УДК 517.968

В.Т. Дацык
Беларусь, Брест, БрГТУ

ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим класс обыкновенных линейных дифференциальных уравнений дробного порядка вида:

$$\sum_{\{m\}} a_m y^{(m)}(x) = f(x), \tag{1}$$

где $\{m\}$ – конечное множество действительных неотрицательных чисел, $\max\{m\} = s > 0$, $y^{(m)}$ – дробные производные Римана-Лиувилля функции y порядка m, a_m – числовые коэффициенты, $f \in L(\mathbb{R})$ – фиксированная функция (в общем случае комплекснозначная).

Сформулируем и докажем теорему о решениях уравнений данного класса. Прежде всего введем в рассмотрение несколько понятий. Рассматриваем класс функций f:

$$W(L, (iu)^\alpha) = \{f \in L(\mathbb{R}) \mid (iu)^\alpha \widehat{f}(u) = \widehat{g}(u), \alpha > 0, g \in L(\mathbb{R})\}.$$

Через $I_0 = \{E(j)\}$ обозначим множество всех преобразований Фурье функций класса $L(\mathbb{R})$.

Определение 1. Функция $\Gamma(j)$, $j \in \mathbb{R}$ называется мультипликатором для $f \in L(\mathbb{R})$, если $(E(j) \cdot \Gamma(j)) \in L(\mathbb{R})$, где $E(j) = \widehat{f}(j)$ (преобразование Фурье функции f). Если $\Gamma(j)$ является мультипликатором для каждой $f \in L(\mathbb{R})$, то $\Gamma(j)$ называется общим мультипликатором класса I_0.

Теорема 2. *Если $E(j) = \widehat{f}(j)/\mu(j)$, $E'(j)$, $E''(j) \in L(\mathbb{R})$, то $1/\mu(j)$ есть мультипликатор для функции $f \in L(\mathbb{R})$ в пространстве I_0.*

Доказательство. Известны следующие результаты:

Теорема 3. *Если $E(j), \psi(x) \in L(\mathbb{R})$, $E(j)$ непрерывна на $\mathbb{R}$ и*

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j) e^{ijx} dj,$$

то функция

$$E(j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{-ijt} dt$$

есть преобразование Фурье функции ψ, т.е. $E(j) \in I_0$.

Теорема 4. *Если вторая производная функции ψ абсолютно интегрируема на числовой прямой, то преобразование Фурье $\hat{\psi} \in L(\mathbb{R})$.*

Покажем, что $\psi(x)$ является абсолютно интегрируемой на $\mathbb{R}$. Согласно теореме 4, имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(j) e^{ijx} dj = \psi(-x) \in L(\mathbb{R}),$$

следовательно, и $\psi(x) \in L(\mathbb{R})$.

Из теоремы 3 следует, что $E(j) = \widehat{\psi}(j)$, $E(j) \in I_0$. А согласно определению 1, $1/\mu(j)$ – мультипликатор для функции $f \in L(\mathbb{R})$.

Теорема доказана.

Теперь перейдем к формулировке и доказательству теоремы о существовании и единственности решения для одного класса обыкновенных линейных дифференциальных уравнений дробного порядка.

Теорема 5. *Если $f \in L(\mathbb{R})$ и*

$$E_k(j) = \frac{(ij)^k \widehat{f}(j)}{\sum\limits_{\{m\}} a_m (ij)^m} \in I_0,$$

где $k \in \{0, s\}$, $s = \max\{m\}$, то дифференциальное уравнение дробного порядка (1)

а) при $f(x) \equiv 0$ имеет в $L(\mathbb{R})$ единственное тривиальное решение $y \equiv 0$;

б) при $f(x) \neq 0$ имеет единственное ненулевое решение

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(j)}{\mu(j)} e^{ijx} dj$$

в $L(\mathbb{R})$, где $\mu(j) = \sum\limits_{\{m\}} a_m (ij)^m$.

Доказательство. Найдем преобразование Фурье левой части уравнения (1) в $L(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ijx} \sum_{\{m\}} a_m y^{(m)}(x) dx = \sum_{\{m\}} a_m \widehat{y^{(m)}}(j) = \widehat{y}(j) \sum_{\{m\}} a_m (ij)^m.$$

Таким образом,

$$\widehat{y}(j)\sum_{\{m\}} a_m(ij)^m = \widehat{f}(j). \tag{2}$$

Обозначим $\mu(j) := \sum_{\{m\}} a_m(ij)^m$.

а) Пусть $f(x) \equiv 0$, т.е. уравнение (1) является однородным. Тогда уравнение (2) примет вид $\mu(j)\widehat{y}(j) = 0$. Возможны два случая.

1) $\mu(j) \neq 0$. Тогда $\widehat{y}(j) = 0$, и, следовательно, $y = 0$ является единственным решением дифференциального уравнения (1) в классе $L(\mathbb{R})$.

2) $\mu(j) = 0$ в некоторых точках $\mathbb{R}$.

Поскольку функция $\mu(j)$ является аналитической функцией действительного переменного j, то ее нули изолированы, т.е. представляют собой нигде не плотное на числовой прямой множество. Поэтому в силу непрерывности $\widehat{y}(j)$, $\widehat{y}(j) = 0$ и, следовательно, $y = 0$ на $\mathbb{R}$.

Таким образом, однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение в классе $L(\mathbb{R})$.

б) Пусть $f(x) \neq 0$. Тогда из формулы (2), следует что

$$\widehat{y}(j) = \frac{\widehat{f}(j)}{\mu(j)}.$$

Поскольку $E_k(j) \in I_0$, то

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{y}(j)e^{ijx}dj = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{f}(j)}{\mu(j)}e^{ijx}dj =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ijx}}{\sum\limits_{\{m\}} a_m(ij)^m}dj \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ijt}dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dj}{\sum\limits_{\{m\}} a_m(ij)^m} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ij(x-t)}dt = |x - t =: \tau| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dj}{\mu(j)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau)e^{ij\tau}d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau)Q_m(\tau)d\tau,$$

где

$$Q_m(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ij\tau}}{\sum\limits_{\{m\}} a_m(ij)^m}dj.$$

Таким образом, существование и единственность решения дифференциального уравнения (1) в классе $L(\mathbb{R})$ доказаны.

Рассмотрим применение теоремы 5 при решении дифференциальных уравнений дробного порядка.

Пример. Решить дифференциальное уравнение

$$-y^{(9/2)} + y^{(5/2)} = f(x),$$

где функция $f(x)$ такая, что

$$\widehat{f}(j) = \begin{cases} j^{22,5}e^{-j}, & \text{при } j > 0; \\ 0, & \text{при } j \leqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Согласно теореме 3, функция $E(j) = \widehat{f}(j)$ действительно является преобразованием Фурье абсолютно интегрируемой на числовой прямой функции

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{j^{22,5}e^{ijx}}{e^j} dj.$$

В этом примере

$$\mu(j) = \sum_{\{m\}} a_m (ij)^m = -(ij)^{9/2} + (ij)^{5/2},$$

$$\frac{\widehat{f}(j)}{\mu(j)} = \frac{i^{-5/2} j^{20} e^{-j}}{1 + j^2} \cdot \chi_{(0;+\infty)}(j),$$

где $\chi_{(0;+\infty)}(j)$ – характеристическая функция промежутка $(0; +\infty)$.

Нетрудно видеть, что функции $\widehat{f}(j)/\mu(j)$, $(\widehat{f}(j)/\mu(j))'$ и $(\widehat{f}(j)/\mu(j))''$ абсолютно интегрируемы на $\mathbb{R}$, и, следовательно, по теореме 2, $\mu(j)$ является мультипликатором для функции f в пространстве I_0. Рассуждая аналогично, получим, что

$$\frac{(ij)^{9/2}\widehat{f}(j)}{\mu(j)} \in I_0.$$

По теореме 5, данное дифференциальное уравнение дробного порядка имеет в классе $L(\mathbb{R})$ единственное решение

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{i^{-5/2} j^{20} e^{-j}}{j^2 + 1} e^{ijx} dj.$$