УДК 517.946

А.И. БАСИК, Т.В. КОПАЙЦЕВА
Брест, БрГУ имени А.С. Пушкина

ОБ ИНДЕКСЕ ОДНОГО КЛАССА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРЫ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА НА ПЛОСКОСТИ

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ – ограниченная односвязная область, границей которой является гладкая кривая Ляпунова $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу отыскания решения $u(x) = (u_1(x),\ u_2(x)) \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(x = (x_1, x_2) \in \Omega)$ пары уравнений Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ \Delta u_2 = 0, \end{cases} \tag{1}$$

удовлетворяющей на границе $\partial\Omega$ краевым условиям

$$\begin{gathered} (au_1 + bu_2)\big|_{\partial\Omega} = f_1, \\ \left(c\frac{\partial u_1}{\partial \nu} + d\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right)\Bigg|_{\partial\Omega} = f_2. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $f_1, f_2 : \partial\Omega \to \mathbf{R}$ – заданные непрерывные по Гельдеру функции; a, b, c и d – действительные числа.

В работе выводится условие регуляризуемости задачи (1), (2) и вычисляется индекс регуляризуемой задачи.

Для задачи (1), (2) условие регуляризуемости состоит в том, что в каждой точке $y \in \partial\Omega$ и при каждом единичном векторе τ, касательном к $\partial\Omega$ в точке y, ранг матрицы Я.Б. Лопатинского

$$L(y,\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} B(y, \lambda\nu + \tau)\mathrm{A}^{-1}(y, \lambda\nu + \tau)(E, \lambda E)d\lambda, \tag{3}$$

является максимальным, т.е. равным двум. В формуле (3): $A(\xi)$ – характеристическая матрица системы (1); B – символ старшей части граничного оператора (2); E – единичная матрица размерности 2×2; ν – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке y; Γ – простой замкнутый контур, лежащий в верхней λ-полуплоскости и охватывающий находящиеся там λ-корни уравн ения $\det A(y, \lambda\nu + \tau) = 0$.

Отметим, что выполнение условия регуляризуемости обеспечивает нетеровость краевой задачи, как в классических пространствах, так и в широком классе гильбертовых пространств [1].

Теорема 1. *Задача* (1), (2) *регуляризуема тогда и только тогда, когда* $ad - bc \neq 0$.

◄ Непосредственные вычисления показывают, что матрица Лопатинского задачи (1), (2) в произвольной точке $y \in \partial\Omega$ и произвольном векторе $\tau \in T_y\partial\Omega$ имеет вид

$$L(y,\tau) = \begin{bmatrix} \frac{a}{2i} & \frac{b}{2i} & \frac{a}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{c}{2} & \frac{d}{2} & \frac{-c}{2i} & \frac{-d}{2i} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Если $ad - bc \neq 0$, то минор, образованный первым и вторым столбцами матрицы (5), отличен от нуля. Следовательно, ранг матрицы $L(y,\tau)$ равен 2.

Обратно, если $ad - bc = 0$, то строки матрицы (5) пропорциональны и, следовательно, ее ранг не является максимальным. ►

При выполнении условия теоремы 1, задача (1), (2) является регуляризуемой. Это означает, что однородная задача (1), (2) имеет α линейных независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнение β линейно независимых условий разрешимости. Число $\alpha - \beta$ называется индексом задачи (1), (2). Известно, что индекс является гомотопически устойчивым [2, с. 325]. Вычисление индекса проведем методом гомотопий.

Напомним, что две задачи вида (1), (2) называются гомотопными, если существует непрерывная деформация одной задачи в другую, не нарушающая условия Лопатинского.

Теорема 2. *Индекс регуляризуемой задачи* (1), (2) *равен нулю.*

◄ Для определенности будем считать, что $ad - bc > 0$.

Рассмотрим семейство задач, для системы (1) матрица граничных операторов которой имеет вид

$$B_t\left(y, \frac{\partial}{\partial\nu}\right) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 t & tb_1 + b_2 \\ (tb_1 - b_2)\frac{\partial}{\partial\nu} & (a_1 - a_2 t)\frac{\partial}{\partial\nu} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где

$$a_1 = \frac{a+d}{2},\ a_2 = \frac{a-d}{2},\ d_1 = \frac{b+c}{2},\ d_2 = \frac{b-c}{2}.$$

Поскольку при каждом $t \in [0,1]$ выполняется

$$a_1^2 - a_2^2 t - t^2 b_1^2 + b_2^2 \geq a_1^2 - a_2^2 - b_1^2 + b_2^2 = ad - bc > 0,$$

то задача для системы (1) с граничным оператором (6) является регуляризуемой.

При $t=1$ получим исходную задачу, а при $t=0$ – задачу с граничным оператором

$$\dot{B}_0\left(y,\frac{\partial}{\partial \nu}\right)=\begin{bmatrix} a_1 & b_2 \\ -b_2\dfrac{\partial}{\partial \nu} & a_1\dfrac{\partial}{\partial \nu}\end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Гомотопия

$$C_t\left(y,\frac{\partial}{\partial \nu}\right)=\left(\sqrt{a_1^2+b_2^2}\right)^t\begin{bmatrix} \cos(t\phi) & \sin(t\phi) \\ -\sin(t\phi)\dfrac{\partial}{\partial \nu} & \cos(t\phi)\dfrac{\partial}{\partial \nu}\end{bmatrix}, \qquad (8)$$

где

$$\cos\varphi=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}},\ \sin\varphi=\frac{b_2}{\sqrt{a_1^2+b_2^2}},$$

сводит задачу (1), (7) к задаче (1) с граничным оператором

$$C_0\left(y,\frac{\partial}{\partial \nu}\right)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial \nu}\end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Вычислим индекс задачи (1), (9). Однородная задача имеет одно линейно независимое решение

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1\end{bmatrix},$$

а для разрешимости неоднородной задачи требуется выполнение условия:

$$\int\limits_{\partial\Omega} f_2(y)ds=0.$$

Таким образом, индекс задачи (1), (9) равен нулю.

Случай $ad-bc<0$ рассматривается аналогично. ▶

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович, М. С. Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы / М. С. Агранович // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, вып. 5. – С. 3–120.

2. Антоневич, А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения : учебник / А. Б. Антоневич, Я. В. Радыно. – 2-е изд., перераб. и доп. – Минск : БГУ, 2003. – 430 с.