УДК 517.9

А.И. ЖУК
Брест, БрГТУ

О ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T=[0;a]\subset R$:

$$\dot{x}^i(t)=\sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t,x(t))\dot{L}^j(t),\quad i=\overline{1,p} \tag{1}$$

$$x(0)=x_0, \tag{2}$$

где f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ – липшицевы функции, $x(t)=[x^1(t),x^2(t),...,x^p(t)]$, $x_0\in R^p$, а $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ непрерывны справа, $L^j(0)=L^j(0-)=0$ и $L^j(a-)=L^j(a)$, $j=\overline{1,q}$.

Таким образом, правая часть рассматриваемой системы содержит произведение обобщенных функций, которое однозначно не определено. Следовательно, рассматриваемая система является некорректной и решение задачи (1) – (2) зависит от подхода к трактовке подобного рода уравнений. Наиболее перспективным из таких подходов является концепция новых обобщенных функций. В рамках этого подхода и рассматривается многомерное неавтономное дифференциальное уравнений (1). Напомним определение алгебры мнемофункций [2]. Пусть R – вещественная прямая. На множестве всех последовательностей из элементов R введем отношение эквивалентности следующим образом: $(x_n)\sim(y_n)$, если $\exists n_0\in N$, $\forall n\ge n_0$, $x_n=y_n$, тогда обобщенным числом назовем класс эквивалентности $\tilde{x}=[(x_n)]$. Множество обобщенных чисел обозначим $\tilde{R}$. Аналогично можно построить расширение $\tilde{T}$ отрезка $T=[0;a]$. Выделим в $\tilde{R}$ следующее подмножество:

$$H=\{\tilde{h}\in\tilde{R}:\tilde{h}=[(h_n)],h_n>0,\forall n\in N,\lim_{n\to\infty}h_n=0\}.$$

На множестве всех последовательностей $\{f_n\}$ таких, что $f_n\in C^\infty(R)$, введем отношение эквивалентности: $(f_n)\sim(g_n)$, если $\exists n_1\in N$, $\forall n\ge n_1$, $\forall x\in R$, $f_n(x)=g_n(x)$. Класс эквивалентности $[(f_n)]$ будем называть мнемофункцией [2] и обозначать $\tilde{f}$. Обозначим через $G(R)$ множество всех мнемофункций, которое является алгеброй с покоординатными операциями умножения и сложения. Алгебру мнемофункций вида $\widetilde{f}(\widetilde{x})=[(f_n(x_n))]$, где $\widetilde{x}=[(x_n)]\in\widetilde{R}$, а $[f_n(x)]\in G(R)$, $\forall x\in R$, обозначим как $G(\widetilde{R})$. Определим на $G(\widetilde{T})$ обобщенный дифференциал

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{f}(\widetilde{x})=[(f_n(x+h_n)-f_n(x))],\ \widetilde{x}=[(x)]\in\widetilde{T},\ \widetilde{h}\in H.$$

Будем говорить, что мнемофункция $\widetilde{f}=[(f_n)]$ ассоциирует элемент f из топологического пространства Ω, если последовательность $\{f_n\}$ при $n\to\infty$ сходится к f в топологии Ω.

Заменим обычные функции в многомерном дифференциальном уравнении (1) на соответствующие им новые обобщенные функции и получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций:

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{x}^i(\widetilde{t})=\sum_{j=1}^{q}\widetilde{f}^{ij}(\widetilde{t},\widetilde{x}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{L}^j(\widetilde{t}),\quad i=\overline{1,p} \tag{3}$$

с начальным условием $\widetilde{x}\big|_{[0,\widetilde{h}]}=\widetilde{x}^0$, где $\widetilde{h}=[\{h_n\}]\in H$, $\widetilde{a}=[\{a\}]\in T$ и $\widetilde{t}=[\{t_n\}]\in\widetilde{T}$, $\widetilde{x}=[\{x_n(t)\}]$, $\widetilde{f}=[\{f_n(x)\}]$, $\widetilde{x}^0=[\{x_n^0(t)\}]$, $\widetilde{L}=[\{L_n(t)\}]$ и $x_n^0\to x(0)$.

Таким образом, под решением многомерного дифференциального уравнения (1) будем понимать ассоциированное решение уравнения в дифференциалах (3), существование и единственность решения которого доказано в [1]. Везде далее будем полагать, что необременительные условия этой теоремы выполнены.

Если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n)-x_n^i(t)=\sum_{j=1}^{q}f_n^{ij}(t,x_n(t))[L_n^j(t+h_n)-L_n^j(t)],\quad i=\overline{1,p} \tag{4}$$

$$x_n(t)\big|_{[0,h_n)}=x_{n0}(t), \tag{5}$$

здесь $L_n^j(t)=(L^j*\rho_n^j)(t)=\int\limits_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}}L^j(t+s)\rho_n^j(s)ds,\ j=\overline{1,q}$, где $\rho_n^j(t)=\gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t)$,

$\rho^j\geq 0,\ \ sup\rho(\rho^j)\subseteq[0,1],\ \ \int\limits_0^1\rho^j(s)ds=1,$ а $f_n=f*\widetilde{\rho}_n$, где $\widetilde{\rho}_n(x_0,x_1,...,x_p)=$ $=n^p\widetilde{\rho}(nx_0,nx_1,...,nx_p),\ \ \widetilde{\rho}\in C^\infty(R^{p+1}),\ \ \widetilde{\rho}\geq 0,\ \ \int\limits_{[0,1]^{p+1}}\widetilde{\rho}(x_0,x_1,...,x_p)dx_0dx_1...dx_p=1,$

$sup\rho(\widetilde{\rho})\subset[0,1]^{p+1}$. Здесь $\gamma^j(n)$ – некоторая монотонная функция такая, что $\gamma^j(n)\to\infty$ при $n\to\infty$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0,h_n)$, $m_t \in N$. Несложно видеть, что решение системы (4) – (5) можно записать в виде, где $i=\overline{1,p}$:

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(\tau_t + kh_n, x_n(\tau_t + kh_n))[L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)].$$

Для описания предельного поведения задачи (4) – (5) рассмотрим систему

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q}\int_0^t f^{ij}(s,x(s))dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \le t} S^i(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)),\ i=\overline{1,p}, \quad (6)$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r +) - L^d(\mu_r -)$ – величина скачка, $S^i(\mu,x,u) = \varphi^i(1,\mu,x,u) - \varphi^i(0,\mu,x,u)$, где $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$, а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из уравнения, где $H(s)$ – функция Хевисайда:

$$\varphi^i(t,\mu,x,u) = x^i + \sum_{j=1}^{b} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s-,\mu,x,u))dH(s-1) +$$

$$+ \sum_{j=b+1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s,\mu,x,u)ds\,.$$

Теорема. *Пусть* f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены.* $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – *непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ *для* $j=\overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n\to\infty$ *и для* $j=\overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n\to 0$ *ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (6), если* $\int_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0| dt \to 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каримова, Т.И. Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов / Т.И. Каримова, О.Л. Яблонский // Вестн. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2009. – № 2. – С. 81–86.

2. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Докл. НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38, № 5. – С. 23–27.