

УДК 624.012

Желткович А.Е.

РАСЧЁТ НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В БЕТОННЫХ ПЛИТАХ, РАСПОЛАГАЕМЫХ НА ПЕСЧАНЫХ ИЛИ ГРАВЕЛИСТЫХ ОСНОВАНИЯХ, С УЧЁТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ОСНОВАНИЕМ

Введение. В настоящее время нормативным документом, регламентирующим проектирование полов производственных, жилых, общественных, административных и бытовых зданий является СНиП 2.03.13-88 [1].

При проектировании бетонных слоёв полов нормы [1] устанавливают только два основных параметра – толщину плиты и класс бетона по прочности на сжатие. Методика расчёта таких конструкций, учитывающая процессы температурных воздействий, усадки, протекающих в бетоне в период твердения, при взаимодействии проектируемого слоя с основанием в нормах отсутствует.

Исследование напряжённо-деформированного состояния бетона при развитии усадки продолжается уже не одно десятилетие. Этому вопросу посвящен целый ряд работ [2 – 9], причём в работах [4, 5] рассмотрены плиты покрытий различного назначения. В ряде случаев расчётные модели, применяемые для вычисления внутренних усилий от усадки в конструкциях строятся на основе применения аналогии температурного воздействия, так как механизм деформаций, возникающих в конструкциях от усадки и от температуры, во многом схож.

1. Теоретические основы расчёта собственных напряжений в плитах

1.1. Постановка задачи. Широкие исследования по изучению влияния усадочных и температурных воздействий на бетонную плиту, находящуюся во взаимодействии с основанием, представлены в работе [4]. Здесь вид оснований варьировался от песчаного простого и песчаного с устроенным поверх полиэтиленовым покрытием до гравелистого и гравелистого с полиэтиленовым покрытием. В работе получены решения, использующие уравнения упругого деформирования конструкции. Напряжения в плите рассчитывались из условия, что тело конструкции считалось сформировавшимся. Таким образом, применялся традиционный метод расчёта подобных задач.

В работе [5] приведено математическое описание поведения плиты, претерпевающей усадочные деформации в условиях ограничения усадки со стороны основания.

Плита представляет собой симметричную конструкцию, поэтому процессы моделируются только на одной половине плиты. В соответствии с диаграммой, представленной на рис. 1.2, связь между касательными напряжениями, действующими по контакту плиты с основанием и перемещениями в тангенциальном направлении, выражается следующим образом:

$$\begin{cases} \tau = \frac{\tau_1}{u_1} \cdot |u|, \text{ для } 0 \leq |u| \leq u_1 \\ \tau = \tau_1, \text{ для } |u| \geq u_1 \end{cases}, \quad (1.1)$$

где u – перемещение плиты относительно основания в произвольной точке.

В общем случае перемещение u может быть представлено в виде суммы:

$$u(x) = u_e(x) + u_c(x), \quad (1.2)$$

где $u_e(x)$ – перемещение, вызванное усадкой бетона;

$u_c(x)$ – перемещение, являющееся результатом внутреннего

осевого напряжения от приложения внешней нагрузки;

τ_1 – максимальное касательное напряжение в контакте между плитой и основанием;

u_1 – перемещение, соответствующее касательному напряжению τ_1 .

Характеристика τ_1 и u_1 , является характеристикой контакта сдвигаемых материалов и принимается в зависимости от вида основания. Параметрические точки диаграммы деформирования τ_1 и u_1 , были определены экспериментальными исследованиями [6, 7, 8, 9] сдвига образцов плит по различным типам оснований (см. табл. 1) На рис. 1.2 представлена аппроксимация кривой « $\tau - u$ » принятая для математической модели.

Таблица 1. Характеристики τ_1 и u_1 , для сыпучих типов оснований, полученные в [6, 7, 8, 9] и на установке [10]

Источник	Тип основания	τ_1 , МПа	u_1 , мм
Собственные исследования [10]	гравелистое основание	0,0066	0,71
Исследования [6, 7, 8, 9]	зернистое основание (гравий, песок, мелкий щебень)	0,023	0,50

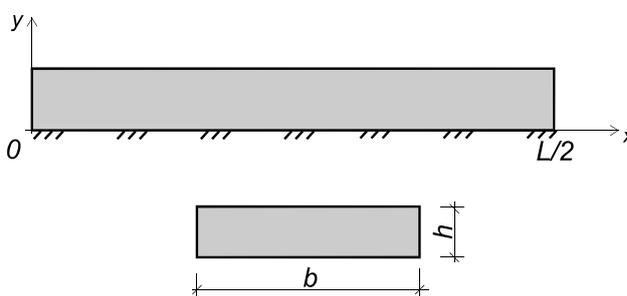


Рис. 1.1. Расчётная схема бетонной плиты [5] где b – ширина плиты; h – высота плиты

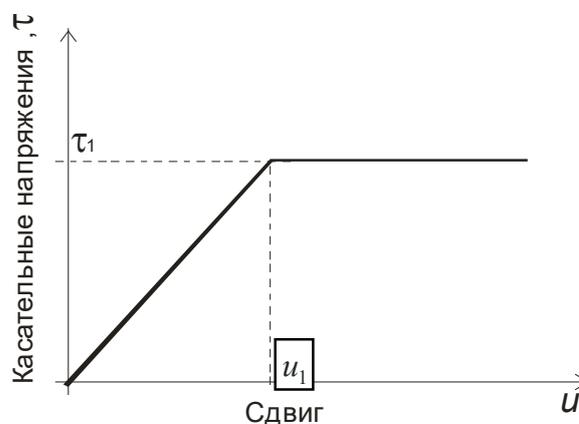


Рис. 1.2. Зависимость « $\tau - u$ »

Желткович А.Е., ассистент кафедры технологии бетона и строительных материалов Учреждения образования «Брестский государственный технический университет».

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

В расчётные уравнения существующих деформационных моделей [5], входят так называемые усреднённые характеристики сдвига бетона τ_1 и u_1 , полученные при сдвиге по зернистым основаниям и аппроксимированные упрощённой билинейной диаграммой, см. рис. 1.2. Представленные значения характеристик сдвига являются общими для ряда оснований, но для каждого типа основания (например, гравийного) значения могут изменяться. Это обстоятельство подтолкнуло нас к поискам возможностей более точного описания диаграмм сдвига « $\tau - u$ », для каждого отдельного типа основания. При проведении специальных исследований сдвига бетона по гравелистому основанию были уточнены характеристики сдвига τ_1 и u_1 , [10].

1.2. Разрешающие уравнения. Задачу расчёта напряжённо-деформированного состояния монолитной бетонной бесшовной плиты, предлагается решить на основе известного дифференциального уравнения, представленного в [5], но построенного с учётом более точной трансформированной диаграммы сдвига бетона, полученной в собственных исследованиях [10].

Для записи расчётных уравнений модели, учитывающей билинейную аппроксимацию кривых сдвига, необходимо рассмотреть некоторый выделенный участок конструкции, см. рис. 1.3.

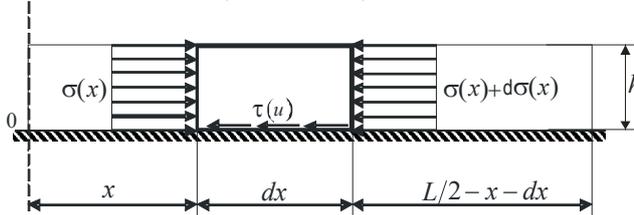


Рис. 1.3. Схема сил, действующих на участок плиты длиной dx

При построении расчётной модели приняты следующие допущения:

1. Бетон ведёт себя как абсолютно упругий материал, ползучесть и релаксация напряжений в бетоне на стадии расчёта от усадочных воздействий не учитывается.
2. Усадочные относительные деформации равномерно распределены по высоте сечения плиты.
3. Вертикальные деформации плиты не рассматриваются.

С учётом принятых допущений в соответствии со схемой, показанной на рис. 1.3, из условий равновесия для участка плиты длиной dx можно записать:

$$\frac{d\sigma_c(x)}{dx} = \frac{\tau(u)}{h} \quad (1.3)$$

С учётом того, что $\sigma_c(x) = E_c \cdot \varepsilon_{упр}$, а $\varepsilon_{упр} = \frac{du}{dx}$:

$$\frac{d\sigma_c(x)}{dx} = E_c \frac{d^2u}{dx^2}, \quad (1.4)$$

где E_c - модуль упругости бетона,

$\varepsilon_{упр}$ - относительная упругая деформация бетона.

Общее дифференциальное уравнение, описывающее перемещение плиты, с учётом формулы (1.3) от действия усадки запишется как:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\tau(u)}{E_c \cdot h} = 0. \quad (1.5)$$

С учётом зависимостей (1.1) для участка $u \leq u_1$ запишем:

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\tau_1}{u_1 \cdot E_c \cdot h} \cdot u(x) = 0 \quad (1.6)$$

и для участка $u \geq u_1$

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\tau_1}{E_c \cdot h} = 0. \quad (1.7)$$

Решением уравнения (1.6) и (1.7) будут являться функции, для $u \leq u_1$

$$u(x) = C_1^1 \cdot \exp(\beta \cdot x) + C_2^1 \cdot \exp(-\beta \cdot x) \quad (1.8)$$

и для $u \geq u_1$

$$u(x) = \alpha \cdot \frac{x^2}{2} + C_1^2 \cdot x + C_2^2, \quad (1.9)$$

где

$$\beta = \pm \sqrt{\frac{\tau_1}{u_1 \cdot E_c \cdot h}} \quad (1.10)$$

$$\alpha = \frac{\tau_1}{E_c \cdot h}. \quad (1.11)$$

Здесь постоянные интегрирования, C_1^1 , C_2^1 , C_1^2 и C_2^2 определяются из граничных условий $u(0) = 0$ и $u'(\frac{L}{2}) = \varepsilon_{sh}$, где ε_{sh} - деформация свободной усадки в бетоне.

Случай 1. Значение функции $u(\frac{L}{2}) \leq u_1$ - плита деформируется, не достигая в любом сечении точки проскальзывания, (см. участок [0 до u_1] диаграммы 1.2). Т.е. функция $u(x)$ имеет только вид (1.8).

Получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(\frac{L}{2}) = \varepsilon_{sh} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1^1 + C_2^1 = 0 \\ \beta \cdot C_1^1 \cdot \exp(\beta \cdot \frac{L}{2}) - \beta \cdot \exp(-\beta \cdot \frac{L}{2}) = \varepsilon_{sh} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2^1 = -\frac{\varepsilon_{sh}}{2 \cdot \beta \cdot \cosh(\beta \cdot \frac{L}{2})} \\ C_1^1 = \frac{\varepsilon_{sh}}{2 \cdot \beta \cdot \cosh(\beta \cdot \frac{L}{2})} \end{cases} \quad (1.12)$$

Случай 2. Данный случай справедлив, если значение функции $u(\frac{L}{2}) \geq u_1$. Здесь функция $u(x)$ имеет вид (1.8) до некоторой точки x_1 , в которой достигается значение $u(x_1) = u_1$; а далее функция $u(x)$ описывается уравнением (1.9).

В этом случае справедлива система:

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(\frac{L}{2}) = \varepsilon_{sh} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{до достижения точки } u_1 \\ \text{после прохождения точки } u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1^1 + C_2^1 = 0 \\ \alpha \cdot \frac{L}{2} + C_1^2 = \varepsilon_{sh} \\ C_2^1 = -C_1^1 \\ C_1^2 = \varepsilon_{sh} - \alpha \cdot \frac{L}{2} \end{cases} \quad (1.13)$$

Так как функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема, изменения как $u(x)$, так и $\frac{du(x)}{dx}$ происходят плавно, т.е. без скачков. В этом случае необходимо ввести условие, что для точки x_1 , в которой происходит «склейка», (т.е. $\lim_{x \rightarrow x_1-0} u(x) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} u(x) = u_1$), а функция $u(x)$ справа и слева от точки x_1 определена по формулам (1.8) и (1.9) соответственно выполняется условие $\lim_{x \rightarrow x_1-0} u'(x) = \lim_{x \rightarrow x_1+0} u'(x)$. Это соответствует тому, что при системе условий:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1^1 \cdot \beta \cdot \exp(\beta \cdot x_1) + C_2^1 \cdot \beta \cdot \exp(-\beta \cdot x_1) = u_1 \\ \alpha \cdot \frac{x_1^2}{2} + C_1^2 \cdot x_1 + C_2^2 = u_1 \end{cases} \quad (1.14)$$

выполняется:

$$C_1^1 \cdot \beta \cdot \exp(\beta \cdot x_1) - C_2^1 \cdot \beta \cdot \exp(-\beta \cdot x_1) = \alpha \cdot x_1 + C_1^2 \quad (1.15)$$

Используя начальные условия (1.13), система (1.14) переписывается в виде:

$$\begin{cases} 2 \cdot C_1^1 \cdot \beta \cdot \sinh(\sqrt{\beta} \cdot x_1) = u_1 \\ \alpha \cdot \frac{x_1^2}{2} + \left(\varepsilon_{sh} - \alpha \cdot \frac{L}{2} \right) \cdot x_1 + C_2^2 = u_1, \end{cases} \quad (1.16)$$

а уравнение (1.25)

$$2 \cdot C_1^1 \cdot \beta \cdot \cosh(\beta \cdot x_1) = \alpha \cdot x_1 + \varepsilon_{sh} - \alpha \cdot \frac{L}{2} \quad (1.17)$$

Получаем нелинейное уравнение вида:

$$\beta \cdot \coth(\beta \cdot x_1) = \alpha \cdot x_1 + \varepsilon_{sh} - \alpha \cdot \frac{L}{2} \quad (1.18)$$

из которого можно найти точку «склейки» для двух уравнений описывающих изменение $u(x)$.

$$x_1 = \frac{2 \cdot \varepsilon_{sh} - \alpha \cdot L}{4 \cdot \left(\frac{\beta^2}{3} - \alpha \right)} + \frac{\sqrt{\left(\varepsilon_{sh} - \alpha \cdot \frac{L}{2} \right)^2 - 4 \left(\frac{\beta^2}{3} - \alpha \right)}}{2 \cdot \left(\frac{\beta^2}{3} - \alpha \right)} \quad (1.19)$$

После нахождения значения x_1 , определяем все постоянные интегрирования, C_1^1 , C_2^1 , C_1^2 и C_2^2 .

$$\begin{cases} C_2^1 = -\frac{u_1}{2 \cdot \sinh(\beta \cdot x_1)} \\ C_1^1 = \frac{u_1}{2 \cdot \sinh(\beta \cdot x_1)} \\ C_2^2 = \varepsilon_{sh} - \alpha \cdot \frac{L}{2} \\ C_1^2 = u_1 - \alpha \cdot \frac{x_1^2}{2} - C_2^2 \cdot x_1. \end{cases} \quad (1.20)$$

Найдя значения постоянных интегрирования, удовлетворяющих граничным условиям, получаем решение в виде:

$$\begin{cases} u(x) = C_1^1 \cdot \exp(\beta \cdot x) + C_2^1 \cdot \exp(-\beta \cdot x), & \text{если } 0 \leq x \leq x_1 \\ u(x) = \alpha \cdot \frac{x^2}{2} + C_1^2 \cdot x + C_2^2, & \text{если } x_1 \leq x \leq \frac{L}{2} \end{cases} \quad (1.21)$$

Таким образом, для различных значений ε_{sh} и « $\tau - u$ » система (1.21) описывает закон изменения функции $u(x)$.

По результатам исследований сдвига бетонного штампа по гравийному основанию и установленным зависимостям « $\tau - u$ », табл. 1, представлено развитие собственных деформации монолитных бетонных плит при размерах бетонных плит, величинах свободной усадки ε_{sh} , уровне предельной растяжимости бетона $\varepsilon_{cf,1}$, указанных в табл. 2.

Таблица 2. Геометрические характеристики плит и физико-механические характеристики бетона

Размер плиты, $l \times b$, [м ²]	Толщина плиты, h , [м]	Величина свободной усадки, ε_{sh}	Уровень предельной растяжимости бетона $\varepsilon_{cf,1}$
50 x 50	0,1	0,00030	0,00010
	0,25		
	0,4		
100 x 100	0,1	0,00050	
	0,25		
	0,4		
200 x 200	0,1	0,00100	
	0,25		
	0,4		

Результаты математического моделирования, при вышеуказанных физико-механических характеристиках бетона приведены на рис. 1.4 – 1.9.

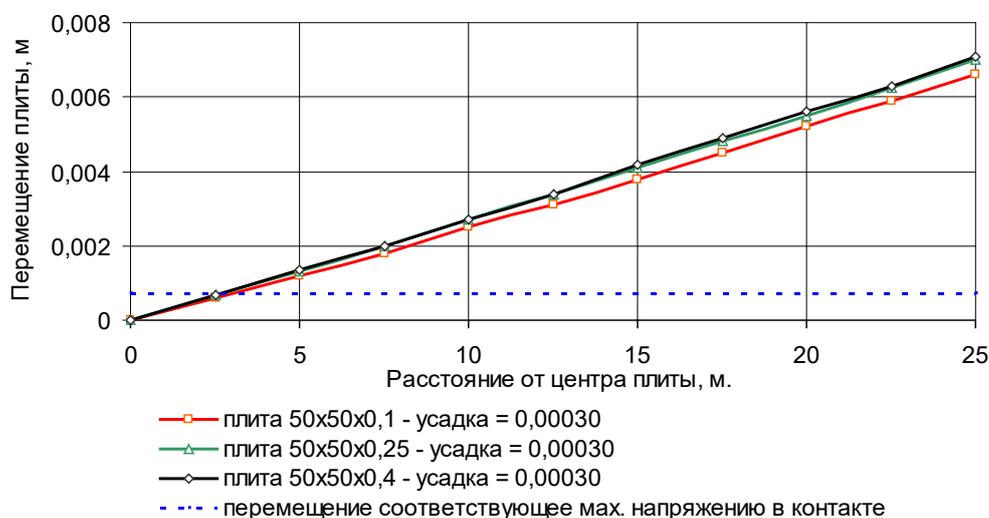


Рис. 1.4. Значения перемещений в монолитных плитах длиной $L = 50$ м

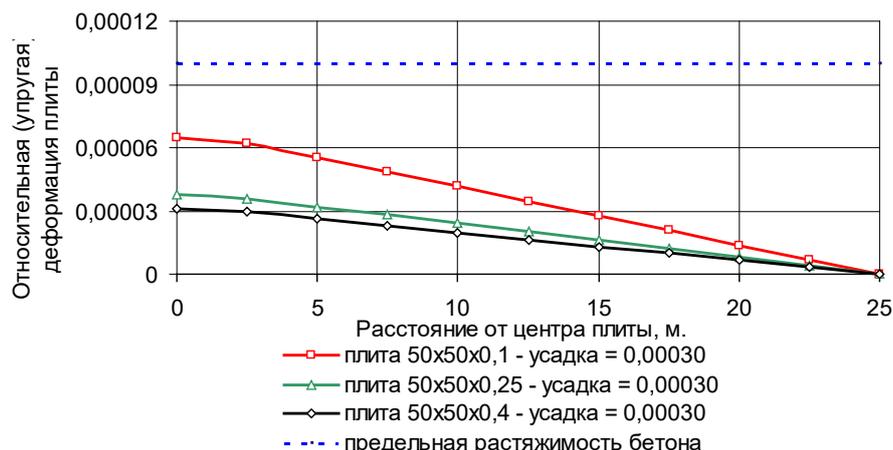


Рис. 1.5. Значения относительных (упругих) деформации в монолитных плитах длиной $L = 50$ м.

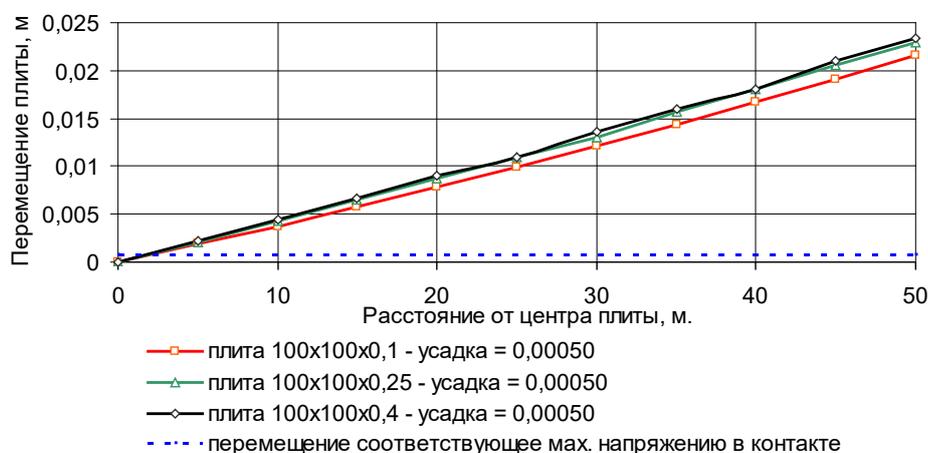


Рис. 1.6. Значения перемещений в монолитных плитах длиной $L = 100$ м

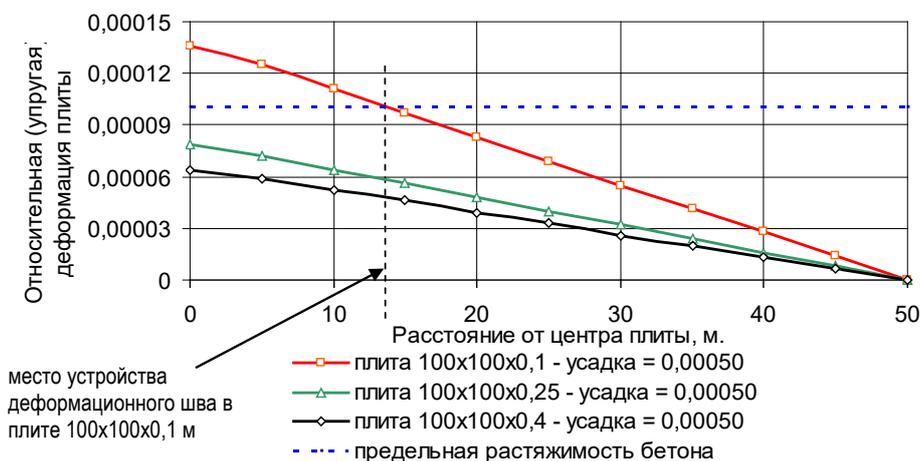


Рис. 1.7. Значения относительных (упругих) деформации в монолитных плитах длиной $L = 100$ м

Выводы:

1. Напряжения при сдвиге бетона по гравелистым грунтам, полученные на установке [10], значительно отличаются от напряжений при сдвиге бетона по зернистым основаниям, представленным в работах [6, 7, 8, 9]. Разница достигает 23%.
2. Деформации в плите 100x100x0,1 м. (см. рис. 1.7) достигают указанных предельных значений деформаций растяжимости бетона на расстоянии 37 м. от свободного края. Это указывает, что плита таких размеров не может быть реализована бесшовной,

требуется прорезка деформационного шва на указанном расстоянии от края плиты.

3. Расчет, реализованный на основе полученной диаграммы сдвига бетона по гравийному основанию [10], не разрешает проектировать бесшовными покрытия размерами 200x200 м и более, не зависимо от указанных размеров толщин плит. Как видно из рис. 1.9, в плите 100x100x0,1 м как было отмечено ранее, устройство шва требуется на расстоянии 37 м. В плите толщиной 0,25 м, на расстоянии 65 м, толщиной 0,4 м – на расстоянии 77 м.

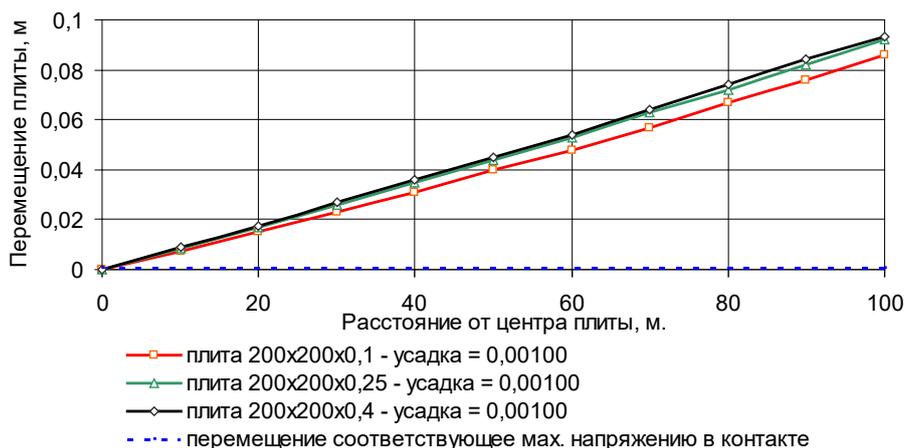


Рис.1.8. Значения перемещений в монолитных плитах длиной $L = 200$ м

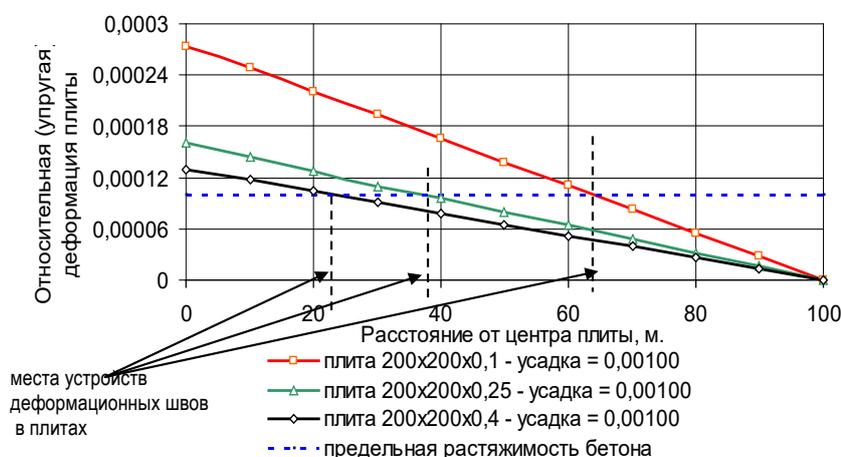


Рис. 1.9. Значения относительных (упругих) деформации в монолитных плитах длиной $L = 200$ м

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Строительные нормы и правила 2.03.13-88. Полы. – М: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. – 16 с.
2. Улицкий, И.И. Теория и расчёт железобетонных стержневых конструкций с учётом длительных процессов. – Киев: «Будівельник», 1967. – 346 с.
3. Улицкий, И.И. Расчёт железобетонных конструкций с учётом длительных процессов / И.И. Улицкий, Чжан Чжун-яо, А.Б. Голышев. – Киев: Госстройиздат УССР, 1960. – 495 с.
4. Pettersson, Dan. Stresses in concrete structures from ground restraint / Licentiate thesis., 1998. – Part I – 58с. Part II – 59с.
5. Zhang, J. Victor. Li. Influence of supporting base characteristics on shrinkage-induced stresses in concrete pavements / J. Zhang, Li. Victor // Journal of Transportation Engineering, №6, 2001. – vol.127.
6. Stott, J. Test on materials for use in sliding layers under concrete road slabs / Civ. Ingrg., 1961. – P. 663 – 655.
7. Wesevich, J. Mc-Cullough, B. Stabilized subbase friction study for concrete pavements / J. Wesevich, B. Mc-Cullough, N. Burns, H. // University of Texas at Austin, Austin, Tex. 1987. – P. 495.
8. Wimsatt, A. Mc-Cullough, B. Methods of analyzing and friction influencing frictional effects of study for subbase. / A. Wimsatt, B. Mc-Cullough, N. Burns // University of Texas at Austin, Austin, Tex. 1987.
9. Rozycki, D. Assessment of slab-base interaction in PCC airfield pavements / Rozycki, D, Rasmussen, R. // Innovations for The Next Century, ASCE, New York, 1998. – P. 403 – 422.
10. Исследование параметров диаграмм сдвига бетона по основанию и получение аналитических зависимостей развития деформаций сдвига в зависимости от типов оснований: перспективы развития новых технологий в строительстве и подготовка инженерных кадров Республики Беларусь: сб. тр. XV междунар. науч.-метод. Семинара: в 2-х т. / Под общ. Ред. Д.Н.Лазовского, А.А.Бакатовича. Новополоцк: ПГУ, 2008. – Т. II. – 233 с.

Материал поступил в редакцию 11.01.08

ZHELTKOVICH A.E. To calculation of shrinkable pressure in concrete plates at interaction

With the BASIS the Author's abstract At designing of concrete plates in the conditions of their interaction with the basis with-temporary SNiP 2.03.13-88 [1] recommends suit temperaturno-deformation seams not less often, than through 6 m structurally. Any technique by calculation of not cutting plates of the big extents, considering processes of temperature influences, shrinkage, proceeding in concrete during the period hardening, at interaction of a projected concrete layer with the basis is absent. In this work possibility of raschyio is intense-deformed conditions of a monolithic, concrete, seamless floor is considered. The decision is based on a basis of the known differential equation constructed with the account of the transformed diagram of shift of concrete on the basis. In the given work the analytical model of development of deformations shrinkage in a plate in the sizes 200x60x0,25 the m, projected in quality the basis in Minsk for le-dovoj arenas is considered. Parametres of this model are defined, and is executed analytical issledo-vanie a projected plate at various change of mechanical characteristics of be-tone.