2. Size dependence of second-harmonic generation at the surface of microspheres / S. Viarbitskaya [et al.] // Physical Review A. – 2010. –Vol. 81. – P. 53–85.

УДК 51:004.02

Е.Н. ШВЫЧКИНА, Р.С. ВАЦКЕЛЬ
Брест, БрГТУ

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ТРЕХУРОВНЕВОЙ МОДЕЛИ ХЕМОСТАТА

В работах [1–3] рассматривается модель конкуренции, которая осуществляется по принципу, в котором «хищник» потребляет «жертву», а она потребляет субстрат. Такое взаимодействие между микроорганизмами длинной пищевой цепочки описывается системой третьего порядка нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} s'(t) &= 1 - s(t) - \frac{m_1 x(t) s(t)}{a_1 + s(t)}, \\ x'(t) &= \left(\frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 - \frac{m_2 y(t)}{a_2 + x(t)} \right) x(t), \\ y'(t) &= \left(\frac{m_2 x(t)}{a_2 + x(t)} - 1 \right) y(t), \end{aligned} \tag{1}$$

$$s(0) = s_0 \geq 0,\ x(0) = x_0 \geq 0,\ y(0) = y_0 \geq 0, \tag{2}$$

где $s(t)$ обозначает плотность питательного субстрата; $x(t)$, $y(t)$ – плотности микроорганизмов в момент времени t; константы m_1, m_2 и a_1, a_2 имеют определенный биологический смысл [1].

В работе [3] представлена программная реализация теоретического метогда рассмотренного в работах авторов H.L. Smith, P. Waltman [1] и др. В [3] построен программный модуль, который осуществляет визуализацию и численное моделирование решений дифференциальной системы (1)–(2) для разных значений биологических параметров a_1, a_2, m_1, m_2 и начальных условий $x(0)$, $y(0)$. Используя эти исследования, покажем устойчивость решений $x(t)$, $y(t)$ относительно положений равновесия системы.

Рассмотрим следующие значения биологических параметров

$$a_1 = 0,3,\ a_2 = 0,9,\ \ m_1 = 6, m_2 = 5. \tag{3}$$

Для такого набора значений внутренняя локальная устойчивая точка имеет координаты $E(0{,}23, 0{,}46)$. Фазовая траектория приведена на рисунке 1.

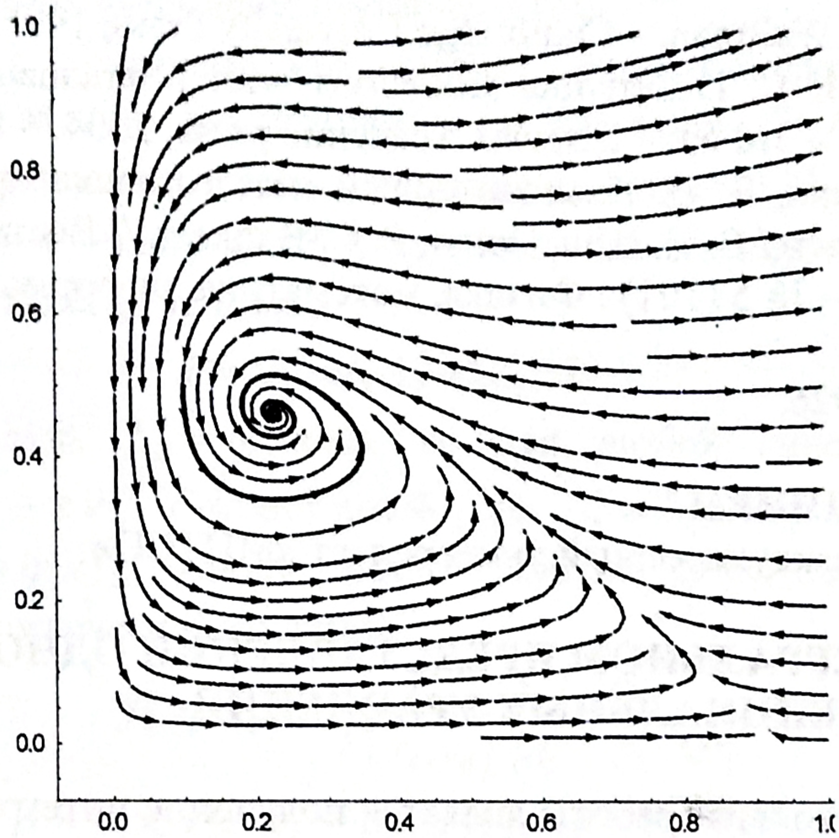

Рисунок 1 – Фазовая плоскость системы (1)–(2) для значений параметров (3)

Построим графики функций $x(t)$, $y(t)$ для различных начальных условий $x(0)$, $y(0)$ (рисунок 2). Легко можно убедиться, что решения $x(t)$ и $y(t)$ стремятся к значениям 0,23 и 0,46 соответственно.

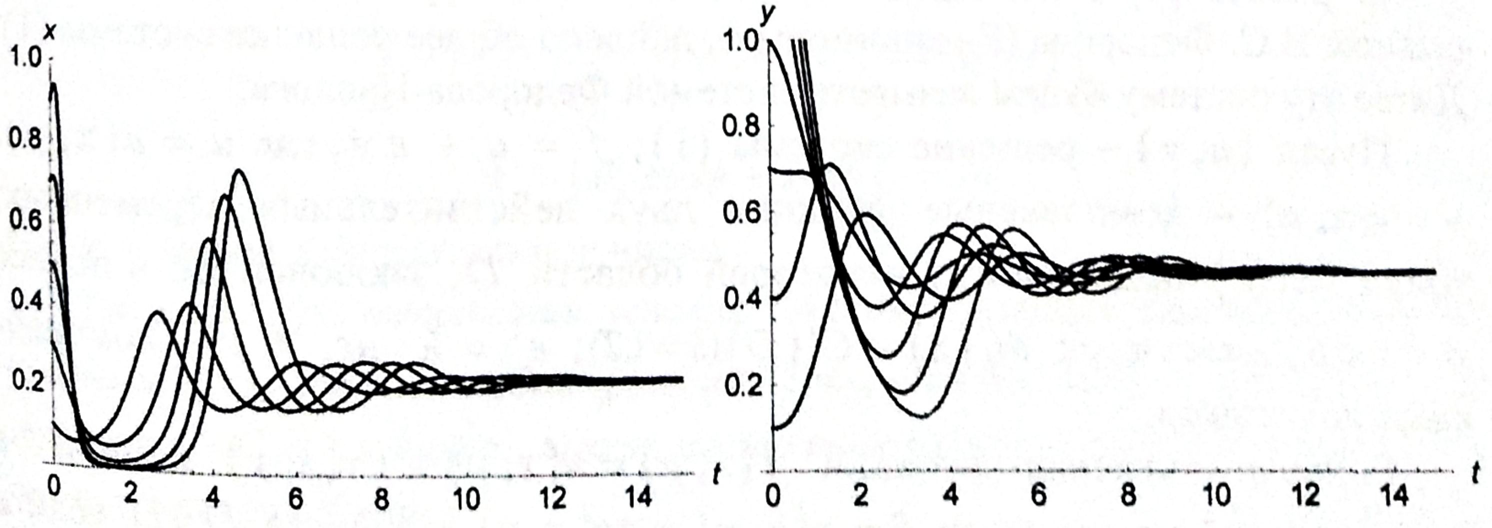

Рисунок 2 – Графики численных решений функций *x(t)* и *y(t)*

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smith, H. L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H. L. Smith, P. Waltman. – Cambridge University Press, 1995. – 313 p.

2. Abell, M. L. Differential Equations with Mathematica / M. L. Abell, J. P. Braselton. – 3rd ed. – Elsevier Academic press, 2004. – 876 p.

3. Швычкина, Е. Н. Компьютерный метод поиска предельных циклов хемостат-модели / Е. Н. Швычкина, Р. С. Вацкель // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. – 2016. – № 5 (101) : Физика, математика, информатика. – С. 56–60.

УДК 517.926

В.А. ШИЛИНЕЦ
Минск, Международный университет «МИТСО»

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Целью настоящей работы является получение интегрального представления решений следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных, обобщающей известную систему Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M_1(x)\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda M_2(x)\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} = M_2(x)\frac{\partial u}{\partial y} + (M_1(x) + \mu M_2(x))\frac{\partial v}{\partial y}, \quad (1)$$

где λ, μ – известные комплексные константы; $M_1(x)$, $M_2(x)$ – известные функции от x, непрерывные для $a < x < b$.

В работе [1] с помощью гиперкомплексных функций, моногенных в смысле В.С. Федорова (F-моногенных), найдено общее решение системы (1). Далее эту систему будем называть системой Федорова-Павлова.

Пусть (u, v) – решение системы (1); $f = u + \varepsilon v$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ – комплексные функции двух действительных переменных; точка (x, y) принадлежит некоторой области D, заключенной в полосе $a < x < b$, $-\infty < y < +\infty$; $M_k(x) \in C^1(D)(k = 1,2)$; $\varepsilon^2 = \lambda + \mu\varepsilon$, λ, μ – комплексные константы.

Гиперкомплексная функция $f(x, y) = u(x, y) + \varepsilon v(x, y)$ называется F-моногенной по функции $\zeta = p(x, y) + \varepsilon q(x, y)$ в области D [2], если в каждой точке области D выполняется условие $f_x \cdot \zeta_y = f_y \cdot \zeta_x$.

Здесь $\varepsilon^2 = \lambda + \varepsilon\mu$; λ, μ – комплексные константы; u, v, p, q – комплексные или действительные функции класса $C^1(D)$.