

Максимальное значение фактора оптического ограничения соответствует моде нулевого порядка и в десятки раз больше, чем для других мод. Увеличение фактора оптического ограничения позволяет понизить порог генерации оптически накачиваемых лазеров.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Bergmann, M.J. Optical-field calculations for lossy multiple-layer AlxGa1-xN/InxGa1-xN laser diodes / M.J. Bergmann, H.C. Casey, Jr. // J. Appl. Phys. – 1998. – Vol. 84, Iss. 3. – P. 1196–1203.
2. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин. – Москва: Наука, 1978. – 512 с.
3. Тарасюк, Н.П. Фактор оптического ограничения и пороговые условия генерации оптически накачиваемых полупроводниковых лазеров на квантоворазмерных структурах InGaN/GaN, выращенных на кремниевых подложках / Н.П. Тарасюк, А.А. Глады-

щук, Е.В. Луценко // Вестник БГТУ. – 2002. – № 5: Физика, математика, химия – С. 8–13.

4. Адамс, М. Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. – Москва: Мир, 1984. – 512 с.
5. Brunner, D. Optical constants of epitaxial AlGaIn films and their temperature dependence / D. Brunner, H. Angerer, E. Bustarret, F. Freudenberg, R. Höppler, R. Dimitrov, O. Ambacher, M. Stutzmann // J. Appl. Phys. – 1997. – Vol. 82, № 10. – P. 5090–5096.
6. Weber, M.J. Handbook of Optical Materials. / M.J. Weber. Boca Raton, Flo.: CRC Press – 2003. – P. 499.
7. Gonzalez, J.C. Minority-carrier diffusion length in a GaN-based light-emitting diode. / J.C. Gonzalez, K.L. Bunker, P.E. Russell // Appl. Phys. Lett. – 2001. – Vol. 79, № 10. – P. 1567–1569.

Материал поступил в редакцию 10.01.2017

#### TARASYUK N.P., LUTSENKO E.V., GLADYSHCHUK A.A. Influence on the factor of optical restriction of wavelength of radiation, number of the mode and design for heterostructures of InGaN/GaN optimized under the fundamental mode

Heterostructures of InGaN/GaN are perspective for creation of the laser devices working in ultra-violet – dark cyan area of a range. Thanks to shorter wavelength blue lasers provide more high density of data record. One of possible laser applications in green area of ranges – information lines of short expansion on plastic light waveguides.

In this operation optimization on a factor of optical restriction of different designs of heterostructures with the active area containing five and ten quantum holes of InGaN is performed.

УДК 075.8;004.42;004.45

Бегель А.Н., Гладковский В.И., Пинчук А.И.

### КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ СЛОЖНОГО ТЕПЛООБМЕНА

**Введение.** В качестве исходной математической модели необходимо записать систему дифференциальных уравнений конвективного теплообмена, состоящую из уравнений пограничного слоя и уравнения теплоотдачи в условиях двухмерного стационарного потока при отсутствии внутренних тепловыделений и диссипации энергии, а также при постоянстве всех физических свойств жидкости (воздуха). Для нахождения точных решений дифференциальных уравнений математической физики в частных производных разработан ряд методов, основанных на переходе к новым переменным в результате масштабирования. При этом стремятся уменьшить число новых переменных по сравнению с числом исходных, например, за счет использования особенностей симметрии задачи. В некоторых случаях целесообразно выделять так называемые регулярные тепловые режимы – нестационарные процессы теплопроводности такие, что поле безразмерной температуры остается подобным самому себе с течением времени. В этом случае будем считать тепловое явление автомодельным, то есть распределение его характеристик в разные моменты времени могут быть получены одно из другого с помощью соответствующего преобразования подобия. Такое преобразование чаще всего ищут с помощью анализа размерности физических величин, входящих в уравнение, и соответствующего масштабирования [1].

Для горизонтально расположенного цилиндра в случае естественной конвекции после применения методов теории подобия получается следующий результат [2]:

$$Nu_{\infty} = 0.5(Ra)_{\infty}^{0.25} \left( \frac{Pr_{\infty}}{Pr_0} \right)^{0.25} \quad (1)$$

Конвективный теплообмен для вертикально расположенного цилиндра определяется уравнением

$$Nu_{\infty} = 0.75(Ra)_{\infty}^{0.25} \left( \frac{Pr_{\infty}}{Pr_0} \right)^{0.25} \quad (2)$$

В этих формулах в качестве определяющего размера используется диаметр цилиндра. За определяющую температуру принимается температура окружающей среды (жидкости)  $t_m = t_{\infty}$ .

**1. Методика расчета тепловых потерь при сложном теплообмене.** Плотность потока теплоты при сложном теплообмене можно рассчитать следующим образом [2]:

$$q = \alpha_{эфф} (T_{ж1} - T_{ж2}) \quad (3)$$

В формуле (3)  $\alpha_{эфф}$  – эффективное значение коэффициента теплоотдачи:

$$\alpha_{эфф} = \alpha_k + \alpha_l \quad (4)$$

где  $\alpha_k$  и  $\alpha_l$  – коэффициенты теплоотдачи конвекцией и тепловым излучением соответственно.

Для аналитического нахождения  $\alpha_k$  и тепловых потерь за счет конвекции,  $Q_k$ , выполняются следующие действия:

- находим характерную температуру  $t_m = 0.5(t + t_{\infty})$ , где  $t$  – температура стенки,  $t_{\infty}$  – температура жидкости (окружающей среды);
- по характерной температуре находим теплофизические характеристики жидкости (из таблиц): коэффициент кинематической вязкости,  $\nu$ , коэффициент теплопроводности,  $\lambda$ , а также число Прандтля,  $Pr$ ,

Бегель А.Н., студент группы АС-43 И факультета электронных и информационных систем Брестского государственного технического университета.

Гладковский В.И., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры физики Брестского государственного технического университета.

Пинчук А.И., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры физики Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

- рассчитываем коэффициент объемного расширения  $\beta$  (для газа  $\beta = \frac{1}{T_\infty}$ );

$$Gr = \beta \frac{g l^3}{\nu^2} (t - t_\infty), \quad (5)$$

где  $l$  – характерный размер (высота – для вертикальной трубы, диаметр – для горизонтальной трубы),  $g$  – ускорение свободного падения;

- находим число Релея (найдя число Прандтля,  $Pr$ , из таблиц) из соотношения

$$Ra = Gr Pr, \quad (6)$$

- зная число Релея, рассчитываем число Нуссельта для вертикальной и горизонтальной трубы по формуле:

$$Nu = c (Ra)^n, \quad (7)$$

где  $c$  и  $n$  – коэффициенты, зависящие от числа Рэлея (таблица 1).

Таблица 1 – Значения коэффициентов  $c$  и  $n$

Число Релея	$c$	$n$
$1 \cdot 10^3 - 5 \cdot 10^2$	1.18	1/8
$5 \cdot 10^2 - 2 \cdot 10^7$	0.54	1/4
$2 \cdot 10^7 - 1 \cdot 10^{13}$	0.135	1/3

- окончательно находим коэффициент теплоотдачи  $\alpha_k$  из соотношения

$$\alpha_k = \frac{Nu \lambda}{l}. \quad (8)$$

Величина тепловых потерь за счет конвекции составит:

$$Q_k = \alpha_k F (t - t_\infty), \quad (9)$$

где  $F$  – площадь боковой поверхности трубы.

Поток теплоты, излучаемый пластинами, находим по формуле

$$Q_l = \epsilon C_0 \left[ \left( \frac{T}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_\infty}{100} \right)^4 \right] F, \quad (10)$$

где  $\epsilon$  – коэффициент черноты материала трубы,  $C_0$  – коэффициент излучения абсолютно черного тела,  $C_0 = 5.67 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ .

Суммарные тепловые потери (суммарный тепловой поток) находим по формуле:

$$Q = Q_k + Q_l. \quad (11)$$

**2. Программа для вычисления физических характеристик сложного теплообмена.** Цель работы заключалась в разработке программы для вычисления физических характеристик при естественной конвекции воздуха, используя данные, которые были получены в ходе экспериментального исследования теплопередачи. Для начала мы определили несколько требований, которым должна соответствовать программа:

1. Уметь рассчитывать физические характеристики, используя входные данные.
2. Иметь графический пользовательский интерфейс, интуитивно понятный для большинства пользователей.
3. Отображать ход вычислений, а также используемые формулы.

Для создания программы был использован высокоуровневый язык программирования C# и среда разработки Microsoft Visual Studio. Данные средства разработки были выбраны в связи с широкими возможностями для разработки, тестирования и отладки программного обеспечения.

При написании программы был реализован паттерн MVP (Model-View-Presenter) – шаблон проектирования пользовательского интерфейса, который разработан для облегчения автоматического модульного тестирования и улучшения разделения ответственности в презентационной логике (отделения логики выполнения от логики отображения). Данный шаблон состоит из трех компонентов [3]:

- Модель (*Model*) – предоставляет данные для пользовательского интерфейса.
- Представление (*View*) – реализует отображение данных (модели). В нашем случае это графический интерфейс.

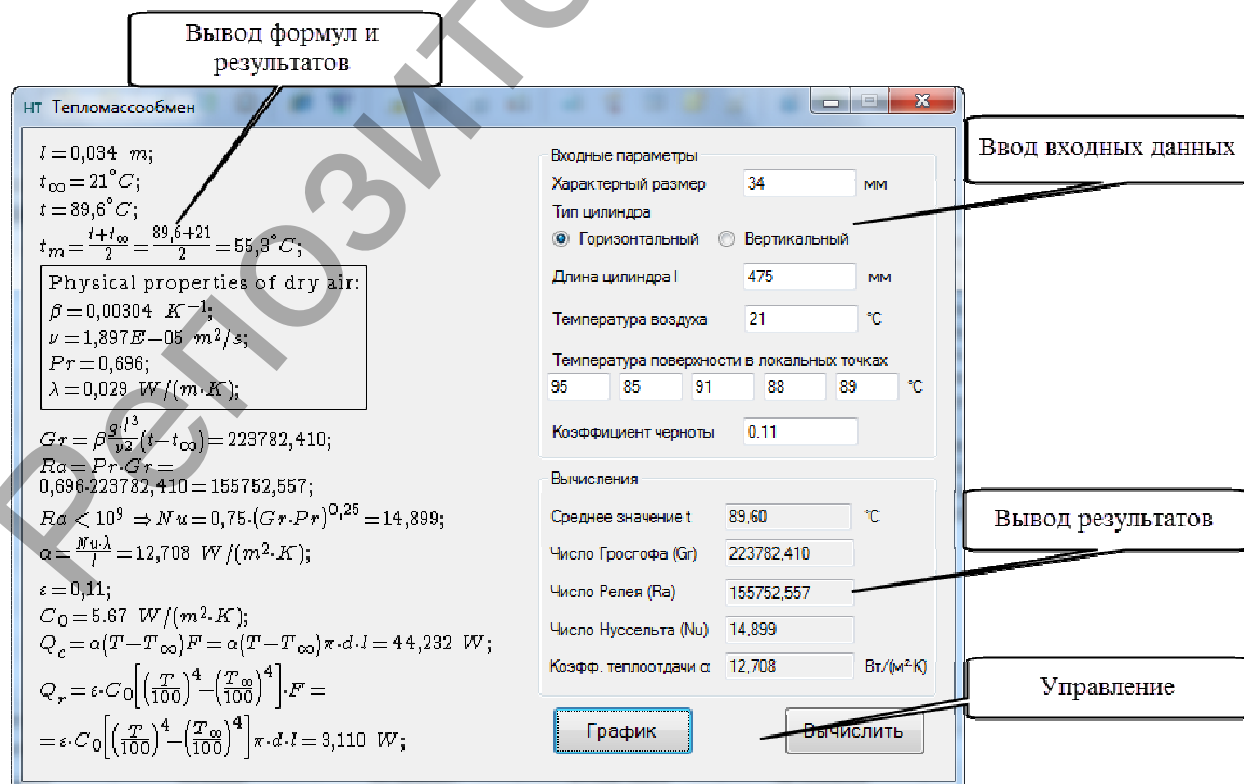


Рисунок 1 – Форма главного окна

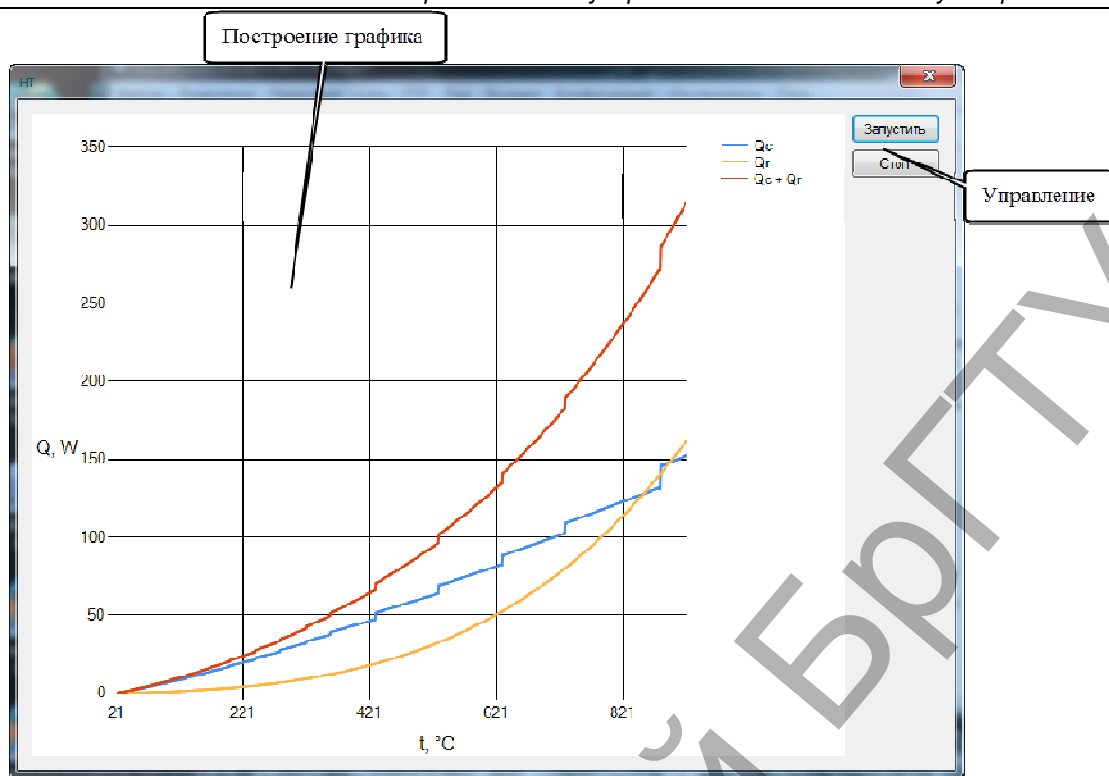


Рисунок 2 – Новое диалоговое окно

- Процессор (*Presenter*) – управляет моделью и представлением, реализует в себе все процессы, происходящие в приложении.

Моделью называется специальный класс данных, предназначенных для выполнения расчётов всех необходимых физических величин и содержащий информацию о методах, необходимых для вычисления конкретных характеристик. Параметрами для данных методов являются входные данные (температуры в локальных точках и температура воздуха, характеристики цилиндра и т. п.). Далее эти данные анализируются, и производятся соответствующие расчёты, в результате чего мы получаем все физические характеристики, которые нам нужно было найти.

Представление – это графический пользовательский интерфейс (GUI). Для создания нашего интерфейса в Visual C# для приложений Windows был применён конструктор Windows Forms [4]. Главное окно, построенное с помощью данного конструктора, представлено на рис. 1.

Форма главного окна условно разделена на несколько областей:

- Область вывода формул. Содержит единственный элемент управления *PictureBox*, предназначенный для отображения графических объектов.
- Область ввода входных данных. Состоит из нескольких полей (*TextBox*), надписей (*Label*) и переключателя (*RadioButton*). Пользователь при помощи вышеперечисленных элементов управления задаёт входные данные, которые будут использоваться для расчёта.
- Область вывода наиболее важных вычисленных значений. Состоит из нескольких неактивных полей (*TextBox*) надписей (*Label*).
- Область управления. Состоит из двух кнопок (*Button*):
  - «Вычислить» производит вычисления физических характеристик.
  - «График» запускает диалоговое окно, в котором осуществляется построение графика.

Процессор (*Presenter*) содержит управляющий код приложения, осуществляет управление как моделью, так и графическим интерфейсом и обеспечивает взаимосвязь между этими слоями. Процессор (*Presenter*) осуществляет обработку событий после нажатия на кнопки «Вычислить» и «График».

Так, при нажатии кнопки «Вычислить» процессор осуществляет сбор входных данных из области «View» и передаёт эти данные модели для вычисления значений. После того, как модель произвела расчёты, процессор получает вычисленные значения, генерирует изображение при помощи библиотеки *MimeTex* и передаёт результаты в область «View», где они выводятся в соответствующие области.

После нажатия кнопки «График» процессор получает от модели массив просчитанных точек для построения графика, а затем создаёт новое диалоговое окно и передаёт в него полученный массив. Вид данного окна представлен на рис. 2.

Окно состоит из нескольких элементов управления, таких как:

- Chart. Элемент, отвечающий за вывод графика.
- Две кнопки (*Button*) «Запустить» и «Стоп», которыми осуществляется управление процессом построения графика. Обработчик нажатия клавиши «Запустить» создаёт новый поток, который осуществляет добавление точек на график через заданный промежуток времени. «Стоп» останавливает выполнение потока, соответственно и динамическое построение графика.

Для визуализации математических формул была использована библиотека *MimeTeX*, распространяемая под лицензией GPLv3. Данная библиотека позволяет получать сгенерированные изображения математических формул, используя предварительно сформированное выражение, которое состоит из специальных команд языка разметки LaTeX. Это выражение формируется моделью по ходу процесса расчёта физических характеристик. Результат рендеринга сохраняется в изображение формата GIF. После этого происходит вывод полученного изображения в элемент управления *PictureBox*.

**Заключение.** Как показывает опыт внедрения данной компьютерной программы в учебный процесс, созданный программный продукт позволяет студентам:

- быстро выполнить расчёты тепловых потерь в случае сложного теплообмена для горизонтальной и вертикальной трубы;
- не использовать справочную информацию о физических свойствах жидкости (воздуха) из печатных источников, т. к. все необходимые параметры встроены в программу;
- визуально представить алгоритм расчета в алгоритмическом виде;

- видеть на основе созданной анимации относительный вклад тепловых потерь за счет естественной конвекции и теплового излучения.

#### СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Баренблатт, Г.И. Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг: учебное пособие / Г.И. Баренблатт; пер. с англ. – Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2009. – 216 с. ISBN 978-5-91559-017-4.

2. Тепло- и массообмен: учебн. пособие: в 2 ч. / Б.М. Хрусталев [и др.]; под. общ. ред. А.П. Несенчука. – Минск: БНТУ, 2007. – Ч. 1 – 606 с.
3. Тепляков, С. Паттерны проектирования на платформе. NET. – СПб.: Питер, 2015. – 320 с.
4. Петцольд, Ч. Программирование с использованием Microsoft Windows Forms. Мастер-класс / Пер. с англ. – М.: Русская Редакция; СПб.: Питер, 2006. – 432 с.

Материал поступил в редакцию 13.01.2017

#### BEGEL A.N., HLADKOVSKY V.I., PINCHUK A.I. Computer simulation of complex heat self-similar solutions in a bounded domain

The aim of the work was to develop a program to calculate the physical properties of complex heat transfer in natural convection, using data that were obtained during the experimental study of heat transfer. Specially designed program is to display the progress of calculation of physical characteristics, as well as the dynamic plotting of the cylinder heating process.

УДК 517.91: 004.021

Швычкина Е.Н., Вацкель Р.С.

### КОМПЬЮТЕРНЫЙ МЕТОД ПОИСКА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ХЕМОСТАТ-МОДЕЛИ

**Введение.** Модель искусственного биосинтеза описывает процесс выращивания полезной биомассы микроорганизмов (бактерий) в условиях принудительного перемешивания. В лабораторных условиях такой процесс осуществляется в специальных приборах, называемых обычно *хемостатами*. Хемостат представляет собой резервуар, заполненный специальным раствором (субстратом), служащим питательной средой для выращивания полезной культуры микроорганизмов. В простейших моделях хемостата [1] рассматривается конкуренция нескольких видов микроорганизмов, которые питаются одним ограниченным питательным веществом, называемым субстратом.

Математическая модель хемостата, описывающая рост популяции микроорганизмов при проточном культивировании, предложенная Дж. Моно [1], имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = (s_0 - s(t))D - x_1(t)\mu_1(s(t)) - x_2(t)\mu_2(s(t)), \\ \dot{x}_1(t) = (\mu_1(s(t)) - D)x_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = (\mu_2(s(t)) - D)x_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

где параметр  $D$  – называется потоком, и он численно равен скорости подачи питательного субстрата в ферментер;  $s(t)$  обозначает плотность питательного субстрата;  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  – плотности микроорганизмов в момент времени  $t$ ;  $\mu_i(s(t))$  ( $i=1,2$ ) – удельная скорость потребления  $i$ -м микроорганизмом субстрата  $s(t)$ ;  $S_0$  – концентрация субстрата в питательном растворе на входе. В работах [1, 2] приведено исследование системы (1) для случая, когда удельная скорость потребления субстрата  $i$ -м микроорганизмом задается при помощи функции Моно:

$$\mu_i(s(t)) = \frac{m_i s(t)}{a_i + s(t)} \quad (i=1,2), \quad (2)$$

где параметры  $a_i$  ( $i=1,2$ ) – постоянные равные концентрации субстрата, при которых удельная скорость роста микроорганизма равна половине максимальной (константы Михаэлиса-Ментен);  $m_i$  ( $i=1,2$ ) – максимальная скорость роста  $i$ -го микроорганизма.

Достаточно полный обзор и обобщения модели хемостата можно найти в монографии [1]. В большинстве работ, посвященных исследо-

ванию математических свойств хемостата, рассматриваются стационарные состояния при различных условиях [1, 2]. Нестационарное поведение хемостата изучалось в [1], где найдено предельное множество траекторий динамики хемостата в одномерном случае.

Существуют также различные модификации системы Михаэлиса-Ментен (1). Наряду с системой (1) рассматриваются системы с периодическими скоростями подачи и смыва питательного субстрата [3]. Также рассматриваются хемостат-модели, в которых взаимодействуют больше чем два микроорганизма, потребляющих лимитированный субстрат.

В работах [4–6] было показано, что в случае, когда коэффициенты Михаэлиса-Ментен удовлетворяют условию  $a_1 = a_2$  интегрирование дифференциальной системы третьего порядка (1) удается свести к интегрированию одного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка. Работы [5, 6] содержат программные модули, которые в зависимости от изменения параметров системы в заданных интервалах моделируют процессы хемостатного культивирования, а также обеспечивают визуализацию этих процессов для каждого микроорганизма. Там же для моделей хемостата Михаэлиса-Ментен (1)–(2) найдены коэффициентные соотношения, при выполнении которых построены двухпараметрические семейства решений в аналитической форме и приведена визуализация этих решений.

**В простейших моделях, когда в хемостате конкурируют две или более популяции эксплуататорским образом для одного лимитируемого субстрата, происходит вымирание всех, кроме одной, популяций.** Перечисленные выше методы показывают, что такое конкурентное исключение имеет место при разнообразии условий в хемостате и его модификаций.

В [1, 7, 9] показано, что если конкуренция перемещается вверх на один уровень, то есть допускается, что некоторые микроорганизмы, участвующие в культивировании, питаются другими микроорганизмами (многоуровневая или трофическая модель), то сосуществование может произойти в форме устойчивого предельного цикла.

Рассмотрим специальный случай модели хемостата [1, 10]. Возьмем в качестве модели простой хемостат, рассмотренный в работах [7, 9], с питательным веществом  $s(t)$  и организмом  $x(t)$ , который потребляет этот субстрат. Добавим хищника  $y(t)$ , который потребляет  $x(t)$ , но не может потреблять субстрат. Эта задача интересна как с

Швычкина Елена Николаевна, к.ф.м.н., доцент, доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.

Вацкель Роман Сергеевич, студент второго курса машиностроительного факультета Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БрГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.