CHICHURIN A.V., STEPANYK G.P. Computer construction of the general solution of the special form of the Abel differential equation

The computer method of building a general solution of the special form for the nonlinear differential equation of the second order and the Abel differential equation of the first kind is considered. Three examples which contain the solutions of the initial problem are presented.

The module allowing to visualize partial solutions of the Abel differential equation for the given values of parameters has been built. For the obtained solutions the visualization in the real numbers domain is represented. All the calculations and visualizations are realized in the *Mathematica* 10 system.

УДК 519.2:004.6

Махнист Л.П., Каримова Т.И., Рубанов В.С., Гладкий И.И.

О МЕДИАНЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА И НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Введение. Вначале приведем некоторые теоретические сведения, обозначения, используемые в работе.

Пуассона распределение – распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \dots$ с вероятностями $P(X = k) = p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, где $\lambda > 0$ – параметр.

Функция распределения закона Пуассона:

$F(x) = P(X < x) = 0$, если $x \le 0$,

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k=0}^{x-1} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{x-1}\frac{\lambda^k}{k!},$$ если $x \in N$ и

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k=0}^{[x]} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{[x]}\frac{\lambda^k}{k!},$$ если $x > 0$, $x \notin N$, где $[x]$ – целая часть числа x.

Или $$F(x) = P(X < x) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\lceil x\rceil-1}\frac{\lambda^k}{k!},$$ если $x > 0$, где $\lceil x\rceil$ – наименьшее целое, большее или равное x: $\lceil x\rceil = \min\{n \in Z \mid n \ge x\}$).

Рассмотрим функцию

$$F(m+1,\lambda) = 1 - \frac{\gamma(m+1,\lambda)}{m!} = 1 - \frac{1}{m!}\int_0^\lambda t^m e^{-t}dt,$$

где $\gamma(m,\lambda) = \int_0^\lambda t^{m-1}e^{-t}dt$ – неполная нижняя гамма-функция (например, в [1]).

Заметим, что

$$F(1,\lambda) = 1 - \frac{1}{0!}\int_0^\lambda t^0 e^{-t}dt =$$

$$= 1 - \int_0^\lambda e^{-t}dt = 1 + e^{-t}\Big|_0^\lambda = e^{-\lambda} = p_0.$$

Используя метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим:

$$F(m+1,\lambda) = 1 - \frac{1}{m!}\int_0^\lambda t^m e^{-t}dt =$$

$$= 1 + \frac{1}{m!}\int_0^\lambda t^m de^{-t} = 1 + \frac{1}{m!}\left(t^m e^{-t}\Big|_0^\lambda - \int_0^\lambda e^{-t}dt^m\right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{m!}\left(\lambda^m e^{-\lambda} - m\int_0^\lambda e^{-t}t^{m-1}dt\right) =$$

$$= 1 + \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} - \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\lambda e^{-t}t^{m-1}dt =$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} + F(m,\lambda) = p_m + F(m,\lambda) = \dots =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} p_k + F(1,\lambda) = \sum_{k=0}^{m} p_k.$$

Следовательно, функцию распределения $F(x)$ можно определить следующим образом:

$F(x) = P(X < x) = 0$, если $x \le 0$,

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k=0}^{x-1} p_k = F(x,\lambda) =$$

$$= 1 - \frac{1}{(x-1)!}\int_0^\lambda t^{x-1}e^{-t}dt,$$

если $x \in N$ и

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k=0}^{[x]} p_k = F([x]+1,\lambda) =$$

$$= 1 - \frac{1}{[x]!}\int_0^\lambda t^{[x]}e^{-t}dt,$$

если $x > 0$, $x \notin N$.

Или

$$F(x) = P(X < x) = \sum_{k=0}^{\lceil x\rceil-1} p_k = F(\lceil x\rceil,\lambda) =$$

$$= 1 - \frac{1}{(\lceil x\rceil-1)!}\int_0^\lambda t^{\lceil x\rceil-1}e^{-t}dt,$$

если $x > 0$.

Махнист Леонид Петрович, *к.т.н., доцент, заведующий кафедрой высшей математики Брестского государственного технического университета.*

Каримова Татьяна Ивановна, *к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*

Рубанов Владимир Степанович, *к.ф.-м.н., доцент, проректор по научной работе Брестского государственного технического университета.*

Гладкий Иван Иванович, *доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Репозиторий БрГТУ

Заметим, что для любого целого неотрицательного числа m выполняется:

$$\frac{1}{m!}\int_0^{+\infty} t^m e^{-t}dt = -\frac{1}{m!}\int_0^{+\infty} t^m de^{-t} =$$

$$= -\frac{1}{m!}\left(t^m e^{-t}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t}dt^m\right) =$$

$$= -\frac{1}{m!}\lim_{t\to+\infty} t^m e^{-t} + \frac{m}{m!}\int_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\int_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-t}dt =$$

$$= \ldots = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = -\left(\lim_{t\to+\infty} e^{-t} - 1\right) = 1.$$

Действительно, $\Gamma(m+1) = m!$, где $\Gamma(m) = \int_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-t}dt$ – гамма-функция Эйлера (например, в [1]).

Следовательно,

$$F(m+1,\lambda) = 1-\frac{1}{m!}\int_0^{\lambda} t^m e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{m!}\int_0^{+\infty} t^m e^{-t}dt - \frac{1}{m!}\int_0^{\lambda} t^m e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{m!}\int_{\lambda}^{+\infty} t^m e^{-t}dt = \frac{\Gamma(m+1,\lambda)}{m!},$$

где $\Gamma(m,\lambda) = \int_{\lambda}^{+\infty} t^{m-1}e^{-t}dt$ – неполная верхняя гамма-функция (например, в [1]).

Рассмотрим числовые последовательности: $x_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!}$ и $y_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}$.

Утверждение. Последовательность $x_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!}$ является убывающей.

Доказательство. Так как

$x_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!} = F(m+1,m) = 1-\frac{1}{m!}\int_0^m t^m e^{-t}dt$, то, используя метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим:

$$x_m - x_{m-1} = 1-\frac{1}{m!}\int_0^m t^m e^{-t}dt - \left(1-\frac{1}{(m-1)!}\int_0^{m-1} t^{m-1}e^{-t}dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{m!}\int_0^m t^m e^{-t}dt + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^{m-1} t^{m-1}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{m!}\int_0^m t^m de^{-t} + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^{m-1} t^{m-1}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{m!}\left(t^m e^{-t}\Big|_0^m - \int_0^m e^{-t}dt^m\right) +$$

$$+ \frac{1}{(m-1)!}\int_0^{m-1} t^{m-1}e^{-t}dt = \frac{m^m e^{-m}}{m!} - \frac{m}{m!}\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt +$$

$$+ \frac{1}{(m-1)!}\int_0^{m-1} t^{m-1}e^{-t}dt = \frac{m^{m-1}e^{-m}}{(m-1)!} -$$

$$- \frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt - \int_0^{m-1} t^{m-1}e^{-t}dt\right) = \frac{m^{m-1}e^{-m}}{(m-1)!} -$$

$$- \frac{1}{(m-1)!}\int_{m-1}^{m} t^{m-1}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left(m^{m-1}e^{-m} - \int_{m-1}^{m} t^{m-1}e^{-t}dt\right).$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(t^{m-1}e^{-t}\right) = (m-1)t^{m-2}e^{-t} - t^{m-1}e^{-t} =$$

$$= t^{m-2}e^{-t}(m-1-t) \le 0,$$

если $t \ge m-1$. Тогда $\min\limits_{[m-1;\,m]}\left(t^{m-1}e^{-t}\right) = m^{m-1}e^{-m}$.

Так как

$$\int_{m-1}^{m} t^{m-1}e^{-t}dt > \int_{m-1}^{m} \min_{[m-1;\,m]}\left(t^{m-1}e^{-t}\right)dt =$$

$$= m^{m-1}e^{-m}\int_{m-1}^{m} dt = m^{m-1}e^{-m},$$

то $x_m < x_{m-1}$, т.е. последовательность $x_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!}$ является убывающей.

Утверждение. Последовательность $y_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}$ является возрастающей.

Доказательство. Так как

$y_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!} = F(m,m) = 1-\frac{1}{(m-1)!}\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt$,

то, используя метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим:

$$y_m - y_{m-1} = 1-\frac{1}{(m-1)!}\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt -$$

$$-\left(1-\frac{1}{(m-2)!}\int_0^{m-1} t^{m-2}e^{-t}dt\right) = \frac{1}{(m-2)!}\int_0^{m-1} t^{m-2}e^{-t}dt -$$

Репозиторий БрГТУ

$$-\frac{1}{(m-1)!}\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^{m-1} e^{-t}dt^{m-1} -$$

$$-\frac{1}{(m-1)!}\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left(t^{m-1}e^{-t}\Big|_0^{m-1} - \int_0^{m-1} t^{m-1}de^{-t}\right) -$$

$$-\frac{1}{(m-1)!}\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt = \frac{(m-1)^{m-1}e^{-m+1}}{(m-1)!} +$$

$$+\frac{1}{(m-1)!}\int_0^{m-1} t^{m-1}e^{-t}dt - \frac{1}{(m-1)!}\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{(m-1)^{m-1}e^{-m+1}}{(m-1)!} -$$

$$-\frac{1}{(m-1)!}\left(\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt - \int_0^{m-1} t^{m-1}e^{-t}dt\right) =$$

$$= \frac{(m-1)^{m-1}e^{-m+1}}{(m-1)!} - \frac{1}{(m-1)!}\int_{m-1}^m t^{m-1}e^{-t}dt =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\left((m-1)^{m-1}e^{-m+1} - \int_{m-1}^m t^{m-1}e^{-t}dt\right).$$

Заметим, что

$$\frac{d}{dt}\left(t^{m-1}e^{-t}\right) = (m-1)t^{m-2}e^{-t} - t^{m-1}e^{-t} =$$

$$= t^{m-2}e^{-t}(m-1-t) \le 0,$$

если $t \ge m-1$. Тогда $\max\limits_{[m-1;m]}\left(t^{m-1}e^{-t}\right) = (m-1)^{m-1}e^{-(m-1)}$.

Так как

$$\int_{m-1}^m t^{m-1}e^{-t}dt < \int_{m-1}^m \max_{[m-1;m]}\left(t^{m-1}e^{-t}\right)dt =$$

$$= (m-1)^{m-1}e^{-m+1}\int_{m-1}^m dt = (m-1)^{m-1}e^{-m+1},$$

то $y_m > y_{m-1}$, т.е. последовательность $y_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}$ является возрастающей.

Утверждение. Последовательности $x_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!}$ и $y_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}$ являются ограниченными.

Доказательство. Очевидно, что $x_m > 0$ и $y_m > 0$. С другой стороны, учитывая разложение функции e^x в ряд Тейлора $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$, получим $x_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!} < e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{m^k}{k!} = e^{-m}\cdot e^m = 1$ и $y_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!} < e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{m^k}{k!} = e^{-m}\cdot e^m = 1$.

Следовательно, $0 < x_m < 1$ и $0 < y_m < 1$, т.е. последовательности $x_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!}$ и $y_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}$ являются ограниченными.

Утверждение. Для последовательностей $x_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!}$ и $y_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}$ выполняется $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m$.

Доказательство. Так как пределы последовательностей x_m и y_m существуют, то

$$\lim_{m\to\infty} x_m - \lim_{m\to\infty} y_m = \lim_{m\to\infty}\left(x_m - y_m\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!} - e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}\right) = \lim_{m\to\infty} e^{-m}\frac{m^m}{m!}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{m\to\infty} x_m - \lim\limits_{m\to\infty} y_m = \lim\limits_{m\to\infty} e^{-m}\frac{m^m}{m!} \ge 0$.

Учитывая формулу Стирлинга (например, в [2]) $m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m} < m! < m^m e^{-m+\frac{1}{12m}}\sqrt{2\pi m}$, имеем $\frac{m^m e^{-m}}{m!} < \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}$.

Тогда

$$\lim_{m\to\infty} x_m - \lim_{m\to\infty} y_m = \lim_{m\to\infty} e^{-m}\frac{m^m}{m!} \le \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi m}} = 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m$.

Утверждение. Для последовательностей $x_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!}$ и $y_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}$ выполняется равенство пределов: $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m = 0{,}5$ и выполняются неравенства: $0{,}5 < x_m \le x_1 = 2e^{-1}$ и $e^{-1} = y_1 \le y_m < 0{,}5$.

Доказательство. Пусть распределение случайной величины X задаётся плотностью вероятности, имеющей вид:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \dfrac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)}, & x \ge 0 \end{cases},$$

где $\Gamma(m) = \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-t}dt$ – гамма-функция Эйлера.

Тогда говорят, что случайная величина X имеет гамма-распределение с параметром m, и пишут $X \sim Gamma(m)$. Заметим, что гамма-распределение имеет математическое ожидание и дисперсию, которые равны параметру распределения m.

Согласно центральной предельной теореме, при больших m гамма-распределение может быть приближено нормальным распределением:

$$Gamma(m) \approx \mathrm{N}\left(a;\sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$$

с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2, для которых $a = \sigma^2 = m$.

Репозиторий БрГТУ

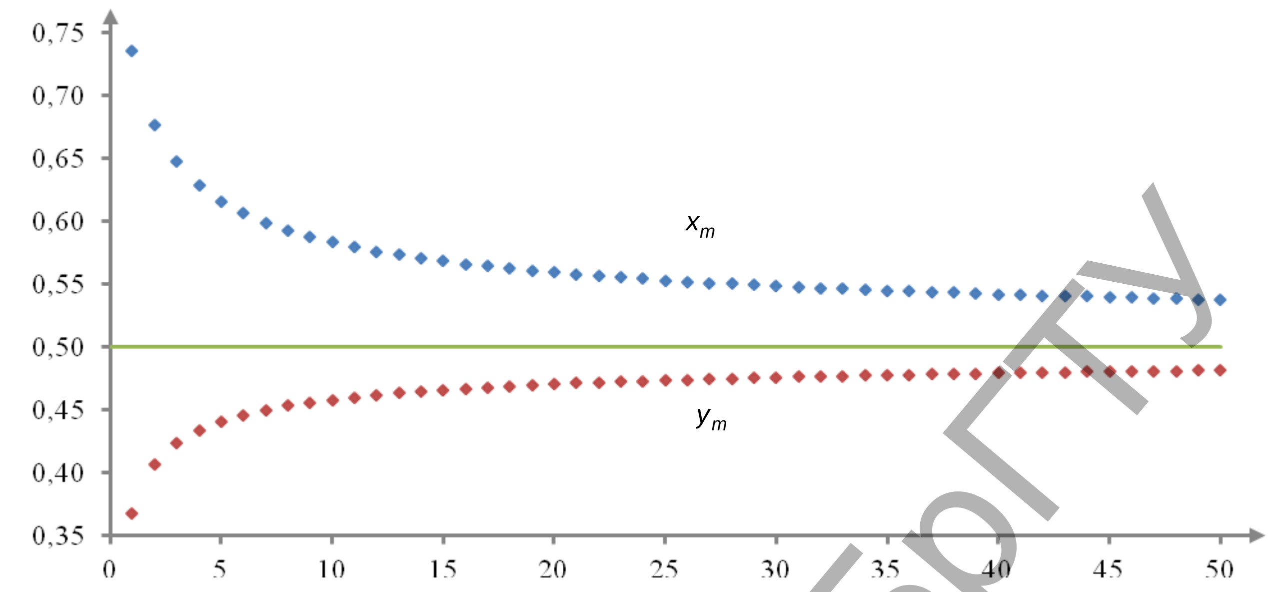

Рис. 1. Числовые последовательности x_m и y_m $(m = \overline{1,50})$

Следовательно, $\frac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2m}}$ при больших m.

Тогда, учитывая, что $\Gamma(m) = (m-1)!$ $(m \in N)$, и используя метод замены переменной в определенном интеграле, получим:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt = \int_0^m \frac{t^{m-1}e^{-t}}{\Gamma(m)}dt \approx$$

$$\approx \int_0^m \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2m}}dt = \left| \begin{matrix} t = m - u\sqrt{m} \\ dt = -\sqrt{m}du \end{matrix} \right| = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\sqrt{m}}^{0} e^{-\frac{u^2}{2}}du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{m}} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi\left(\sqrt{m}\right)$$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$

– интеграл вероятностей (например, в [2]).

Таким образом, при больших m выполняется $y_m \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{m}\right)$.

Учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 0{,}5$, получим:

$$\lim_{m\to\infty} y_m = 1 - \lim_{m\to\infty}\Phi\left(\sqrt{m}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 1 - 0{,}5 = 0{,}5.$$

Заметим так же, что при больших m выполняется: $x_m \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{m}\right)$, так как $\lim_{m\to\infty} x_m = \lim_{m\to\infty} y_m$.

Следовательно, выполняются неравенства: $0{,}5 < x_m \le x_1 = 2e^{-1}$ и $e^{-1} = y_1 \le y_m < 0{,}5$.

На рис. 1 изображены числовые последовательности x_m и y_m $(m = \overline{1,50})$.

Утверждение. Для любого целого неотрицательного числа m существует единственное решение уравнения $F(m+1,\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} = 0{,}5$ относительно λ, принадлежащее интервалу $(m, m+1)$.

Доказательство. Функция $F(m+1,\lambda) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}$ для любого целого неотрицательного числа m является убывающей, так как

$$F'_\lambda(m+1,\lambda) = \left(e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}\right)'_\lambda =$$

$$= e^{-\lambda}\left(-\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m}\frac{k\lambda^{k-1}}{k!}\right) =$$

$$= e^{-\lambda}\left(-\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=1}^{m}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right) = e^{-\lambda}\left(-\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda^k}{k!}\right) =$$

$$= -e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} = -p_m < 0$$ или

$$F'_\lambda(m+1,\lambda) = \left(1 - \frac{1}{m!}\int_0^\lambda y^m e^{-y}dy\right)'_\lambda = -\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} < 0.$$

Так как

$$F(m+1, m+1) = e^{-m-1}\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+1)^k}{k!} = y_{m+1} < 0{,}5$$ и

$$F(m+1, m) = e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!} = = x_m > 0{,}5$$, то для любого целого неотрицательного числа m существует единственное $\lambda_m \in (m, m+1)$ такое, что $F(m+1,\lambda_m) =$

$$= e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!} = 0{,}5.$$

Репозиторий БрГТУ

Пусть целая часть числа параметра распределения λ равна $[\lambda] = m$. Тогда существует единственное решение $\lambda_m \in (m, m+1)$ уравнения $F(m+1, \lambda) =$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} = 0{,}5,$$ т.е. выполняется $e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!} = 0{,}5$.

Заметим, что для действительной случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ медианой называется число $M_e(X) = m_e$, которое удовлетворяет условиям $F(m_e) \le 0{,}5$ (или $P(X \ge m_e) \ge 0{,}5$) и $F(m_e + 0) = \lim\limits_{x \to m_e + 0} F(x) \ge 0{,}5$ (или $P(X \le m_e) \ge 0{,}5$).

Если $\lambda \in [m, \lambda_m)$ и, учитывая неравенства

$$e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda^k}{k!} \le y_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!} < e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!} =$$

$$= 0{,}5 < e^{\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} \le e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!} = x_m,$$

получим, что

$$F(m) = P(X < m) = \sum_{k=0}^{m-1} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda^k}{k!} < 0{,}5$$ и

$$F(m+0) = P(X \le m) = \sum_{k=0}^{m} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} > 0{,}5$$

и, следовательно, $[\lambda] = m$ единственная медиана закона Пуассона с параметром λ.

Заметим тогда, что если $\lambda = m \in N$, то λ единственная медиана закона Пуассона.

Если $\lambda \in (\lambda_m, m+1)$ и, учитывая неравенства

$$y_{m+1} = e^{-m-1}\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+1)^k}{k!} < e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} < e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!} =$$

$$= 0{,}5 < x_{m+1} = e^{-m-1}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{(m+1)^k}{k!} < e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\lambda^k}{k!},$$

получим, что

$$F(m+1) = P(X < m+1) = \sum_{k=0}^{m} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} < 0{,}5,$$

$$F((m+1)+0) = P(X \le m+1) = \sum_{k=0}^{m+1} p_k =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\lambda^k}{k!} > 0{,}5,$$

и, следовательно, $[\lambda] = [\lambda] + 1 = m + 1$ единственная медиана закона Пуассона с параметром λ.

Пусть $\lambda = \lambda_m$.

Если $x \in (m, m+1)$, то

$$F(x) = P(X \le m) = e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!} = 0{,}5,$$

$$F(x+0) = P(X \le m) = e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!} = 0{,}5$$ и,

следовательно, любое число из интервала $(m, m+1)$ является медианой закона Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_m$.

Если $x = m$, то

$$F(x) = P(X < m) = e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\lambda_m^k}{k!} < e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!} = 0{,}5,$$

$$F(x+0) = P(X \le m) = e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!} = 0{,}5$$ и,

следовательно, $x = m$ является медианой закона Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_m$.

Если $x = m + 1$, то

$$F(x) = P(X < m+1) = P(X \le m) = e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!} = 0{,}5,$$

$$F(x+0) = P(X \le m+1) =$$

$$= e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m+1}\frac{\lambda_m^k}{k!} > e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!} = 0{,}5,$$

и, следовательно, $x = m + 1$ также является медианой закона Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_m$.

Таким образом, если $\lambda = \lambda_m$, то любое число из отрезка $[m, m+1]$ является медианой закона Пуассона с параметром $\lambda = \lambda_m$.

Заключение. Если параметр λ распределения Пуассона является натуральным числом, то медиана такого распределения равна этому параметру. Если параметр λ распределения Пуассона не является натуральным числом, то медиана такого распределения равна или целой части параметра распределения $[\lambda]$, если $\lambda < \lambda_m$, или $[\lambda] = [\lambda] + 1$, если $\lambda > \lambda_m$, или принадлежит интервалу $[[\lambda], [\lambda] + 1]$, если параметр λ распределения равен $\lambda_m \in (m, m+1)$ – решению уравнения

$$e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!} = 0{,}5,$$ где $[\lambda] = m$.

Легко проверить, например, следующее: медиана распределения Пуассона равна 0, если параметр распределения λ удовлетворяет неравенству $\lambda < \ln 2$, равна 1, если параметр распределения λ удовлетворяет неравенству $\ln 2 < \lambda \le 1$, и принадлежит интервалу $[0, 1]$, если параметр распределения равен $\ln 2$.

Таким образом, можно сделать следующий вывод, что медиана распределения Пуассона может быть равна целой части параметра λ распределения $[\lambda]$ или $[\lambda] = [\lambda] + 1$, если функция распределения $F(x)$ и медиана $M_e(X) = m_e$ закона распределения определятся приведенными выше соотношениями, как, например, в [3].

Можно предположить, что исследование последовательностей вида $x_m(p) = e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+p)^k}{k!}$ и $y_m(p) = e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(m+p)^k}{k!}$ ($0 < p < 1$) даст возможность получить простые формулы для медианы закона Пуассона.

Репозиторий БрГТУ

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ
1. Янке, Е. Специальные функции: формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. – М.: Наука, 1968. – 344 с.
2. Корн, Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.А. Корн, Т.М. Корн. – М.: Наука, 1984. – 832 с.
3. Математическая энциклопедия: в 5 т. / Гл. ред. И.М. Виноградов. – М.: Советская энциклопедия 1977–1985.

Материал поступил в редакцию 25.01.16

MAKHNIST L.P., KARIMOVA T.I., RUBANOV V.S., HLADKI I.I. On the median of the Poisson distribution law and some numerical sequences

The work considers some numerical sequences connected with the function of the Poisson distribution law. The convergence of these sequences is being proved. An approach is offered to analyse such numerical sequences of a more common pattern, which allows to search out simple formulae for calculating the median of the Poisson law.

УДК 316.77

Бурко О.П., Данилов Ю.Д.

ИССЛЕДОВАНИЕ МОТИВАЦИЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СЕТИ ИНТЕРНЕТ СТУДЕНТАМИ ФАКУЛЬТЕТА ЭЛЕКТРОННО-ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ БрГТУ

Введение. Компьютерные технологии и Интернет уже прочно стали неотъемлемым атрибутом учебной и профессиональной деятельности. В ряде исследований отмечается, что наиболее интенсивно мотивация к использованию Интернет-пространства и информационных ресурсов развивается в период обучения в вузах. Именно в это время многие студенты не только используют Интернет для получения учебной информации, но и впервые пробуют реализовывать иные проекты, связанные с получением профессиональных навыков и даже ведения бизнеса.

Исследование мотивации студентов по применению Интернет-ресурсов для профессионального развития и занятий бизнесом привлекает внимание специалистов различных профилей, в том числе социологов и психологов. Это не случайно, потому что современная молодежь проводит в Сети значительное количество времени, иногда в ущерб своему здоровью и не всегда в связи с решением учебных задач. Большая часть времени, проведенного ей в Сети, используется для общения, то есть удовлетворения потребностей, формирующих мотивы аффилиации.

На постсоветском пространстве такие исследования были инициированы еще в середине 90-х годов прошлого столетия российскими специалистами Войскунским А.Е., Арестовой О.Н. и Бабаниным Л.Н., однако при их проведении рассматривались только общие вопросы демографической и социопсихологической динамики, а студенчество, как особая социальная группа, вообще не изучалось [1].

На данный момент накоплен определенный опыт исследования мотивации студентов в использовании Интернета как эффективного ресурса для профессионального развития, успешной учебы и для приобщения к практической бизнес-деятельности. В качестве методологической основы, в большинстве из них, принимается утверждение, сформулированное представителями научной школы А.Н. Леонтьева, согласно которому, мотивация понимается как иерархичная система. В трудах Т.О. Гордеевой, А.Е. Войскунского, Ж. Нюттена, Д.А. Леонтьева отмечается, что наиболее актуально при проведении таких исследований стоит вопрос получения объективных данных и выделения критериев, позволяющих адекватно судить о типах мотивации, позволяющих с научных позиций выполнять их диагностику [2].

В качестве одного из возможных путей решения данной проблемы предлагается использовать возможности функционального анализа, позволяющего подробно и непредвзято изучить влияние мотивов на некоторые конкретные подструктуры деятельности [3]. В частности, важной формой проявления направляющей функции мотивации представляется ориентация деятельности студентов на внешнюю предметную область, то есть на конкретную ситуацию, в данном случае – получение полезной для учебы информации и, в конечном счете - получения профессиональных навыков.

Не менее важной является оценка мотивации, как полученного конечного результата, инициирующего ту или иную практическую деятельность, а также всех обстоятельств, которые привели к нему. Как правило, эта функция может проявляться, как в рациональной вербальной, так и в невербальной форме, поэтому объективно оценить ее бывает весьма сложно. В то же время, при исследовании мотивации студентов, как раз наибольший интерес представляют именно субъективные оценки той роли, которую сыграли применяемые ресурсы и инструменты для достижения поставленных целей.

Таким образом, изучение мотивации студентов по использованию Интернета предполагает выяснение следующих вопросов:
- какие конкретные цели изначально ставились ими во время пребывания в Сети: получение информации, первичное приобретение профессиональных знаний и навыков или реализация уже имеющихся с целью заработка;
- какие ***конкретные потребности и мотивы возникают и развиваются*** у студентов в процессе повседневного использования Интернет-ресурсов.

Безусловно, указанные вопросы позволяют получить ответы исключительно только о ситуативной мотивации, но, вместе с тем, они могут стать тем фундаментом представлений, которые в будущем смогут дать ответ на вопрос о характере глубинных личностных мотивационных структурах. С практической точки зрения, исследования, построенные на такой основе, следует рассматривать в качестве пилотных, целью которых является накопление, анализ и интерпретация первичной социологической информации, которую можно будет использовать в ходе дальнейших, более глубоких, аналитических исследований.

Впервые такие исследования в Брестском государственном техническом университете были проведены в 2015 году усилиями социологической лаборатории кафедры социально-политических и исторических наук. В них участвовали студенты различных курсов факультета электронно-информационных систем. Новизна проведенного исследования в том, что выборка (свыше 200 респондентов) формировалась исходя из начального предположения, что именно у студентов данного факультета мотивационная составляющая по использованию Интернета в качестве эффективного ресурса для профессионального развития, будет выражена наиболее ярко. Это предположение базируется на аксиоматическом признании наличия у них осознанного выбора будущей профессии, более квалифицированного владения информационными технологиями и ресурсами Сети, чем у студентов других специальностей, а также уже имеющимся опытом решения

Бурко Оксана Петровна, *доцент кафедры социально-политических и исторических наук Брестского государственного технического университета.*
Данилов Юрий Дмитриевич, *доцент кафедры социально-политических и исторических наук Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Репозиторий БрГТУ