КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИЗАЙНА НЕОГРАНИЧЕННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

С. Ф. Макарук (Брест, Беларусь)

При изучении эффективных свойств композиционных материалов возникает следующая задача оптимизации на множестве решений краевой задачи теории аналитических функций (см. [1]).

Рассмотрим конечное число простых замкнутых кривых L_k, $k = \overline{1,n}$; $\operatorname{int} L_i \cap \operatorname{int} L_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$. Обозначим $D^- := \bigcup\limits_{k=1}^{n} \operatorname{ext} L_k$ многосвязную область (матрицу), ограниченную объединением L кривых L_k, а $D^+ := \bigcup\limits_{k=1}^{n} \operatorname{int} L_k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k^+$ — объединение внутренностей кривых L_k (включений). Области D^+ и D^- заполнены различными материалами, имеющими проводимость λ_1 и λ, соответственно. Не ограничивая общности, можно считать, что $\lambda = 1$. Пусть $g \in C^{1,\lambda}(C)$ - заданная функция, $\rho = \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 + 1}$.

Задача оптимального дизайна (см., например, [2–3]) состоит в нахождении кривой L и (кусочно-) аналитической функции $\varphi(z)$, непрерывной вплоть до границы соответствующих областей, удовлетворяющей краевому условию

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + \rho\overline{\varphi^+(t)} + g(t)\ t \in L, \tag{1}$$

таких, что функционал эффективной проводимости σ принимает максимальное (или минимальное) значение, т. е.

$$\sigma := \frac{1}{\pi r^2}\int_L \operatorname{Re}\varphi^+(t)dy \to \max(\min),\ t = x + iy, \tag{2}$$

в предположении, что площадь области D^+ фиксирована.

Задача (1–2) решается методом малого параметра. При этом используется следующее представление компоненты φ^- решения (1):

$$\varphi^-(z) = \rho\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{g(\tau)}}{\tau - z}d\tau + \rho^2\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - z}\overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{g(\tau_1)}}{\tau_1 - \tau}d\tau_1}.$$

В важном для приложений случае $g(t) = \bar{t}$ описано оптимальное в смысле (2) расположение круговых включений одинакового радиуса при $n \leq 3$.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Фонда фундаментальных исследований Республики Беларусь.

Литература

1. *Mityushev V.V., Rogosin S.V. Constructive Methods for Linear and Nonlinear Boundary Value Problems for Analytic Function.* Boca Raton-London: Chapman & Hall / CRC Press (2000).

2. *Cherkaev A. Variational Methods for Structural Optimization.* N.-Y. etc.: Springer Verlag, (2000).

3. *Bendsoe M.P. Optimization of Structural Topology, Shape and Material.* Berlin Etc.: Springer Verlag (1995).