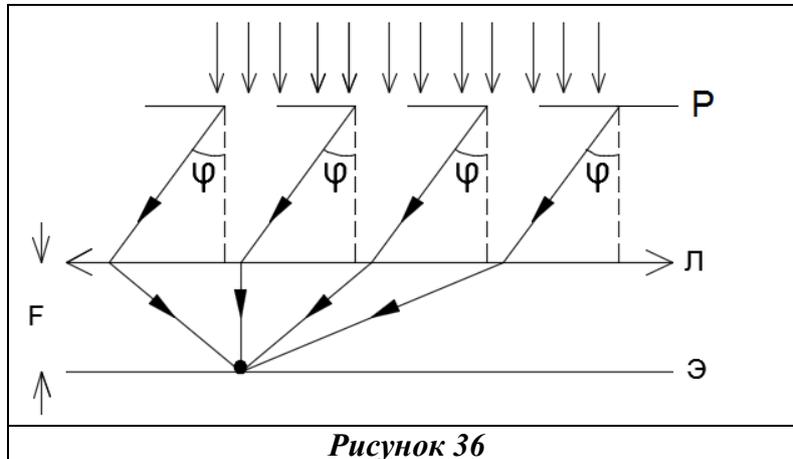
$$\text{Отношение интенсивностей света } \frac{I_{рез}''}{I_0''} = \frac{k(0,323A_0')^2}{kA_0'^2} = 0,323^2 = 0,1.$$

П. 9. На дифракционную решетку, содержащую n штрихов на 1 мм длины, падает нормально свет с длиной волны λ . Расстояние от решетки до экрана равно L . Найти общее число наблюдаемых максимумов и расстояние от центрального максимума до последнего наблюдаемого. Пусть на решетку падает белый свет с длинами волн в интервале $(450 \div 700)$ нм. Найти длину спектра второго порядка. Начиная со спектров каких порядков наблюдается их перекрытие?

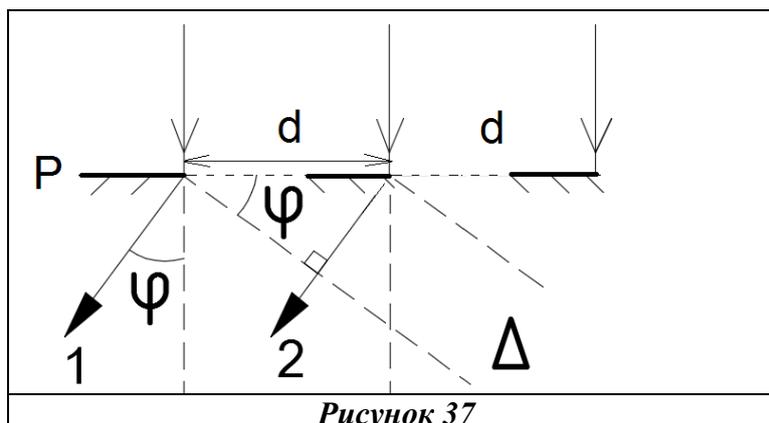
Дифракционная решетка: последовательность параллельных щелей шириной a , разделенных непрозрачными промежутками шириной b . Решетку характеризуют периодом d . Он равен суммарной ширине щели и непрозрачного про-

межутка $d=a+b$. В общем случае, если известна длина решетки l и общее число штрихов N , то период определяется: $d = \frac{l}{N}$ (м).

В задаче дано число штрихов 400 на мм: $d = \frac{1\text{мм}}{400} = \frac{10^{-3}\text{м}}{400} = 2,5 \cdot 10^{-6}\text{м}$.



Чтобы наблюдать дифракционную картину в параллельных лучах, падающих на решетку (рис. 36), за ней следует поместить линзу $Л$ с фокусным расстоянием F . Экран наблюдения от линзы находится на расстоянии F . Те углы дифракции φ , для которых волны от всех щелей усиливают друг друга, соответствуют главным максимумам. Благодаря периодичности решетки, достаточно найти условия, при которых волны от двух соседних щелей усиливают друг друга. Разность хода Δ двух лучей 1 и 2 от точек решетки, разделенных периодом, равна $\Delta = d \sin \varphi$ (рис. 37). Если разность хода равна целому числу длин волн, будет наблюдаться главный максимум. Итак, условие наблюдения главных максимумов $d \sin \varphi = m\lambda$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ называется порядком, λ – длина волны, d – период решетки.



Главный максимум с $m=0$ называется нулевым, или центральным. Он наблюдается на экране в точке O , лежащей на перпендикуляре к экрану, проведенному через центр собирающей линзы.

Справа и слева от центрального максимума находятся главные максимумы разных порядков.

Наибольший порядок спектра, который можно наблюдать, определяется условием $\varphi_{\max} < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\sin \varphi_{\max} = \frac{m_{\max} \cdot \lambda}{d}$ должно быть меньше 1, поэтому $m_{\max} < \frac{d}{\lambda}$. Пусть вы получили $m_{\max} < \frac{d}{\lambda} = 10,7$. Это значит, что можно наблюдать 10 порядков спектра, т. е. 10 главных максимумов: $m=1,2,\dots,10$ (от центрального).

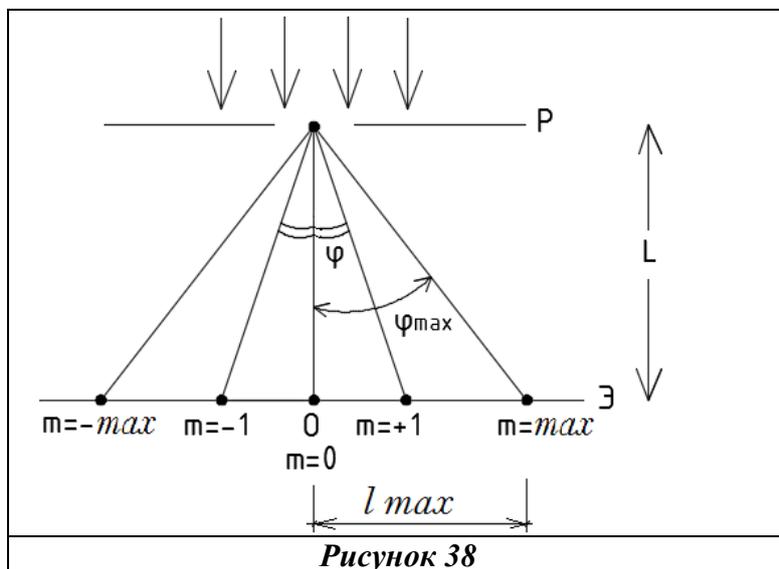


Рисунок 38

Главные максимумы расположены слева и справа от центрального, общее число максимумов $m_{\text{общ}} = 2m_{\text{max}} + 1$. Как сказано выше, линза не вносит изменений в разность хода дифрагированных лучей, поэтому ход лучей при дифракции на решетке P можно изобразить так, как на рисунке 38. Расстояние l_{max} на экране от центрального ($m=0$) до последнего наблюдаемого ($m = m_{\text{max}}$) можно определить: $l_{\text{max}} = L \cdot \text{tg} \varphi_{\text{max}}$, где L – расстояние от решетки до экрана.

Дано:

$$\lambda = 450 \text{ нм}$$

$$L = 1,1 \text{ м}$$

$$m = 2$$

$$n = 400 \text{ мм}^{-1}$$

$$\lambda_1 \div \lambda_2 = (450 \div 700) \text{ нм}$$

$$\text{Период решетки: } d = \frac{1 \text{ мм}}{400} = \frac{10^{-3} \text{ м}}{400} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}$$

$$m_{\text{max}} = \frac{d}{\lambda} = \frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{0,45 \cdot 10^{-6}} = 5,55$$

$$m_{\text{общ}} = 2 \cdot 5 + 1 = 11.$$

Из уравнения $d \sin \varphi_{\text{max}} = 5\lambda$ определяют угол φ_{max} , затем, зная $\text{tg} \varphi_{\text{max}}$ и расстояние от решетки до экрана L , рассчитывают l_{max} (от $m=0$ до $m=5$).

4) Зная $tg\varphi_5$, рассчитываем расстояние от центрального максимума до $m=5$, как последнего наблюдаемого.

По данным: $\sin\varphi_{\max} = 0,9 \rightarrow$ угол $\varphi_{\max} = 64,2^\circ \rightarrow tg\varphi_{\max} = 2,1$.

Расстояние $l_5 = L \cdot 2,1 = 1,1\text{ м} \cdot 2,1 = 2,3\text{ м}$.

В тексте заданы $\lambda_1 = 450\text{ нм}$ и $\lambda_2 = 700\text{ нм}$.

Перекрытие означает: под одним и тем же углом дифракции φ идут лучи этих волн, давая для одной волны K -й порядок, а для другой $K+1$ порядок.

$$(K+1)\lambda_1 = K\lambda_2 \rightarrow K\lambda_1 + \lambda_1 = K\lambda_2 \rightarrow K(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_1$$

$$K = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{450}{700 - 450} = \frac{450}{250} = \frac{9}{5} = 1,8$$

Перекрытие спектров начинается со спектров второго порядка. Для нахождения длины спектра второго порядка записываем условие максимума и для λ_1 и для λ_2 :

$$d \sin\varphi_1 = 2\lambda_1 \rightarrow \sin\varphi_1 = \frac{2\lambda_1}{d} = \frac{2 \cdot 450 \cdot 10^{-9}}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 0,36,$$

$$d \sin\varphi_2 = 2\lambda_2 \rightarrow \sin\varphi_2 = \frac{2\lambda_2}{d} = \frac{2 \cdot 700 \cdot 10^{-9}}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 0,56,$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin\varphi_1 = tg\varphi_1 = \frac{l_1}{L} \\ \sin\varphi_2 = tg\varphi_2 = \frac{l_2}{L} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{0,36}{0,56} = 0,64,$$

$$l_2 = \frac{l_1}{0,64}, \quad \Delta l = l_2 - l_1 = \frac{l_1}{0,64} - l_1 = 0,56l_1$$

Длина спектра второго порядка $\Delta l = 0,56l_1$

$$l_1 = L tg\varphi_1 = L \sin\varphi_1 = 1,1 \cdot 0,36 = 0,4(\text{ м})$$

$$\Delta l = 0,56 \cdot 0,4 = 0,22\text{ м}$$

П. 10. Выполнить задание п. 9 при падении света под углом α к нормали к решетке (рис. 39).

Условие наблюдения максимума запишется $d(\sin\varphi - \sin\alpha) = m\lambda$, где φ – угол дифракции. Период $d = 2,5 \cdot 10^{-6}\text{ м}$.

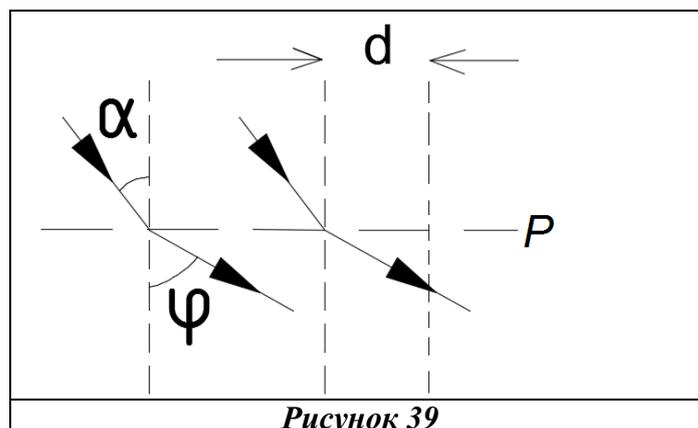


Рисунок 39

Найти наибольший порядок спектра m_{\max} .

$$\alpha = 30^\circ; \sin \alpha = 0,5; \lambda = 500 \text{ нм}; \sin \varphi_{\max} = 1; d(1 - 0,5) = m_{\max} \lambda \rightarrow m_{\max} = \frac{d \cdot 0,5}{\lambda}$$

$$m_{\max} = \frac{2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5}{0,5 \cdot 10^{-6}} = 2,5.$$

Ответ $m_{\max} = 2$.

Общее число наблюдаемых максимумов: $m_{\text{общ}} = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

Последний наблюдаемый максимум $m=2$. Найдём $\sin \varphi_{\max 2}$ и сам угол:

$$d \sin \varphi_{\max 2} - d \sin \alpha = m \lambda \rightarrow \sin \varphi_{\max 2} = \frac{m \lambda + d \sin \alpha}{d} \rightarrow$$

$$\sin \varphi_{\max 2} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} + 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5}{2,5 \cdot 10^{-6}} = \frac{1 + 1,25}{2,5} = \frac{2,25}{2,5} = 0,9 \rightarrow$$

$$\varphi_{\max 2} = 71,3^\circ \rightarrow \text{tg} \varphi_{\max 2} = 2,06.$$

Расстояние от центрального максимума до максимума $m=2$ (последнего наблюдаемого).

$$l = L \cdot \text{tg} \varphi_{\max 2} = 1,1 \cdot 2,06 = 2,27 \text{ (м)}$$

Найти длину спектра второго порядка $m=2$; (угол дифракции φ_1 для λ_1 и φ_2 для λ_2).

$$d(\sin \varphi_1 - \sin \alpha) = 2 \lambda_1 \rightarrow \sin \varphi_1 = \frac{2 \lambda_1 + d \sin \alpha}{d},$$

$$d(\sin \varphi_2 - \sin \alpha) = 2 \lambda_2 \rightarrow \sin \varphi_2 = \frac{2 \lambda_2 + d \sin \alpha}{d},$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{2 \cdot 0,45 \cdot 10^{-6} + 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 0,86 \rightarrow$$

$$\varphi_1 = 65,9^\circ, \quad \text{tg} \varphi_1 = 1,69.$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{2 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6} + 2,5 \cdot 10^{-6} \cdot 0,5}{2,5 \cdot 10^{-6}} = 1,06 > 1, \text{ чего быть не может.}$$

Длину спектра $m=2$ при косом под $\angle 30^\circ$ падении света на решетку определить невозможно.

Учебное издание

Составители:

*Величко Любовь Алексеевна
Чугунов Сергей Владимирович
Чугунова Элеонора Валерьевна*

Методические указания по разделу
**«Волновая оптика:
дифракция Френеля и Фраунгофера»**

Ответственный за выпуск: Чугунов С.В.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 13.06.2018 г. Формат 60x84 ¹/₁₆. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 1,86. Уч. изд. л. 2,0. Заказ № 744. Тираж 25 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.