

Тарасюк Н.П., Луценко Е.В., Гладыщук А.А.

## ФАКТОР ОПТИЧЕСКОГО ОГРАНИЧЕНИЯ ГЕТЕРОСТРУКТУР ZnMgCdSSe С ВАРИЗОННЫМ ВОЛНОВОДОМ И ШИРОКИМ ВЕРХНИМ ОБКЛАДОЧНЫМ СЛОЕМ ZnMgSSe ДЛЯ ОПТИЧЕСКИ НАКАЧИВАЕМЫХ ЛАЗЕРОВ

**Введение.** Полупроводниковые лазеры на основе гетероструктур ZnMgCdSSe, излучающие в зеленой области спектра могут применяться в системах локальной оптической связи, лазерной локации и навигации, подводной связи, системах проекционного лазерного телевидения, лазерной печати, а также в других прикладных задачах.

Для создания низкопороговых лазеров с оптической накачкой необходима оптимизация конструкции лазерной гетероструктуры с активной областью из вставок квантовых точек (КТ) ZnCdSe.

В настоящей работе представлены результаты расчетов фактора оптического ограничения для квантоворазмерных гетероструктур ZnMgCdSSe с активной областью, содержащей одну, две, три, пять, семь и девять вставок КТ ZnCdSe. Предложен дизайн гетероструктур с варизонным волноводом и широким верхним обкладочным слоем ZnMgSSe. Проведено сравнение фактора оптического ограничения и удельного фактора оптического ограничения для гетероструктур с варизонным волноводом.

**Расчет фактора оптического ограничения.** Для моделирования фактора оптического ограничения гетероструктур была использована модель одномерной планарной структуры.

Вычисления фактора оптического ограничения были проведены в приближении плоских волн для ТЕ поляризации излучения [1–3]. Напряженность электрического поля в  $j$ -ом слое структуры представляется в виде:

$$\epsilon_y(x, z, t) = \epsilon_{y,j}(x) \exp[i(\omega t - \beta z)].$$

Амплитуда напряженности электрического поля  $\epsilon_{y,j}(x)$  удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{y,j}(x)}{\partial x^2} - (\beta^2 - k_0^2 \tilde{n}_j^2) \epsilon_{y,j}(x) = 0,$$

где  $\beta$  – проекция волнового вектора  $k_0$  на плоскость гетероструктуры,  $\tilde{n}_j$  – комплексный показатель преломления  $j$ -го слоя.

Для нахождения  $\beta$  использовался алгоритм скоростного спуска [1]. Фактор оптического ограничения вычислялся по формуле [4]:

$$\Gamma = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{x_{bi}}{x_{ai}} \int E_y^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} E_y^2(x) dx},$$

где интегрирование в числителе происходит по координатам слоев КТ ZnCdSe.

**Результаты расчетов и их обсуждение.** Для предварительной оптимизации по фактору оптического ограничения были выбраны гетероструктуры без активной области. Профиль показателя преломления данных гетероструктур приведен на рисунке 1.

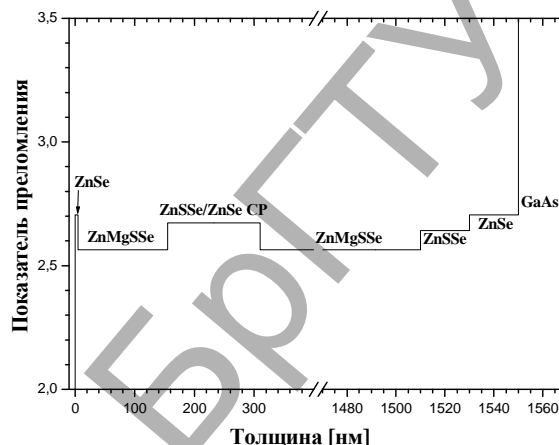


Рис. 1. Профиль показателя преломления гетероструктуры

Оптимизация удельного фактора оптического ограничения (значение фактора оптического ограничения на один нанометр в волноводной области) проводилась в зависимости от толщин верхнего обкладочного слоя ZnMgSSe и волноводного слоя, образованного сверхрешеткой (CP) ZnSSe/ZnSe для обеспечения эффективного транспорта неравновесных носителей заряда в активную область. Толщина слоя ZnMgSSe возле подложки равна 1200 нм. Ширина запрещенной зоны ZnMgSSe выбиралась из положения пика фотолюминесценции и варьировалась в пределах 2.92–2.99 эВ. Значения показателей преломления соединений были взяты из работ [5, 6]. Результаты оптимизации показаны на рисунках 2–9 и таблице 1.

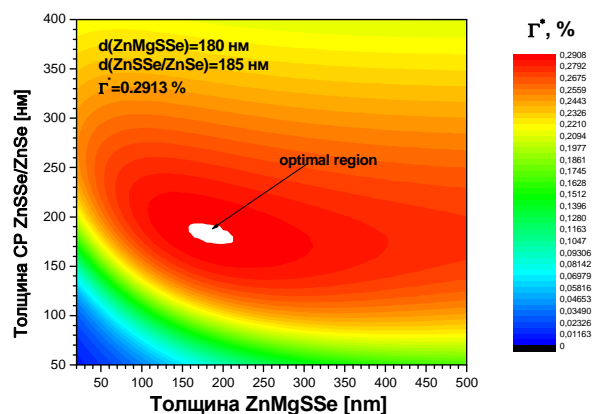


Рис. 2. Зависимость удельного фактора оптического ограничения от толщин обкладочного слоя ZnMgSSe и CP ZnSSe/ZnSe. Ширина запрещенной зоны ZnMgSSe равна 2.92 эВ

Луценко Евгений Викторович, к. физ.-мат.н., ст. научный сотрудник Института физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси.

Тарасюк Николай Петрович, доцент кафедры физики Брестского государственного технического университета.

Гладыщук Анатолий Антонович, к. физ.-мат.н., зав. кафедрой физики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

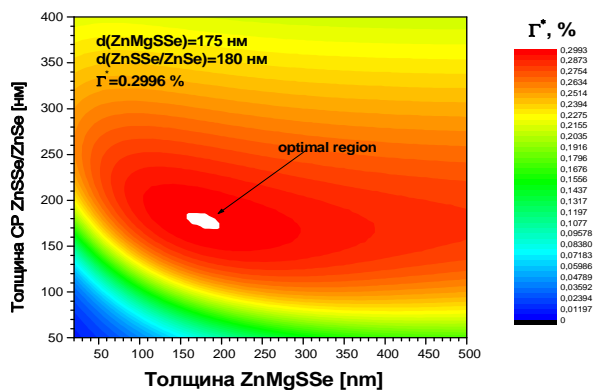


Рис. 3. Зависимость удельного фактора оптического ограничения от толщин обкладочного слоя ZnMgSSe и CP ZnSSe/ZnSe. Ширина запрещенной зоны ZnMgSSe равна 2.93 eV

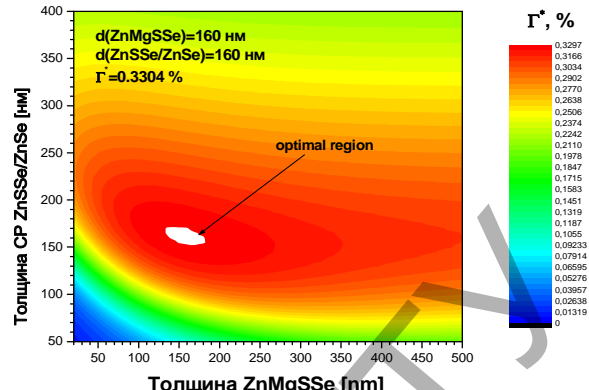


Рис. 7. Зависимость удельного фактора оптического ограничения от толщин обкладочного слоя ZnMgSSe и CP ZnSSe/ZnSe. Ширина запрещенной зоны ZnMgSSe равна 2.97 eV

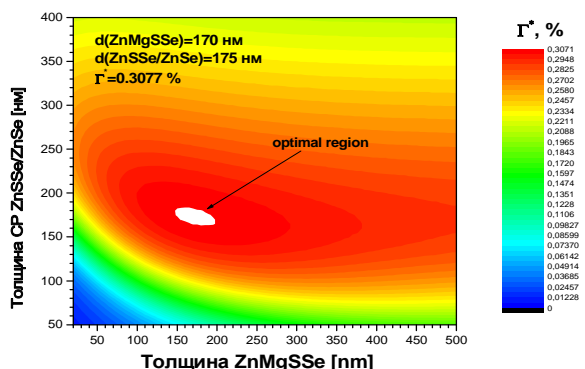


Рис. 4. Зависимость удельного фактора оптического ограничения от толщин обкладочного слоя ZnMgSSe и CP ZnSSe/ZnSe. Ширина запрещенной зоны ZnMgSSe равна 2.94 eV

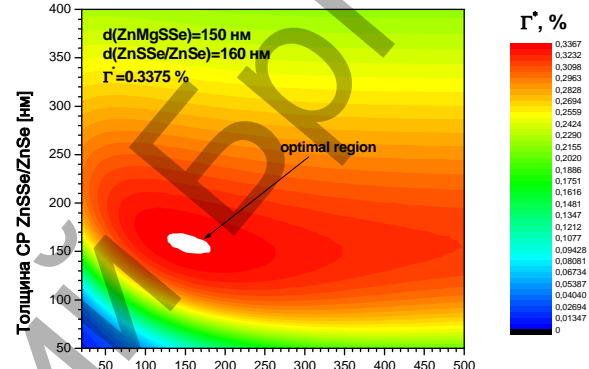


Рис. 8. Зависимость удельного фактора оптического ограничения от толщин обкладочного слоя ZnMgSSe и CP ZnSSe/ZnSe. Ширина запрещенной зоны ZnMgSSe равна 2.98 eV

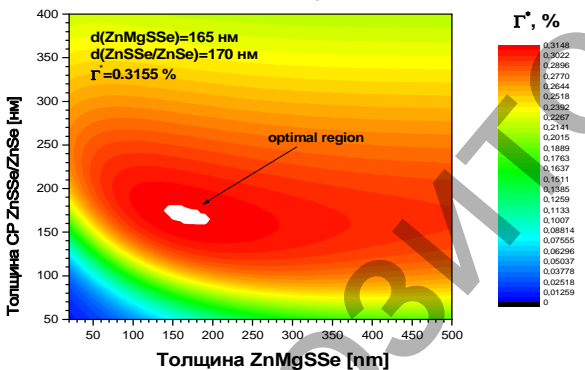


Рис. 5. Зависимость удельного фактора оптического ограничения от толщин обкладочного слоя ZnMgSSe и CP ZnSSe/ZnSe. Ширина запрещенной зоны ZnMgSSe равна 2.95 eV

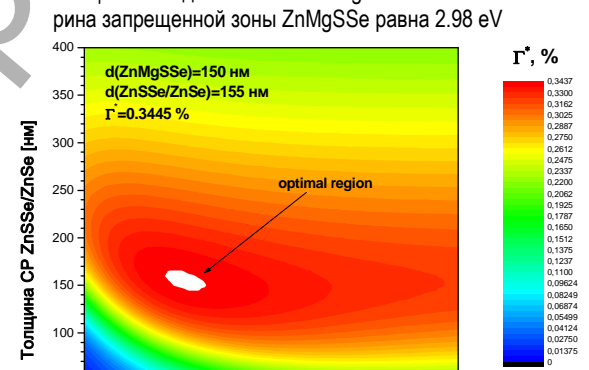


Рис. 9. Зависимость удельного фактора оптического ограничения от толщин обкладочного слоя ZnMgSSe и CP ZnSSe/ZnSe. Ширина запрещенной зоны ZnMgSSe равна 2.99 eV

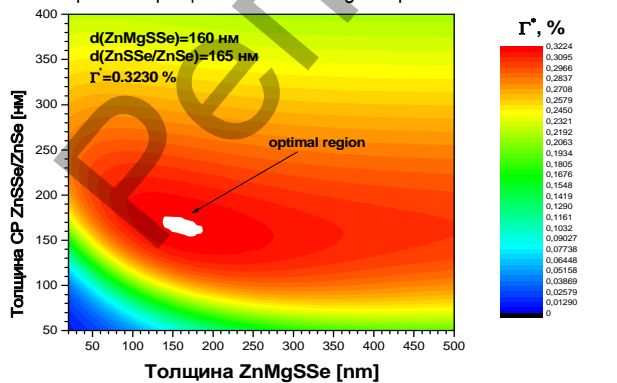


Рис. 6. Зависимость удельного фактора оптического ограничения от толщин обкладочного слоя ZnMgSSe и CP ZnSSe/ZnSe. Ширина запрещенной зоны ZnMgSSe равна 2.96 eV

Таблица 1. Значения максимального удельного фактора оптического ограничения  $\Gamma^*$  в зависимости от толщин обкладочного слоя ZnMgSSe и CP ZnSSe/ZnSe при различных значениях ширины запрещенной зоны ZnMgSSe

$E_g(\text{ZnMgSSe}), \text{эВ}$	$d(\text{ZnMgSSe}), \text{нм}$	$d(\text{ZnSSe/ZnSe}), \text{нм}$	$\Gamma^*, \%$
2.92	180	185	0.2913
2.93	175	180	0.2996
2.94	170	175	0.3077
2.95	165	170	0.3155
2.96	160	165	0.3230
2.97	160	160	0.3304
2.98	150	160	0.3375
2.99	150	155	0.3445

Из таблицы 1 видно, что значения максимального удельного фактора оптического ограничения увеличиваются с увеличением ширины запрещенной зоны ZnMgSSe. При ширине запрещенной зоны 2.99 эВ удельный фактор оптического ограничения в 1.2 раза больше, чем при 2.92 эВ. При этом толщины слоев ZnMgSSe и CP ZnSSe/ZnSe уменьшаются на 30 нм с увеличением ширины запрещенной зоны четвертого соединения от 2.92 эВ до 2.99 эВ.

На основе проведенных расчетов были выбраны структуры с толщиной верхнего обкладочного слоя ZnMgSSe равной 150 нм вместо 20 нм, используемой в раннее проведенных расчетах. Это позволит уменьшить влияние поверхности гетероструктуры на активную область. Данные структуры содержат одну, две, три, пять, семь и девять вставок КТ ZnCdSe, толщиной 2 нм каждая. В структурах, содержащих более одной вставки КТ ZnCdSe, они разделены узким слоем ZnSSe, толщиной 3 нм. Этот слой применяется для снятия механического напряжения, вызываемого вставками КТ ZnCdSe. Ширина запрещенной зоны четвертого соединения ZnMgSSe во всех исследуемых гетероструктурах была выбрана 2.99 эВ. Структуры дизайна А, В и С отличаются лишь конструкцией волноводной области.

**Структуры дизайна А.** В гетероструктурах дизайна А волновод образован CP ZnSSe/ZnSe. Схемы профилей показателя преломления гетероструктур представлены на рисунке 10.

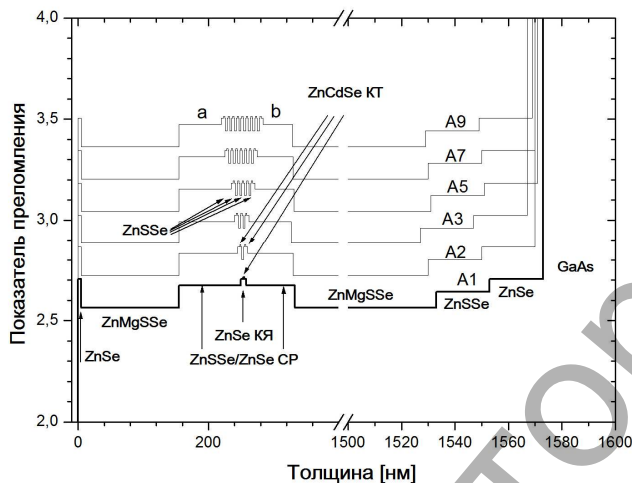


Рис. 10. Профили показателя преломления гетероструктур дизайна А, содержащие различное количество вставок КТ ZnCdSe

Для данных структур проведен анализ фактора оптического ограничения  $\Gamma$  в зависимости от верхнего (а) и нижнего (b) волноводных слоев CP ZnSSe/ZnSe. При оптимальной толщине CP ZnSSe/ZnSe рассчитан удельный фактор оптического ограничения. Результаты расчетов приведены в таблице 2 и на рисунках 11–17.

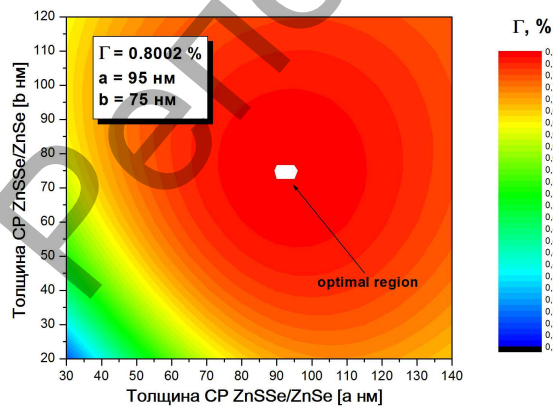


Рис. 11. Зависимость фактора оптического ограничения от толщин CP ZnSSe/ZnSe гетероструктуры с одной вставкой КТ ZnCdSe

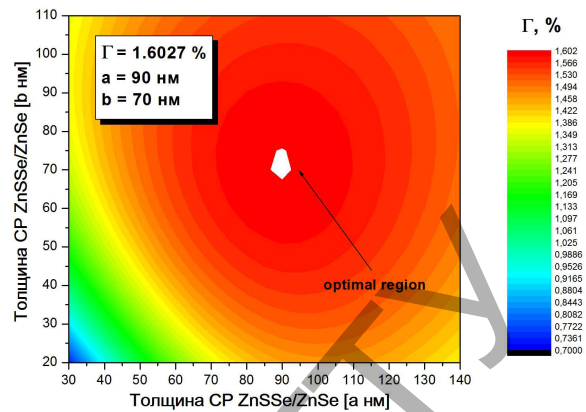


Рис. 12. Зависимость фактора оптического ограничения от толщин CP ZnSSe/ZnSe гетероструктуры с двумя вставками КТ ZnCdSe

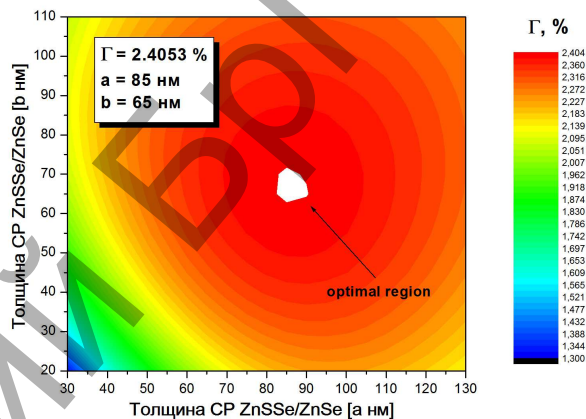


Рис. 13. Зависимость фактора оптического ограничения от толщин CP ZnSSe/ZnSe гетероструктуры с тремя вставками КТ ZnCdSe

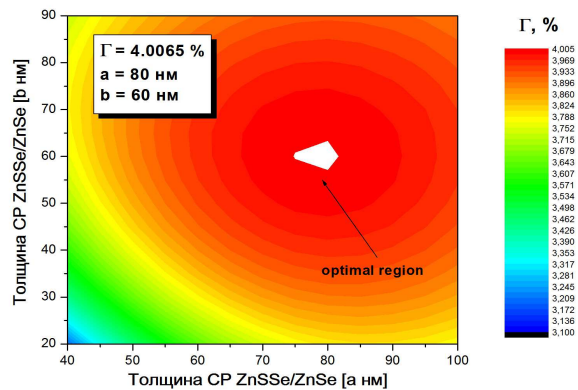


Рис. 14. Зависимость фактора оптического ограничения от толщин CP ZnSSe/ZnSe гетероструктуры с пятью вставками КТ ZnCdSe

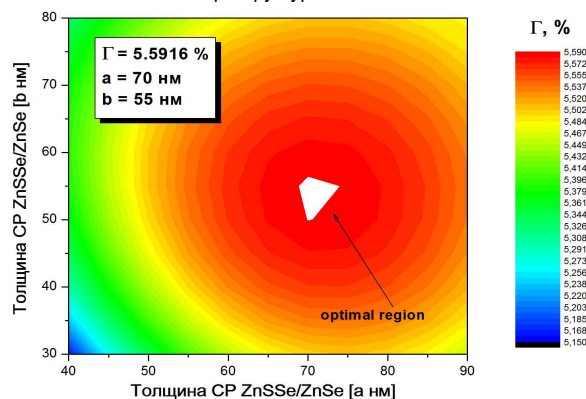


Рис. 15. Зависимость фактора оптического ограничения от толщин CP ZnSSe/ZnSe гетероструктуры с семью вставками КТ ZnCdSe

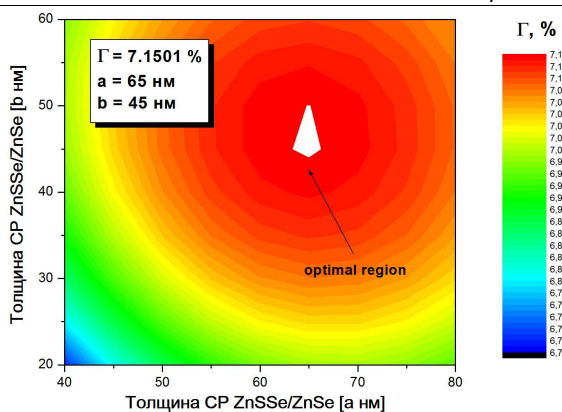


Рис. 16. Зависимость фактора оптического ограничения от толщин CP ZnSSe/ZnSe гетероструктуры с девятью вставками КТ ZnCdSe

Таблица 2. Значения максимального фактора оптического ограничения  $\Gamma$  в зависимости от толщин CP ZnSSe/ZnSe для гетероструктур дизайна А

Кол-во КТ	a, нм	b, нм	$\Gamma$ , %
1	95	75	0.8002
2	90	70	1.6027
3	85	65	2.4053
5	80	60	4.0065
7	70	55	5.5916
9	65	45	7.1501

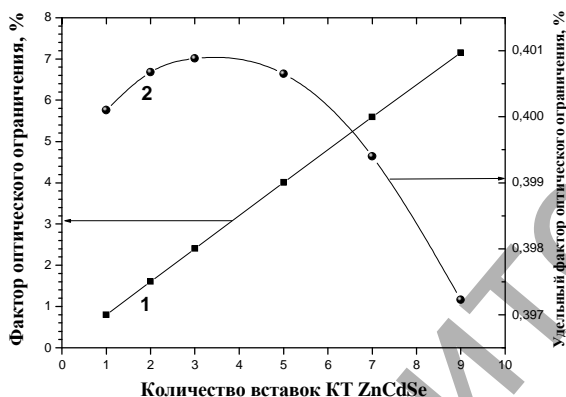


Рис. 17. Зависимости фактора оптического ограничения (1) и удельного фактора оптического ограничения (2) от количества вставок КТ ZnCdSe гетероструктур дизайна А

Из таблицы 2 и рисунков 11–17 видно, что фактор оптического ограничения почти линейно возрастает с увеличением количества вставок КТ ZnCdSe от 0.80 % (одна вставка КТ ZnCdSe) до 7.15 % (девять вставок КТ ZnCdSe). При этом максимальное значение удельного фактора оптического ограничения соответствует структуре с 3–4 вставками КТ ZnCdSe. Толщины верхнего и нижнего слоев CP ZnSSe/ZnSe уменьшаются соответственно от 95 нм и 75 нм для одной вставки КТ ZnCdSe до 65 нм и 45 нм для девяти вставок КТ ZnCdSe.

**Структуры дизайна В.** Для улучшения транспорта неравновесных носителей заряда в активную область гетероструктур предложен варизонный волновод. Варизонный волновод формировался из четырех слоев CP1a-CP2a-CP3a-CPa выше активной области и четырех слоев CPb-CP3b-CP2b-CPb ниже активной области. В качестве волноводных слоев использовалась CP:

- CPa и CPb - ZnSSe/ZnSe(18нм/18нм),
- CP1a и CP1b – ZnMgSSe/ZnSe(18нм/6нм)
- CP2a и CP2b – ZnMgSSe/ZnSe(15нм/9нм)
- CP3a и CP3b – ZnMgSSe/ZnSe(12нм/12нм).

Количество периодов CP NCP1a, NCP2a, NCP3a и NCP1b, NCP2b, NCP3b выбиралось одинаковым. Количество периодов NCPa равно 15 и NCPb равно 10 и выбрано, исходя из расчетов гетероструктур дизайнов А. Оптимизация дизайна гетероструктур проводилась по фактору оптического ограничения при изменении количества вставок в CP обкладочных слоев CPa, CPb. Схемы гетероструктур с оптимальным дизайном В представлены на рисунке 18.

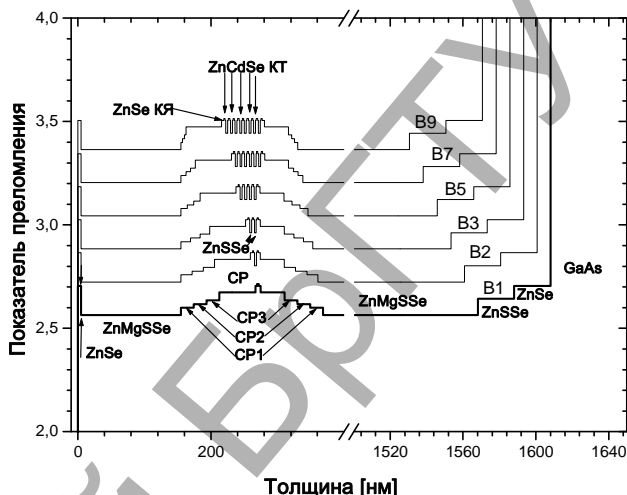


Рис. 18. Профили показателя преломления гетероструктур дизайна В, содержащие различное количество вставок КТ ZnCdSe

Результаты расчетов зависимости значений максимального фактора оптического ограничения  $\Gamma$  от количества периодов сверхрешеток CP1a, CP1b для гетероструктур дизайна В приведены в таблице 3.

Таблица 3. Значения максимального фактора оптического ограничения  $\Gamma$  в зависимости от количества периодов CP1a и CP1b для гетероструктур дизайна В

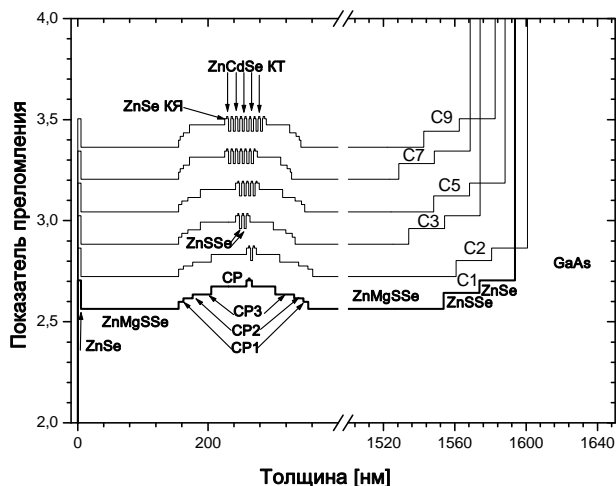
Кол-во КТ	NCP1a, нм	NCP1b, нм	$\Gamma$ , %
1	8	8	0.7636
2	7	7	1.5419
3	6	6	2.3313
5	4	5	3.9296
7	3	3	5.5320
9	1	2	7.1190

Из таблицы 3 видно, что фактор оптического ограничения увеличивается от 0.76 % для структуры с одной вставкой КТ ZnCdSe до 7.12 % для структуры с девятью вставками КТ ZnCdSe. При этом количество периодов в верхних сверхрешетках CP1a, CP2a, CP3a и нижних CP1b, CP2b, CP3b уменьшается соответственно от 8 и 8 (для одной вставки КТ ZnCdSe) до 1 и 2 (для девяти вставок КТ ZnCdSe).

**Структуры дизайна С.** Для дальнейшего повышения эффективности транспорта носителей заряда в активную область был сформирован варизонный волновод с нелинейным профилем показателя преломления. Геометрия гетероструктур дизайна С аналогична с гетероструктурами дизайна В. Отличие состоит в том, что количество периодов сверхрешеток NCP1a, NCP2a, NCP3a и NCP1b, NCP2b, NCP3b выбиралось в 2 раза меньше при удалении от активной области. Количество периодов NCPa и NCPb равно соответственно 15 и 10. Схемы гетероструктур с оптимальным дизайном С представлены на рисунках 19.

**Таблица 4.** Значения максимального фактора оптического ограничения  $\Gamma$  в зависимости от количества периодов CP1a, CP2a, CP3a, CP1b, CP2b и CP3b для гетероструктур дизайна С

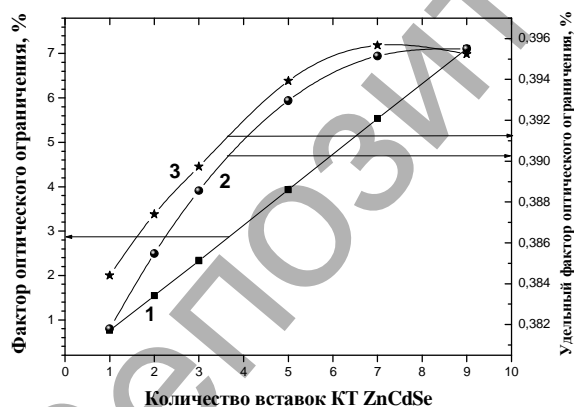
Кол-во КТ	NCP1a	NCP2a	NCP3a	NCP1b	NCP2b	NCP3b	$\Gamma$ , %
1	3	6	12	3	6	12	0.7688
2	3	6	12	3	6	12	1.5496
3	2	4	8	2	4	8	2.3384
5	2	4	8	2	4	8	3.9392
7	1	2	4	1	2	4	5.5393
9	1	2	4	1	2	4	7.1143



**Рис. 19.** Профили показателя преломления гетероструктур дизайна С, содержащие различное количество вставок КТ ZnCdSe

Результаты расчетов зависимости значений максимального фактора оптического ограничения  $\Gamma$  от количества периодов сверхрешеток CP1a, CP2a, CP3a, CP1b, CP2b и CP3b для гетероструктур дизайна С приведены в таблице 4.

При оптимальной толщине волноводной области рассчитан удельный фактор оптического ограничения. Результаты расчетов приведены на рисунке 20.



**Рис. 20.** Зависимости фактора оптического ограничения (1) и удельного фактора оптического ограничения (2) для структур дизайна В и С от количества вставок КТ ZnCdSe

Из таблиц 3, 4 видно, что фактор оптического ограничения гетероструктур дизайна С несколько больше, чем у гетероструктур дизайна В. Фактор оптического ограничения практически линейно возрастает от 0.77 % (для одной вставки КТ ZnCdSe) до 7.11 % (для девяти вставок КТ ZnCdSe) в случае гетероструктур дизайна С. При этом количество периодов верхних и нижних CP изменяется от 3-6-12 до 1-2-4. Фактор оптического ограничения у гетероструктур дизайнов В и С с варизонным волноводом незначительно меньше, чем

у структур дизайна А, при этом выше эффективность транспорта неравновесных носителей заряда в активную область. Из рисунков 18 и 20 видно, что максимум удельного фактора оптического ограничения у гетероструктур с варизонным волноводом дизайна С смещается по сравнению с гетероструктурами с прямоугольным волноводом дизайна А с 3-4 вставок КТ в район 7 вставок КТ ZnCdSe.

**Заключение.** Оптимизированы по фактору оптического ограничения толщины волноводных слоев гетероструктур с широким верхним слоем ZnMgCdSe трех дизайнов с одной, двумя, тремя, пятью, семью и девятью вставками КТ ZnCdSe. Для уменьшения влияния поверхности гетероструктуры на активную область толщина верхнего обкладочного слоя ZnMgSSe увеличена до 150 нм вместо 20 нм, используемой в ранее выращенных структурах. У гетероструктур дизайна А максимальный фактор оптического ограничения растет почти линейно с увеличением количества вставок от 0.80 % (для одной вставки КТ ZnCdSe) до 7.15 % (для 9 вставок КТ ZnCdSe). Удельный фактор оптического ограничения максимален для гетероструктуры с 4-5 вставками КТ ZnCdSe.

Для увеличения эффективности транспорта носителей заряда в активную область предложен дизайн гетероструктур с варизонным волноводом. Для структур с варизонным волноводом дизайнов В и С максимальный фактор оптического ограничения растет почти линейно с увеличением количества вставок от соответственно 0.76 % и 0.77 % (для одной вставки КТ ZnCdSe) до 7.12 % и 7.11 % (для 9 вставок КТ ZnCdSe). Применение варизонного волновода смещает максимум удельного фактора оптического ограничения в район 7 вставок КТ ZnCdSe. У гетероструктур с варизонным волноводом дизайна В и С максимальный фактор оптического ограничения уменьшается незначительно по сравнению с структурами дизайна А. Однако у структур с варизонным волноводом более эффективно осуществляется транспорт неравновесных носителей заряда в активную область, что позволяет надеяться на существенное снижение порога генерации и увеличение эффективности лазеров, изготовленных на основе этих гетероструктур.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- Bergmann, M.J. Optical-field calculations for lossy multiple-layer  $Al_xGa_{1-x}N/In_xGa_{1-x}N$  laser diodes / M.J. Bergmann, H.C. Casey, Jr. // J. Appl. Phys. – 1998. – Vol. 84, Iss. 3. – P. 1196-1203.
- Chen, Ch. Efficient and accurate numerical analysis of multilayer planar optical waveguides in lossy anisotropic media / Ch. Chen, P. Berini, D. Feng, S. Tanev and V. P. Tzolov // Optics Express. – 2000. – Vol. 7, Iss. 8. – P. 260-272.
- Тарасюк, Н. П. Фактор оптического ограничения и пороговые условия генерации оптически накачиваемых полупроводниковых лазеров на квантоворазмерных структурах InGaN/GaN, выращенных на кремниевых подложках / Н. П. Тарасюк, А. А. Гладышук, Е. В. Луценко // Вестник БГТУ. Физика, математика, химия. – 2002. – № 5. – С. 8-13.
- Адамс, М. Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. Москва: Мир, 1984. – 512 с.
- Lunz, U. Optical properties of  $Zn_{1-x}Mg_xS_ySe_{1-y}$  epitaxial layers for blue-green laser applications / U. Lunz, B. Jobst, S. Einfeict, C. R. Becker, D. Hommel, G. Landwehr // J. Appl. Phys. – 1995. – Vol. 77, Iss. 10. – P. 5377-5380.
- Li, H. H.. Refractive index of ZnS, ZnSe, and ZnTe and its Wavelength and Temperature Derivatives / H. H. Li // J. Phys. Chem. Ref. Data. – 1984. – Vol. 13, Iss. 1. – P. 103-150.

Материал поступил в редакцию 21.02.14

**TARASUK N.P., LUTSENKO E.V., GLADYSHCHUK A.A. Optical confinement factor of heterostructures ZnMgCdSSe with graded index a waveguide and thick upper layer ZnMgSSe for optical pumped up lasers**

The results of calculations of the optical confinement factor for heterostructures ZnMgCdSSe are presented. For increase in efficiency of transport of nonequilibrium charge carriers in active region the design of heterostructures with graded index a waveguide is offered. To decrease of heterostructure surface influence, the thickness of upper layer of ZnMgSSe was increased. Comparison of the optical confinement factor, the specific optical confinement factor for heterostructures with graded index a waveguide, containing one, two, three, five, seven and nine ZnCdSe quantum dots has been carried out.

УДК 517.9

**Жук А.И.**

**НЕАВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В АЛГЕБРЕ МНЕМОФУНКЦИЙ**

В настоящей работе рассматривается следующая система уравнений с обобщенными коэффициентами на отрезке  $T = [0; a] \subset R$ :

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^q f^{ij}(t, x(t))L^j(t), \quad i = \overline{1, p} \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где  $f^{ij} \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, q}$  – липшицевы функции,  $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)]$ ,  $x_0 \in R^p$ , а  $L^j(t)$ ,  $j = \overline{1, q}$  – функции ограниченной вариации на отрезке  $T$ . Без ограничения общности будем считать, что функции  $L^j(t)$ ,  $j = \overline{1, q}$  непрерывны справа,  $L^j(0) = L^j(0-) = 0$  и  $L^j(a-) = L^j(a)$ ,  $j = \overline{1, q}$ .

При решении нелинейных задач возникают принципиально неразрешимые трудности, связанные с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций. Существующие подходы к трактовке подобного рода систем уравнений можно классифицировать следующим образом.

Первый подход связан с попытками исследования задачи (1)–(2) в рамках теории обобщенных функций и упирается в проблему умножения разрывных функций на обобщенные, которая возникает в выражении  $f^{ij}(t, x(t))L^j(t)$ . В работах [1, 2] вводится определение произведения разрывной функции на обобщенную, а затем ищется решение дифференциального уравнения.

Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению (см., например, [3]), где интеграл понимается в определенном смысле, например, в смысле Лебега-Стилтьеса, Перрона-Стилтьеса и т.д. Однако, при таком толковании решение интегрального уравнения зависит от типа интеграла и определения функции  $x(t)$  в точках разрыва  $L(t)$ .

Третий подход (см., напр., [2]) опирается на идею аппроксимации искомого решения задачи (1)–(2) решениями обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что решения полученные в разных работах, даже в рамках одного подхода, вообще говоря различны.

Еще один подход связан с алгебрами новых обобщенных функций. Впервые алгебра была построена в [4], а общий метод построения подобных алгебр описан в [5], там же был использован термин «мнемофункция» для обозначения новой обобщенной функции. В данной работе используется алгебра определенная в [6] (см., также [7]). Согласно этим работам уравнение (1) заменяется уравнением в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций. Решением последнего будет новая обобщенная функция. Важнейшая особенность новых обобщенных функций состоит в том, что они определяются как классы эквивалентных последовательностей гладких функций и зависят от способа аппроксимации, что позволяет охватить решения, получающиеся в результате толкования задачи (1)–(2) с помощью трех описанных выше подходов. Подобные задачи в одномерном случае рассматривались в [7, 8].

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций (см., [6, 7]).

$$d_{\tilde{h}} \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{L}^j(\tilde{t}), \quad i = \overline{1, p} \quad (3)$$

с начальным условием  $\tilde{x}|_{[0, \tilde{h}]} = \tilde{x}^0$ , где  $\tilde{h} = \{[h_n]\} \in H$ ,  $\tilde{a} = \{[a]\} \in T$  и  $\tilde{t} = \{[t_n]\} \in \tilde{T}$ ,  $\tilde{x} = \{[x_n(t)]\}$ ,  $\tilde{f} = \{[f_n(x)]\}$ ,  $\tilde{x}^0 = \{[x_n^0(t)]\}$ ,  $\tilde{L} = \{[L_n(t)]\}$  и  $x_{n0} \rightarrow x(0)$ .

Если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$\dot{x}_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^q f_n^{ij}(t, x_n(t)) [L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1, p} \quad (4)$$

$$x_n(t)|_{[0, h_n]} = x_{n0}(t), \quad (5)$$

Здесь 
$$L_n^j(t) = (L^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{\gamma^j(n)} L^j(t+s) \rho_n^j(s) ds,$$

$$j = \overline{1, q}, \quad \text{где} \quad \rho_n^j(t) = \gamma^j(n) \rho^j(\gamma^j(n)t), \quad \rho^j \geq 0,$$

$$\text{supp}(\rho^j) \subseteq [0, 1], \quad \int_0^1 \rho^j(s) ds = 1, \quad \text{а} \quad f_n = f * \tilde{\rho}_n, \quad \text{где}$$

$$\tilde{\rho}_n(x_0, x_1, \dots, x_p) = n^p \tilde{\rho}(nx_0, nx_1, \dots, nx_p), \quad \tilde{\rho} \in C^\infty(R^{p+1}),$$

$$\tilde{\rho} \geq 0, \quad \int_{[0, 1]^{p+1}} \tilde{\rho}(x_0, x_1, \dots, x_p) dx_0 dx_1 \dots dx_p = 1, \quad \text{supp}(\tilde{\rho}) \subset [0, 1]^{p+1}.$$

Пусть  $t$  – произвольная фиксированная точка из отрезка  $T$ . Тогда  $t$  можно представить в виде  $t = \tau_t + m_t h_n$ , где  $\tau_t \in [0, h_n]$ ,  $m_t \in N$ . Несложно видеть, что решение системы (4)–(5) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(\tau_t + kh_n, x_n(\tau_t + kh_n)) \times \quad (6)$$

$$\times [L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)],$$

где  $i = \overline{1, p}$ .

В одномерном случае в работах [7, 8] показано, что предел последовательности (6) зависит от связи между  $\gamma^j(n)$  и  $h_n$ . Данная работа посвящена изучению общей ситуации.

Для описания предельного поведения задачи (4)–(5) рассмотрим систему уравнений

**Жук А.И.**, старший преподаватель кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета. Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.