MUHOV S.V., MURAVJEV G.L., PARFOMUK S.I. The comparative analysis of use of various tools by development of systems of data processing of economic appointment

When training students of economic specialties within the disciplines of information profile, and also when training students specializing in area of information technologies it is offered to use classical model of data processing in economic systems for working off of skills of development of such systems with the subsequent assessment of costs of development of the software product.

In work the standard model of data processing is offered, and also standard modules and elements of the developed systems are allocated. It is possible to say that within this model there is the minimum and sufficient set of standard operations of data processing that will allow students to develop further on the basis of the realized educational project of system practically of any volume and level of complexity with the subsequent assessment of costs of development.

УДК 517.9

Жук А.И.

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

При решении нелинейных задач возникают принципиальные неразрешимые трудности, связанные с невозможностью корректного определения произведения обобщенных функций. Многими авторами были предложены различные подходы для определения решения некоторых классов нелинейных дифференциальных уравнений, которые, вообще говоря, приводят к различным решениям одного и того же уравнения [1, 2]. Выбор того или иного решения зависит от условий, возникающих при моделировании конкретной прикладной задачи, описываемой данным уравнением.

В данной статье рассмотрим следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами на отрезке $T=[0;a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t),\quad i=\overline{1,p}, \tag{1}$$

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

где $\dot{L}^j(t)$ – обобщенные производные, а функции $f^{ij}(t,x(t))$ не являются гладкими. Таким образом, произведение $f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t)$ является некорректным, и решение задачи (1)–(2) зависит от трактовки рассматриваемого произведения.

В данной работе задача (1)–(2) рассматривается в алгебре новых обобщенных функций. Впервые алгебра новых обобщенных функций была постоена в [3], а общий метод построения подобных алгебр описан в [4]. В данной работе используется алгебра, определенная в [5] (см., также [6]).

Приведем построение алгебры новых обобщенных функций из [6]. Для начала определим расширенную вещественную прямую $\tilde{R}$. Пусть $\bar{R}=\left\{(x_n)_{n=1}^{\infty}: x_n\in R, n\in N\right\}$ – множество всех вещественных последовательностей. Будем называть две последовательности $\{x_n\}\in\bar{R}$ и $\{y_n\}\in\bar{R}$ эквивалентными, если существует натуральное число N, такое, что $x_n=y_n$ для всех $n>N$. Множество $\tilde{R}$ всех классов эквивалентности назовем расширенной вещественной прямой, а любой из классов эквивалентности – обобщенным числом.

Можно считать, что $R\subset\tilde{R}$, так как для каждого $x\in R$ существует класс эквивалентности, содержащий стационарную последовательность $x_n=x$. Произведение $\tilde{x}\tilde{y}$ двух обобщенных чисел определяется как класс последовательностей эквивалентных последовательности $\{x_n y_n\}$, где $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ некоторые представители классов $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$ соответственно. Очевидно, что $\tilde{R}$ является алгеброй. Для любого отрезка $T=[a;b]\subset R$ аналогичным образом можно построить расширеннный отрезок $\tilde{T}\subset\tilde{R}$.

Рассмотрим множество последовательностей бесконечно дифференцируемых функций $\{f_n(x)\}$ на R. Будем называть две последовательности $\{f_n(x)\}$ и $\{g_n(x)\}$ эквивалентными, если существует натуральное число N, такое, что $f_n(x)=g_n(x)$ для всех $n>N$ и $x\in R$.

Множество классов эквивалентности функций обозначим через $\zeta(R)$ и будем называть алгеброй новых обобщенных функций. Аналогично можно определить пространство $\zeta(T)$ для любого отрезка $T=[a;b]\subset R$.

Пусть $\tilde{f}=[\{f_n(x)\}]$ и $\tilde{g}=[\{g_n(x)\}]$ обобщенные функции. Тогда существует композиция $\tilde{f}\circ\tilde{g}=[\{f_n(g_n(x))\}]\in\zeta(R)$. Аналогичным образом можно определить значение новой обобщенной функции $\tilde{f}$ в обобщенной вещественной точке $\tilde{x}=[\{x_n\}]\in\tilde{R}$, как $\tilde{f}(\tilde{x})=[\{f_n(x_n)\}]$.

Для каждого распределения (обобщенной функции) или обычной функции f можно построить последовательность f_n гладких функций, таких, что f_n сходится к f в соответствующем пространстве. Например, можно рассмотреть свертку f с какой-либо δ-последовательностью. Такая последовательность определяет новую обобщенную функцию, которая соответствует распределению f. Следовательно, пространства распределений, непрерывных, интегрируемых и т.п. функций можно считать подмножествами алгебры новых обобщенных функций. При таком подходе одному распределению соответствует бесконечно много новых обобщенных функций (например, при свертке f с различными δ-последовательностями).

Выделим во множестве $\tilde{R}$ подмножество:

$$H=\left\{\tilde{h}\in\tilde{R}:\tilde{h}=[\{h_n\}], h_n>0, \forall n\in N, \lim_{n\to\infty}h_n=0\right\}.$$

Для каждого $\tilde{h}=[\{h_n\}]\in H$ и $\tilde{f}=[\{f_n(x)\}]\in\zeta(R)$

***Жук А.И.**, к.ф.-м.н., доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

мы определим обобщенный дифференциал $d_{\tilde h}\tilde f \in \zeta(R)$ как $d_{\tilde h}\tilde f(\tilde x) = \tilde f(\tilde x + \tilde h) - \tilde f(\tilde x)$. Конструкция дифференциала была предложена Н.В. Лазаковичем для алгебры новых обобщенных стохастических процессов (см., напр., [5]).

Введеные понятия позволяют исследовать дифференнциальные уравнения, в том числе и некорректные, с помощью соответствующих уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных функций.

Заменяя обычные функции, присутствующие в (1), на соответствующие им новые обобщенные функции, получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций (см. [5, 6]).

$$d_{\tilde h}\tilde x^i(\tilde t) = \sum_{j=1}^{q} \tilde f^{ij}\left(\tilde t, \tilde x(\tilde t)\right) d_{\tilde h}\tilde L^j(\tilde t) \quad i = \overline{1,p} \tag{3}$$

с начальным условием $\tilde x\big|_{[\tilde 0,\tilde h)} = \tilde x^0$ где $\tilde h = [\{h_n\}] \in H$, $\tilde a = [\{a\}] \in T$ и $\tilde t = [\{t_n\}] \in \tilde T$, $\tilde x = [\{x_n(t)\}]$, $\tilde f = [\{f_n(x)\}]$, $\tilde x^0 = [\{x_n^0(t)\}]$, $\tilde L = [\{L_n(t)\}]$ и $x_{n0} \to x(0)$.

Если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей:

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t, x_n(t))\left[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)\right],$$

$$i = \overline{1,p} \tag{4}$$

$$x_n(t)\big|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t). \tag{5}$$

В качестве представителей для уравнения (4) рассмотрим следующие функции

$$L_n^j(t) = \left(L^j * \rho_n^j\right)(t) = \int_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} L^j(t+s)\rho_n^j(s)ds, \tag{6}$$

где $j = \overline{1,q}$, $\rho_n^j(t) = \gamma^j(n)\rho^j\left(\gamma^j(n)t\right)$, $\rho^j \ge 0$ $supp\left(\rho^j\right) \subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho^j(s)ds = 1$, а $f_n = f * \tilde\rho_n$, $\tilde\rho_n(x_0, x_1, \dots, x_p) = n^p\tilde\rho(nx_0, nx_1, \dots, nx_p)$, $\tilde\rho \in C^\infty\left(R^{p+1}\right)$, $\tilde\rho \ge 0$, $\int_{[0,1]^{p+1}} \tilde\rho(x_0, x_1, \dots, x_p)dx_0dx_1\dots dx_p = 1$. Здесь $\gamma^j(n)$ – некоторая монотонная функция, такая, что $\gamma^j(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$, причем для $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n \to \infty$, а для $j = \overline{b+1,q}$, $\gamma^j(n)h_n \to 0$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t=\tau_t+m_th_n$, где $\tau_t \in [0,h_n)$ $m_t \in N$. Несложно видеть, что решение системы (4)–(5) можно записать в виде:

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}\left(\tau_t + kh_n, x_n(\tau_t + kh_n)\right)\times$$
$$\times\left[L_n^j\left(\tau_t + (k+1)h_n\right) - L_n^j\left(\tau_t + kh_n\right)\right], \tag{7}$$

где $i = \overline{1,p}$.

При некоторых дополнительных условиях функция x_n^i, поэтому при этих условиях решение задачи (4)–(5) определяет новую обобщенную функцию, которая является решением уравнения в дифференциалах (3). Эти условия описывает следующая теорема.

Теорема 1 [7]. Пусть для любых представителей $\left(f_n^{ij}\right) \in \tilde f^{ij}$, $\left(L_n^j\right) \in \tilde L^j$, $\left(x_n^i\right) \in \tilde x^i$, $\left(x_{n0}^i\right) \in \tilde x_0{}^i$ выполняется условие:

$$\frac{d^l}{dt^l}\left[x_{n0}^i(h_n - t) - x_{n0}^i(t)\right] -$$
$$-\sum_{j=1}^{q}\frac{d^l}{dt^l}\left[f_n^{ij}(t, x_{n0}(t))\left[L_n^j(h_n + t) - L_n^j(t)\right]\right] \to 0,$$

при $t \to +0$ для любых $l = 0,1,2,\dots,$ тогда решение уравнения (3) в $\zeta(T)$ существует и единственно.

Определение 1. Будем говорить, что функция x является ассоциированным решением уравнения в дифференциалах (3), если существуют представители новых обобщенных функций $\tilde f$, $\tilde L$ и x_0, для которых $\tilde x$ ассоциирует x в $D'(T)$, т.е. решение задачи (4)–(5) $x_n(t)$ сходится в $D'(T)$ к x и $\tilde x = [\{x_n(t)\}] \in \zeta(\tilde T)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция x является *I*-ассоциированным (*S*-ассоциированным) решением уравнения (3), если она является ассоциированным решением задачи (3), при условии, что $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ ($\gamma^j(n)h_n \to 0$) и представители функций $\tilde f$ и $\tilde L$ задаются формулой (6). В этом случае $d_{\tilde h}\tilde L^j$ будем называть *I*-ассоциированным (*S*-ассоциированным) коэффициентом.

Таким образом, под решением многомерного неавтономного дифференциального уравнения (1) с начальным условием (2) будем понимать ассоциированное решение системы уравнений в дифференциалах (3).

Для описания предельного поведения задачи (4)–(5) рассмотрим систему уравнений:

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(s, x(s))dL^{jc}(s) +$$
$$+\sum_{\mu_r \le t} S^i\left(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)\right),$$
$$i = \overline{1,p}, \tag{8}$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r +) - L^d(\mu_r -)$ – величина скачка. $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из вспомогательной системы уравнений

$$\varphi^i(t,\mu,x,u) = x^i + \sum_{j=1}^{b} u^j \int_0^t f^{ij}\left(\mu,\varphi(s-,\mu,x,u)\right)dH(s-1) +$$

$$+ \sum_{j=b+1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}\left(\mu,\varphi(s,\mu,x,u)\right)ds,$$

$$i=\overline{1,p}.$$

Здесь и далее в работе интеграл $\int_u^t f(x)\,dL(x)$ понимается в смысле Лебега-Стилтьеса на промежутке $(u;t]$, $x \in R^p$, $u \in R^q$ $\mu \in T$, $H(s)$ – функция Хевисайда, т.е. $H(s)=1$ при $s \ge 0$ и $H(s)=0$ при $s<0$. Существование и единственность решения системы (8) для всех значений параметров $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$ доказано в [8].

В дальнейшем под модулем вектора $x(t)=\left[x^1(t),x^2(t),\ldots,x^p(t)\right]$ будем понимать $\left|x(t)\right| = \sum_{i=1}^{p}\left|x^i(t)\right|$. Функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица относительно переменной x, если существует постоянная M, такая, что $\left|f(t,x_1)-f(t,x_2)\right| \le M\left|x_1-x_2\right|$ для любых $t \in T$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n\to\infty$, $h_n \to 0$ $\gamma^j(n)\to\infty$ *так, что для* $j=\overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n\to\infty$ *и для* $j=\overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n \to 0$, *ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (8), если* $\int_T \left|x_{n0}(\tau_t)-x_0\right|dt \to 0$.

В частных случаях аналогичные результаты были получены в [9, 10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Antosik, P. Generalized functions and operational caculus / P. Antosik, J. Ligeza // Proc. Conf. – Varna, 1975. – P. 20–26.
2. Das, P.C. Czech. Math. J. / P.C. Das, R.R. Sharma – 1972. – V. 22. – № 1. – P. 145–158.
3. Colombeau, J. Elementary introduction to new generalized functions. – Amsterdam, 1985.
4. Антоневич, А.Б. Докл. АН СССР / А.Б.Антоневич, Я.В. Радыно. – 1991. – Т. 318. – № 2. – С. 267–270.
5. Лазакович, Н.В. Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38. – № 5. – С. 23–27.
6. Yablonski, A. Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
7. Каримова, Т.И. Вест. Белорус. гос. ун-та. // Сер. 1: Физика. Математика. Информатика. – 2009. – № 2. – С. 81–86.
8. Миллер, Б.М. / Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович – М.: Наука, 2005. – 429 с.
9. Жук, А.И. Тр. ин-та математики / А.И. Жук, О.Л. Яблонский – 2011. – Т. 19. – № 2. – С. 43–51.
10. Жук, А.И. Докл. Нац. акад. наук Беларуси / А.И. Жук, О.Л. Яблонский – 2015. – Т. 59. – № 2. – С. 17–22.

Материал поступил в редакцию 10.12.15

ZHUK A.I. **Associated solutions of multidimensional nonautonomic differential equations with generalized coefficients**

We consider some multidimensional nonautonomic differential equations with generalized coefficients as an equation in differentials in the algebra new generalized functions. The associated solutions of such multidimensional differential equations are obtained.

УДК 517.91: 004.021

Швычкина Е.Н.

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Введение. Большой класс задач математической физики и нелинейной механики могут быть сведены при помощи допустимых функциональных преобразований к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$y'(x)y(x)-y(x)=F(x), \tag{1}$$

где $F(x)$ - некоторая гладкая функция [1, 2]. Дифференциальное уравнение (1) называется уравнением Абеля второго рода в нормальной форме [3, 4].

Дифференциальные уравнения Абеля первого и второго родов соответственно:

$$y' = a_0y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3, \tag{2}$$

$$(a_0y + a_1)y' = b_1y^2 + b_2y + b_3, \tag{3}$$

коэффициенты которых есть аналитические функции по x, посредством элементарных преобразований всегда можно перевести в нормальную форму вида (1) [Камке]. Там же для уравнения Абеля второго рода (3) приведено коэффициентное условие, при котором оно интегрируется. А именно, если переменные коэффициенты уравнения удовлетворяют следующему функциональному отношению:

$$a_1(2b_1 + a_0{}'_x) = a_0(b_2 + a_1{}'_x), \quad a_0 \ne 0, \tag{4}$$

тогда существует общий интеграл

$$\frac{a_0y^2 + 2a_1y}{a_0 I} = 2\int \frac{b_3}{a_0 I}dx + C, \tag{5}$$

где $I = exp\int \frac{2b_1}{a_0}dx$ и C – произвольная постоянная.

В работе [1] приведен аналитический метод построения точных аналитических решений для уравнения Абеля вида (1). Приведем кратко суть этого метода. Для уравнения (1) ищется решение в виде

$$y(x) = \varphi(x)n(x). \tag{6}$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1), которое примет вид

$$\varphi^2 n n'_x + \varphi\cdot\varphi'_x n^2 - \varphi n = F(x), \tag{7}$$

где функции $n(x)$, $\varphi(x)$ подлежат определению, для этого вве-

Швычкина Елена Николаевна, *к.ф-м.н., доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета. Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*