$$\varphi^i(t,\mu,x,u) = x^i + \sum_{j=1}^{b} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s-,\mu,x,u))dH(s-1) +$$

$$+ \sum_{j=b+1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s,\mu,x,u))ds,$$

$$i = \overline{1,p}.$$

Здесь и далее в работе интеграл $\int_u^t f(x)dL(x)$ понимается в смысле Лебега-Стилтьеса на промежутке $(u;t]$, $x \in R^p$, $u \in R^q$ $\mu \in T$, $H(s)$ – функция Хевисайда, т.е. $H(s)=1$ при $s \geq 0$ и $H(s)=0$ при $s<0$. Существование и единственность решения системы (8) для всех значений параметров $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$ доказано в [8].

В дальнейшем под модулем вектора $X(t) = \left[x^1(t), x^2(t),...,x^p(t)\right]$ будем понимать $|x(t)| = \sum_{i=1}^{p} |x^i(t)|$. Функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица относительно переменной x, если существует постоянная M, такая, что $|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ для любых $t \in T$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ $\gamma^j(n) \to \infty$ *так, что для* $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ *и для* $j = \overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n \to 0$, *ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (8), если* $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0|dt \to 0$.

В частных случаях аналогичные результаты были получены в [9, 10].

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Antosik, P. Generalized functions and operational caculus / P. Antosik, J. Ligeza // Proc. Conf. – Varna, 1975. – P. 20–26.
2. Das, P.C. Czech. Math. J. / P.C. Das, R.R. Sharma – 1972. – V. 22. – № 1. – P. 145–158.
3. Colombeau, J. Elementary introduction to new generalized functions. – Amsterdam, 1985.
4. Антоневич, А.Б. Докл. АН СССР / А.Б.Антоневич, Я.В. Радыно. – 1991. – Т. 318. – № 2. – С. 267–270.
5. Лазакович, Н.В. Докл. АН Беларуси. – 1994. – Т. 38. – № 5. – С. 23–27.
6. Yablonski, A. Nonlinear Analysis. – 2005. – V. 63. – P. 171–197.
7. Каримова, Т.И. Вест. Белорус. гос. ун-та. // Сер. 1: Физика. Математика. Информатика. – 2009. – № 2. – С. 81–86.
8. Миллер, Б.М. / Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович – М.: Наука, 2005. – 429 с.
9. Жук, А.И. Тр. ин-та математики / А.И. Жук, О.Л. Яблонский – 2011. – Т. 19. – № 2. – С. 43–51.
10. Жук, А.И. Докл. Нац. акад. наук Беларуси / А.И. Жук, О.Л. Яблонский – 2015. – Т. 59. – № 2. – С. 17–22.

Материал поступил в редакцию 10.12.15

***ZHUK A.I.* Associated solutions of multidimensional nonautonomic differential equations with generalized coefficients**

We consider some multidimensional nonautonomic differential equations with generalized coefficients as an equation in differentials in the algebra new generalized functions. The associated solutions of such multidimensional differential equations are obtained.

УДК 517.91: 004.021

Швычкина Е.Н.

КОМПЬЮТЕРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Введение. Большой класс задач математической физики и нелинейной механики могут быть сведены при помощи допустимых функциональных преобразований к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

$$y'(x)y(x) - y(x) = F(x), \quad (1)$$

где $F(x)$ - некоторая гладкая функция [1, 2]. Дифференциальное уравнение (1) называется уравнением Абеля второго рода в нормальной форме [3, 4].

Дифференциальные уравнения Абеля первого и второго родов соответственно:

$$y' = a_0y^3 + a_1y^2 + a_2y + a_3, \quad (2)$$

$$(a_0y + a_1)y' = b_1y^2 + b_2y + b_3, \quad (3)$$

коэффициенты которых есть аналитические функции по x, посредством элементарных преобразований всегда можно перевести в нормальную форму вида (1) [Камке]. Там же для уравнения Абеля второго рода (3) приведено коэффициентное условие, при котором оно интегрируется. А именно, если переменные коэффициенты уравнения удовлетворяют следующему функциональному отношению:

$$a_1(2b_1 + a_0{'}_x) = a_0(b_2 + a_1{'}_x), \quad a_0 \neq 0, \quad (4)$$

тогда существует общий интеграл

$$\frac{a_0y^2 + 2a_1y}{a_0I} = 2\int \frac{b_3}{a_0I}dx + C, \quad (5)$$

где $I = exp\int \frac{2b_1}{a_0}dx$ и C – произвольная постоянная.

В работе [1] приведен аналитический метод построения точных аналитических решений для уравнения Абеля вида (1). Приведем кратко суть этого метода. Для уравнения (1) ищется решение в виде

$$y(x) = \varphi(x)n(x). \quad (6)$$

Подставим выражение (2) в уравнение (1), которое примет вид

$$\varphi^2nn'_x + \varphi \cdot \varphi'_x n^2 - \varphi n = F(x), \quad (7)$$

где функции $n(x)$, $\varphi(x)$ подлежат определению, для этого вве-

Швычкина Елена Николаевна, *к.ф-м.н., доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета. Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*

дем новую функцию $g(x)$ следующим образом:

$$(\varphi^2 n+g)n'_x-2F=(-\varphi^2 n+g)n'_x-2\varphi\varphi'_x n^2+2\varphi n.$$

Последнее уравнение распадется на два следующих уравнения:

$$(\varphi^2 n+g)n'_x-2F=G(x), \tag{8}$$

$$(-\varphi^2 n+g)n'_x-2\varphi\varphi'_x n^2+2\varphi n=G(x). \tag{9}$$

Здесь функции $g(x)$ и $G(x)$ – произвольные непрерывные функции. Несложно проверить, что переменные коэффициенты уравнений (8) и (9) удовлетворяют функциональному соотношению (4). Тогда получим вид общих решений этих уравнений:

1) для уравнения (8): $g=\varphi^2$, $n^2+2n-8\int\frac{G+2F}{\varphi^2}dx+C=0$;

2) для уравнения (9): $\varphi=\frac{x+2\lambda}{2}$,

$$n^2-2n+\frac{8}{(x+2\lambda)^4}\int(x+2\lambda)^2Gdx-\frac{C_1}{(x+2\lambda)^4}=0,$$

где λ – параметр, C, C_1 – постоянные интегрирования. Если $\lambda=0$, тогда $\varphi=\frac{x}{2}$. Предположим, что решение $y(x)$ уравнения (1) удовлетворяет условию $y(0)=y_0\neq 0$, тогда по формуле (6) получаем $y_0=0\cdot n(0)=0$. Что является невозможным, таким образом, получаем что $\lambda\neq 0$, $C=C_1=0$. Отсюда получаем, что для рассматриваемого уравнения (1) общее решение содержит лишь одну произвольную постоянную λ.

Объединяя полученные результаты, получим условия на функцию $G(x)$, которая подлежит определению:

$$\varphi=\frac{x+2\lambda}{2},\quad n^2+2n-8\int\frac{G+2F}{\varphi^2}dx=0,$$

$$n^2-2n+\frac{8}{(x+2\lambda)^4}\int(x+2\lambda)^2Gdx=0. \tag{10}$$

Решим два последних уравнения (10) относительно неизвестной функции $n(x)$, полагая, без потери общности, что существуют действительные решения. Приравняем найденные решения, получим следующее соотношение

$$\sqrt{1+8\int\frac{G}{(x+2\lambda)^2}dx+16\int\frac{F}{(x+2\lambda)^2}dx}=$$
$$=2+\sqrt{1-\frac{8}{(x+2\lambda)^4}\int(x+2\lambda)^2Gdx}. \tag{11}$$

Возведем в квадрат последнее равенство и продифференцируем по x. После преобразований получим следующее полукубическое уравнение

$$(1+N)^{3/2}-4(1+N)+$$
$$+\left(3+\frac{4(G+F)}{x+2\lambda}\right)(1+N)^{1/2}-4\frac{G+2F}{x+2\lambda}=0, \tag{12}$$

где

$$N(x)=8\int\frac{Gdx}{(x+2\lambda)^2}+16\int\frac{Fdx}{(x+2\lambda)^2}. \tag{13}$$

Преобразуем третье уравнение (10) следующим образом:

$$(n-1)^2=1-\frac{8}{(x+2\lambda)^4}\int(x+2\lambda)^2Gdx.$$

Используя равенство (11) и определение функции $N(x)$ (13), можно получить следующее функциональное равенство:

$$n(x)=\sqrt{1+N(x)}-1, \tag{14}$$

где $\sqrt{1+N(x)}$ – решение кубического уравнения (12). Таким образом, решение (6) уравнения Абеля (1) может быть определено следующим выражением

$$y(x)=\frac{x+2\lambda}{2}\cdot n(x), \tag{15}$$

содержащим неизвестную функцию $G(x)$. Продифференцируем (14) по переменной x:

$$n'_x=\frac{4(G+2F)}{(x+2\lambda)^2\sqrt{1+N}}. \tag{16}$$

Подставим функции (14)–(16) в уравнение (1):

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+N}-1+\frac{4(G+2F)}{(x+2\lambda)\sqrt{1+N}}\right)\left(\frac{x+2\lambda}{2}\right)\left(\sqrt{1+N}-1\right)-$$
$$-\frac{x+2\lambda}{2}\cdot\left(\sqrt{1+N}-1\right)=F.$$

Нетрудно убедиться, что последнее равенство преобразуется к уравнению (12), из чего следует, что функция $y(x)$ задаваемая уравнением (15), является общим решением уравнения Абеля (1). Аналогично доказывается, что функция $n(x)$ (14) удовлетворяет уравнениям (8), (9), при условии, что ее производная определяется формулой (16).

Определим функцию $G(x)$. Для этого из равенств (14) и (16) можно выразить $n+1=\frac{4(G+2F)}{(2\varphi)^2 n'_x}$, и подставим в уравнение (9):

$$\left(2-\frac{4(G+2F)}{(2\varphi)^2 n'_x}\right)\varphi^2 n'_x=2\varphi\varphi'_x n^2-2\varphi n+G(x).$$

После преобразований получаем следующее уравнение Риккати относительно неизвестной функции $n(x)$:

$$n'_x=\frac{\varphi'_x}{\varphi}n^2-\frac{1}{\varphi}n+\frac{G+F}{\varphi^2}. \tag{17}$$

Теорема 1. *Функция* $n(x)=\sqrt{1+N(x)}-1$ *есть частное решение уравнения (17), если только ее производная определяется равенством (16).*

Доказательство.

Подставим функции $n(x)=\sqrt{1+N(x)}-1$ и $\varphi=\frac{x+2\lambda}{2}$ в уравнение (17):

$$\frac{4(G+2F)}{(x+2\lambda)^2\sqrt{1+N}}=\frac{1}{x+2\lambda}\left(\sqrt{1+N(x)}-1\right)^2-$$
$$-\frac{2}{x+2\lambda}\left(\sqrt{1+N(x)}-1\right)+\frac{4(G+F)}{(x+2\lambda)^2},$$

$$\frac{4(G+2F)}{(x+2\lambda)\sqrt{1+N}}=(1+N)-2\sqrt{1+N}+$$

$$+1-2\sqrt{1+N}+2+\frac{4(G+F)}{x+2\lambda}.$$

Умножая последнее равенство на $\sqrt{1+N}$ и приводя подобные слагаемые, получим полукубическое уравнение (12). Ч. т. д.

Используем доказанный результат: если известно частное решение уравнения Риккати, тогда можно найти его общее решение [Камке]. Для уравнения (17) общее решение имеет вид:

$$n_1(x)=\left(\sqrt{1+N}-1\right)+A,\; A=\Phi(x)\left[C-\int_0^x\frac{\Phi(x)}{x+2\lambda}dx\right]^{-1},$$

$$\Phi(x)=exp\left(\int\frac{2\sqrt{1+N(x)}-4}{x+2\lambda}dx\right), \tag{18}$$

где C – произвольная постоянная. Для проверки полученного результата подставим общее решение (18) в уравнение (17).

$$\frac{N'_x}{2\sqrt{1+N}}+A'_x=\frac{1}{x+2\lambda}\left(\left(\sqrt{1+N}-1\right)+A\right)^2-$$

$$-\frac{2}{x+2\lambda}\left(\left(\sqrt{1+N}-1\right)+A\right)+\frac{G+F}{\varphi^2}.$$

Используя определение функции $N(x)$, т.е. формулу (13), преобразуем последнее равенство к виду:

$$\frac{4(G+2F)}{(x+2\lambda)^2\sqrt{1+N}}-\frac{\left(\sqrt{1+N}-1\right)^2}{x+2\lambda}+\frac{2\left(\sqrt{1+N}-1\right)}{x+2\lambda}-$$

$$-\frac{4(G+F)}{(x+2\lambda)^2}=-A'_x+\frac{2A\left(\sqrt{1+N}-1\right)}{x+2\lambda}++\frac{A^2}{x+2\lambda}-\frac{2A}{x+2\lambda}.$$

Левая часть полученного равенства тождественно равна нулю (см. доказательство теоремы 1), правая есть уравнение Бернулли относительно функции $A(x)$:

$$-A'_x+\frac{2A\left(\sqrt{1+N}-2\right)}{x+2\lambda}-\frac{A^2}{x+2\lambda}=0. \tag{19}$$

Выражение $A(x)$, заданное в (18), является общим решением уравнения (19), то есть обращает его тождественно в нуль. Отсюда следует, что функция $n_1(x)$ удовлетворяет уравнению Риккати (17), то есть является его общим решением. Более того, функция $n_1(x)$ из (19), для которой справедливо (16), должна удовлетворять уравнению Абеля (7). Подставим в (7) функции $n_1(x)$ из (18) и $\varphi=\frac{x+2\lambda}{2}$. Выделяя выражение, содержащее функцию $A(x)$, в правую часть равенства, получим:

$$\frac{4(G+2F)\left(\sqrt{1+N}-1\right)}{(x+2\lambda)^2\sqrt{1+N}}+\frac{\left(\sqrt{1+N}-1\right)^2}{x+2\lambda}-\frac{2\left(\sqrt{1+N}-1\right)}{x+2\lambda}=$$

$$-A'_x\left(\sqrt{1+N}-1+A\right)-A\left(\frac{2\left(\sqrt{1+N}-2\right)}{x+2\lambda}+\frac{4(G+2F)}{(x+2\lambda)^2\sqrt{1+N}}\right)-$$

$$-\frac{A^2}{x+2\lambda}+\frac{4F}{(x+2\lambda)^2}.$$

Левая часть равенства тождественно равна нулю, так как сводится к полукубическому уравнению (12). Исключим A'_x, используя уравнение (19), после преобразований получим кубическое уравнение относительно $(1+N)$.

$$2A(1+N)^{3/2}-\left(8A-A^2\right)(1+N)-$$

$$-\left(A^3+4A^2-8A-\frac{4F}{x+2\lambda}\right)(1+N)^{1/2}=\frac{4A(G+2F)}{x+2\lambda}. \tag{20}$$

Оба кубических уравнения (12) и (20) являются достаточными для исключения выражения $(1+N)$ и нахождения неизвестной функции $G(x)$. Однако уравнение (20) является сложным нелинейным интегральным уравнением, поэтому его решение в общем случае невозможно или крайне громоздко. Поэтому для нахождения функции $G(x)$ применим следующий прием. Будем искать такое решение уравнения Риккати (17), которое удовлетворяет следующим предельным соотношениям:

$$\lim_{x\to+\infty}n_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+N(x)}-1\right);$$

$$\lim_{x\to-\infty}n_1(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+N(x)}-1\right). \tag{21}$$

Сформулированные предельные равенства запишем в виде следующих равенств: $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\Phi'(x)dx=0$, $\lim_{x\to-\infty}\int_0^x\Phi'(x)dx=0$ или $\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi'(x)dx=0$. Рассмотрим, например, следующий несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}=0$. Откуда $\Phi(x)=-\frac{1}{x}$.

Из третьего равенства (18) получим функциональное равенство

$$\int\frac{2\sqrt{1+N(x)}-4}{x+2\lambda}dx=ln\left|-\frac{1}{x}\right|,\; \sqrt{1+N(x)}=\frac{3}{2}-\frac{\lambda}{x}. \tag{22}$$

Общее решение уравнения Риккати (17) примет вид

$$n_1(x)=\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{x}-\frac{2\lambda}{2Cx\lambda+x\,ln\,x-x\,ln(x+2\lambda)},$$

для которого несложно проверить выполнение предельных условий (21), а именно:

$$\lim_{x\to+\infty}n_1(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+N(x)}-1\right)=\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}n_1(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+N(x)}-1\right)=\frac{1}{2}.$$

Для нахождения функции $G(x)$ продифференцируем равенство (22) по x, используя (16), получим следующее уравнение:

$$\frac{4(G+2F)}{(x+2\lambda)^2(3/2-\lambda/x)}=\frac{\lambda}{x^2}.$$

Решая последнее равенство относительно G, получим:

$$G(x)=\frac{\lambda(3x-2\lambda)(x+2\lambda)^2-16x^3F}{8x^3}. \tag{23}$$

Доказали следующее.

Теорема 2. *Для дифференциального уравнения Абеля второго рода, записанного в нормальной форме (1), где $F(x)$ – произвольная гладкая функция переменной x, общее решение имеет вид:*

$$y(x)=\frac{x+2\lambda}{2}\cdot\left(\sqrt{1+N(x)}-1\right).$$

где λ *– произвольная постоянная,* $\sqrt{1+N(x)}$ *– решение кубического уравнения (12), включающее в себя функцию* $G(x)$ *из (23).*

Приведем ниже компьютерную реализацию описанного выше аналитического метода СКА *Mathematica* [5].

Пример.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида:

$$y'(x)y(x)-y(x)=x. \qquad (24)$$

Определим уравнение (24) как **eq1**:

eq1=y[x](y'[x]-1)=x;

После применения к **eq1** команды **DSolve** [6], найдем общий интеграл дифференциального уравнения (24).

$$\frac{1}{10}\left(\left(5+\sqrt{5}\right)ln\left(\sqrt{5}+1-\frac{2y(x)}{x}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(5-\sqrt{5}\right)ln\left(\sqrt{5}-1+\frac{2y(x)}{x}\right)\right)+ln\,x=c_1, \qquad (25)$$

где c_1 – произвольная постоянная. Для уравнения (24) определим вид функций $G(x)$. Согласно соотношению (23) получаем, что

$$F(x)=x\quad G(x)=\frac{\lambda(3x-2\lambda)(2\lambda+x)^2-16x^4}{8x^3}.$$

Применим рассмотренный выше аналитический метод для нахождения решения дифференциального уравнения (24). Составим систему алгебраических уравнений sys и исключим из нее выражение $ex[x]=\sqrt{1+N(x)}$:

$$\mathbf{genAb}=\frac{1}{2}(\mathbf{x}+2\boldsymbol{\lambda})(\mathbf{ex[x]}-1)==\mathbf{y[x];}$$

$$\mathbf{eq2=ex[x]\text{^}3\text{-}4ex[x]\text{^}2}+\left(3+\frac{\mathbf{4(G+F)}}{\mathbf{x}+2\boldsymbol{\lambda}}\right)\mathbf{ex[x]}\text{-}\frac{\mathbf{4(G+2F)}}{\mathbf{x}+2\boldsymbol{\lambda}}==\mathbf{0;}$$

$$\mathbf{sys=\{genAb,eq2/.F->x/.G(x)->}$$
$$\mathbf{>\frac{\boldsymbol{\lambda}(3x-2\boldsymbol{\lambda})(2\boldsymbol{\lambda}+x)^2-16x^4}{8x^3}\}//Simplify;}$$

genAb1 = Eliminate[sys,ex[x]]//Simplify

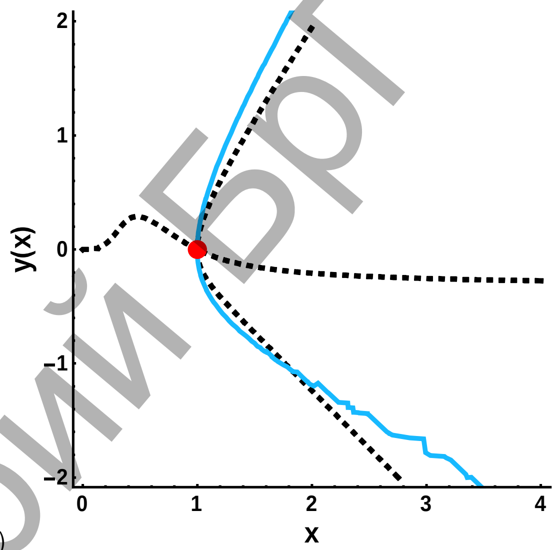
$$y[x]\left(-12x^2-29x\lambda+\frac{24\lambda^3}{x}-\frac{16\lambda^5}{x^3}\right.$$
$$\left.-4(x+2\lambda)y[x]+8y[x]^2\right)==4x(x+2\lambda)^2 \qquad (26)$$
$$\wedge x\neq 0\wedge x+2\lambda\neq 0.$$

Таким образом, (26) – общий интеграл дифференциального уравнения (24), найденный при помощи описанного выше аналитического метода, где λ – произвольная постоянная.

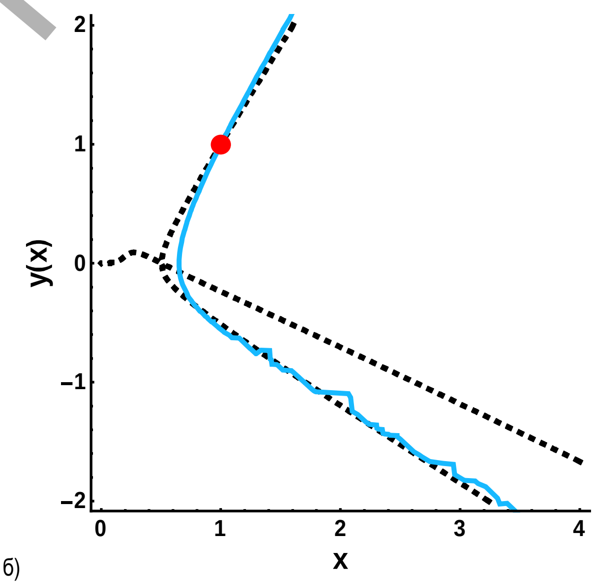
Оба аналитических решения уравнения (24), а именно (25) и (26), имеют не одинаковый вид. Это связано с тем, что решение (25) было найдено при помощи классических методов интегрирования. В нашем случае это было выполнено в СКА Mathematica при помощи применения команды **DSolve** [6]. Решение (26), найденое при помощи аналитического метода, описанного в работе [1], который содержит метод предельного перехода при нахождении функции $G(x)$, а именно – для поиска общего решения уравнения Риккати (17) не были применены точные аналитические методы. Вид решения $n_1(x)$ определен исходя из предельных соотношений (17). В данной работе для соотношений (17) была определена, например, функция $\Phi(x)=-\frac{1}{x}$. В работе [1] авторы предложили функцию вида $\Phi(x)=-Ci(\xi)=-\int_{\xi}^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ – интегральный косинус [7], где $\xi=ln|x+2\lambda|$.

Покажем, что решение задачи Коши для дифференциального уравнения (24) можно получить как при помощи решения (25), так и (26).

На рисунке 1 приведены кривые, полученные из (25) и (26) при начальных условиях $y(1)=0$ (рис. 1а) и $y(1)=1$ (рис. 1б). При этом сплошная линия – это кривая, полученная из равенства (25), пунктирная – из равенства (26), точкой обозначены начальные условия. Из вида кривых можно заключить, что в небольшой окрестности точки, задающей начальные условия, кривые совпадают.



а)



б)

а) решение задачи Коши: (24), $y(1)=0$; б) решение задачи Коши: (24), $y(1)=1$

Рис. 1. Графики $y(x)$ решений дифференциального уравнения (24)

Заключение. В работе представлен математический метод сведения дифференциального уравнения Абеля к кубическому уравнению, который использует нескольких допустимых функциональных преобразований, что позволяет строить аналитические решения при помощи известных табличных функций для уравнения Абеля (1), записанного в нормальной форме. Приведена программная реализация такого метода. На примере уравнения Абеля, которое интегрируется при помощи классического метода, построено также аналитическое решение, определенное через специальное кубическое алгебраическое уравнение. Показано, что для нового решения уравнения Абеля (26) и классического решения (25) задача Коши разрешима.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Panayotounakos, D.E. Exact analytic solutions of the Abel, Emden-Fowler and generalized Emden–Fowler nonlinear ODEs / D.E. Panayotounakos, D.C. Kravvaritis // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2006. – Vol. 7. – P. 634–650.
2. Panayotounakos, D.E. Exact analytic solutions for the damped Duffing nonlinear oscillator / D.E. Panayotounakos, E.E. Theotokoglou, M.P. Markakis, C.R. Mecanique. – 2006. – Vol. 334. – P. 311–316.
3. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. − М.: Наука, 1971. – 576 с.
4. Зайцев, В.Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин. − М.: Физматлит, 2001. – 576 с.
5. Wagon, S. Mathematica in action: problem solving through visualization and computation / S. Wagon. – 3rd ed. – New York: Springer, 2010. – 578 p.
6. Режим доступа: .http://reference.wolfram.com/language/tutorial/DSolveOverview.html
7. Gradshteyn, I.S. Table of Integrals, Series and Products / I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik. – Seventh Edition. – Academic Press: New York, San Francisco, London, 2007. – 1172 p.

Материал поступил в редакцию 19.01.16

SHVYCHKINA A.N. Computer realization of the analytical method of integrating the equations of Abel

In this paper we represent a mathematical technique leading to the construction of exact analytic solutions the Abel equation. The examined nonlinear ODEs admit exact analytic solutions in terms of known tabulated functions. The computer method of building a general solution the Abel differential equation and example are considered.

УДК 517.91, 004.9

Chichurin A.V., Stepaniuk G.P.

COMPUTER CONSTRUCTION OF THE GENERAL SOLUTION OF THE SPECIAL FORM OF THE ABEL DIFFERENTIAL EQUATION

1. Introduction and statement of the problem

In the papers [1, 2] the method of construction of the nonlinear differential equation of the second order of the form

$$a(x)\ y''+b_0(x)y'^3+b_1(x)y'^2+b_2(x)y'+b_3(x)=0, \qquad (1)$$

the general solution of which has a special form

$$\varphi_3(x)=C_1\varphi_1(x)\cdot exp\left(\lambda_1\ y(x)\right)+C_2\varphi_2(x)\cdot exp\left(\lambda_2\ y(x)\right), \qquad (2)$$

where $C_i\ (i=1,2)$ are arbitrary constants, $\varphi_j(x)\ \ (j=1,2,3)$ are given twice continuously differentiable functions of variable x; λ_1, λ_2 are given constants was considered. Such problems are classical problems of the theory differential equations. For example, in the paper [3] the following formulation of the problem is given: "setting the form of a differential equation, it is necessary to seek different forms of a general solution of this equation and existence conditions of these forms". This task is interesting and because the equation (1) by substitution

$$y'=z, \qquad (3)$$

reduces to the Abel equation of the first kind [4]

$$a(x)\ z'+b_0(x)z^3+b_1(x)z^2+b_2(x)z+b_3(x)=0 \qquad (4)$$

which plays an important role in the theory of differential equations and its numerous applications [5, 6].

In this article the program listing by which the analytical method is implemented for the two differential equations (1) and (4) is given. We also give a visualization of the obtained partial solutions.

Considered analytical method based on the following two theorems, which have been proven in [1, 2].

Theorem 1. *Equation (1) has a general solution of the form*

$$C_1\cdot exp\left(\lambda_1\ y-\ \int\eta\ dx\right)+C_2\cdot exp\left(\lambda_2\ y+\ \int\xi\ dx\right)=1, \qquad (5)$$

if the conditions

$$\frac{1}{b_0}\left[(\lambda_1^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_2^2)a^2+3(b_0b_2+b_0a'-a\ b_0')-b_1^2\right]=0, \qquad (6)$$

$$(2\ \lambda_1^3-3\lambda_1^2\cdot\lambda_2-3\ \lambda_1\cdot\lambda_2^2+2\ \lambda_2^3)a^3-3(\lambda_1^2-\lambda_1\ \lambda_2+\lambda_2^2)a^2\cdot b_1+$$
$$+b_1^3+9b_0\ \ (b_1'a-a'\ b_1-3b_0\ b_3)=0 \qquad (7)$$

fulfilled and the relations

$$\xi=\frac{\lambda_2}{3\ b_0}\left(\ b_1-(\lambda_2-2\lambda_1)\ a\right),\quad \eta=\frac{\lambda_1}{3\ b_0}\left(-\ b_1+(\lambda_1-2\lambda_2)\ a\right) \qquad (8)$$

are held.

Чичурин Александр Вячеславович, *д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и математической физики Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки.*

Степанюк Галина Петровна, *старший лаборант кафедры дифференциальных уравнений и математической физики Восточноевропейского национального университета имени Леси Украинки.*

Украина, 4300, г. Луцк, пр. Воли, 13.